УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2025-87-1-5-13

ПРОДОЛЬНАЯ ВОЛНА, РАСПРОСТРАНЯЮЩАЯСЯ В ВЯЗКОУПРУГОМ ПО МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА СТЕРЖНЕ. ЧАСТЬ 1. АНАЛИЗ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК И ЧАСТОТНО-ЗАВИСИМОГО ЗАТУХАНИЯ ПРИ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ*

Ерофеев В.И.[1,2], **Ермаков Я.Д.**[2], **Котов В.Л.**[2]

[1]*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова РАН», Нижний Новгород, Российская Федерация*
[2]*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

aroslavermakov935@gmail.com, erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 04.06.2024

Исследуется динамика стержня, материал которого подчиняется закону деформирования среды Максвелла. Распространение продольной волны в таком стержне описывается одномерным волновым уравнением, дополненным слагаемым, характеризующим вязкость материала. Решение уравнения отыскивается в виде бегущей гармонической волны. От исходного дифференциального уравнения в частных производных осуществляется переход к алгебраическому комплексному дисперсионному уравнению, связывающему частоту и волновое число, позволяющему вычислить фазовую и групповую скорости волны, определить закономерности ее распространения и затухания. При анализе дисперсионного уравнения выделены две задачи: 1) частота считается действительной величиной, а волновое число – комплексной величиной (так принято при решении краевых задач); 2) волновое число считается действительной величиной, а частота – комплексной величиной (так принято при решении задачи Коши). Подробно рассмотрена первая задача. Выявлено, что продольная волна, удовлетворяющая ее условиям, обладает следующими особенностями распространения: при увеличении действительной части волнового числа ее частота возрастает (при малой вязкости возрастает медленно, при большой вязкости – быстро), фазовая скорость сначала возрастает, а затем выходит на горизонтальную асимптоту, групповая скорость возрастает, достигает максимума, затем убывает, выходя на ту же горизонтальную асимптоту, что и фазовая скорость. Во всем диапазоне изменения действительной части волнового числа наблюдается аномальная дисперсия продольной волны (то есть групповая скорость больше, чем фазовая); затухание волны (определяемое мнимой частью волнового числа) сна-

* Выполнено при поддержке РНФ (грант № 20-19-00613).

чала увеличивается с ростом частоты, затем выходит на горизонтальную асимптоту и становится частотно-независимым.

Ключевые слова: вязкоупругая среда Максвелла, стержень, продольная волна, дисперсия, затухание.

Введение

Для описания вязкоупругих свойств материалов и элементов конструкций часто используются реологические модели [1]. Упругие свойства элементарного объема моделируются эквивалентным упругим элементом (пружиной), а вязкие свойства элементарного объема моделируются эквивалентным вязким элементом (демпфером). В различных моделях демпфер и пружина располагаются по-разному: в модели Фойхта – Кельвина – параллельно (рис. 1), в модели Максвелла – последовательно (рис. 2).

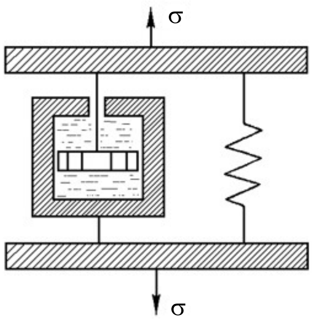

Рис. 1

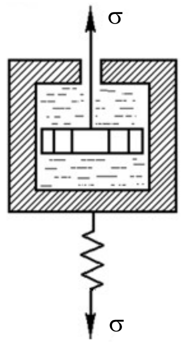

Рис. 2

На основе модели Максвелла, являющейся предметом многочисленных исследований [2–7], описываются поведение металлов под действием импульсных нагрузок, движения расплавов и растворов полимеров [8].

Вязкоупругие свойства проявляют резиновые и резинокордные элементы конструкций (например, автомобильные шины), выделяющие тепло при эксплуатации. От погрешности аппроксимации функции релаксации зависит точность вычисления тепловыделения. Очевидно, что функцию релаксации следует определять в эксперименте, воспроизводящем циклическое деформирование, поскольку тепло выделяется при периодическом процессе изменения напряженно-деформированного состояния. В статье [9] продемонстрирована эффективность модели Максвелла для вычисления выделяемой энергии, обусловленная тем, что при аппроксимации функции релаксации достаточная точность достигается суммой всего нескольких экспонент.

Аналитическому и численному исследованию двумерной модели вязкоупругой среды Максвелла, содержащей верхнюю конвективную производную, посвящены статьи [10–13], двумерная модель, содержащая производную Яумана, изучалась в [8, 14, 15]. Характеристики системы уравнений, описывающей трехмерное движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла, найдены в [10, 16]. При этом для линеаризованной в окрестности состояния покоя системы поставлена начально-краевая задача, однозначная разрешимость которой также установлена.

Для модели Максвелла, основанной на одномерном нелинейном определяющем соотношении, в [17, 18] аналитически изучены общие качественные свойства семейств основных квазистатических кривых: ползучести, релаксации, деформирования и других. Это позволило выявить ограничения на материальные функции, обеспечивающие адекватное описание типичных свойств экспериментальных кривых широкого класса вязкоупругопластичных материалов, определить арсенал возможностей модели (например, для описания сверхпластического деформирования), обозначить индикаторы неприменимости, то есть те эффекты, которые принципиально не могут быть описаны с ее помощью.

Информацию об обобщенной модели Максвелла с дробными производными и ее месте среди вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в задачах механики твердого тела, можно найти в обзоре [19].

Упругие и вязкоупругие свойства стержней и стержневых систем традиционно изучаются в механике деформируемого твердого тела. Это обусловлено несколькими обстоятельствами. Во-первых, в виде стержней чаще всего изготавливаются образцы, предназначенные для проведения статических, повторно-статических и динамических испытаний конструкционных материалов. Во-вторых, стержни являются элементами многих машин и механизмов. Именно стержни, совершающие продольные колебания, выступают в качестве рабочего органа ультразвуковых технологических машин [20]. В [20] отмечено, что математическая модель, описывающая вязкоупругие свойства таких стержней, в которой затухание задается путем введения комплексного модуля упругости, нуждается в уточнении.

В настоящей статье в качестве уточненной модели вязкоупругого стержня, описывающей продольные колебания ультразвукового диапазона, предложено использовать модель стержня, основанную на реологической теории Максвелла. Проведен анализ дисперсионных свойств продольной волны и ее частотно-зависимого затухания.

1. Математическая модель

Распространение продольной волны в вязкоупругом по модели Максвелла стержне описывается уравнением [21]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{1}{T}\frac{\partial u}{\partial t}\right)=c_0^2\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \tag{1}$$

где $u(x,t)$ – продольное перемещение частиц срединной линии. Из (1) видно, что распространение продольной волны в таком стержне описывается одномерным волновым уравнением, дополненным слагаемым, характеризующим вязкость материала. Известно, что классическое волновое уравнение содержит в качестве коэффициентов модуль Юнга E и плотность ρ материала, отношение которых формирует квадрат скорости распространения продольной волны c_0^2. Рассматриваемое уравнение (1) содержит еще один коэффициент, определяющий время релаксации $T=\eta/E$ (η – коэффициент вязкости материала).

Введем безразмерные переменные

$$U=\frac{u}{u_0},\quad \tau=\frac{t}{t_0},\quad \xi=\frac{x}{x_0}, \tag{2}$$

подставляя которые в уравнение (1), получим:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2}+\frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial\tau}\right)=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2}\right), \quad (3)$$

где $\alpha = Tc_0/x_0$.

Находя решение уравнения (3) в виде бегущей гармонической волны $U = A\exp(i(\Omega\tau - k\xi))$, от исходного дифференциального уравнения в частных производных перейдем к алгебраическому комплексному дисперсионному уравнению, связывающему безразмерную частоту Ω и безразмерное волновое число k,

$$i\Omega\left(-\Omega^2+\frac{1}{\alpha}i\Omega+k^2\right)=0, \quad (4)$$

позволяющему вычислить фазовую и групповую скорости волны, определить закономерности ее распространения и затухания.

Из уравнения (4) следует, что при отсутствии вязкости ($\alpha = 0$) волны в вязкоупругом по модели Максвелла стержне распространяться не могут. Это говорит лишь о том, что не следует пытаться использовать реологическую модель Максвелла для описания волновой динамики классических конструкционных материалов (металлов и их сплавов). Результат перестанет казаться парадоксальным, если представить, что испытуемый материал представляет собой композит, состоящий из блоков (например, металлических шаров), скрепленных некой связующей средой. Нет вязкого связующего материала – нет и сплошной среды (металлические шары раскатились в разные стороны).

При дальнейшем анализе дисперсионного уравнения выделим две задачи: 1) частота считается действительной величиной, а волновое число – комплексной величиной (так принято при решении краевых задач); 2) волновое число считается действительной величиной, а частота – комплексной величиной (так принято при решении задачи Коши). Остановимся на рассмотрении задачи 1.

2. Анализ дисперсионных зависимостей при решении краевых задач

При решении первой задачи, подставляя $k = k_1 + ik_2$ в уравнение (4), получим:

$$-\Omega^2+\frac{1}{\alpha}i\Omega+k_1^2+2ik_1k_2-k_2^2=0. \quad (5)$$

Выделяя действительную и мнимую части комплексного дисперсионного уравнения (5), придем к системе двух алгебраических уравнений, позволяющей определить зависимость частоты от действительной части волнового числа

$$\Omega(k_1)=\frac{2\alpha k_1^2}{\sqrt{1+4\alpha^2 k_1^2}} \quad (6)$$

и частотную зависимость мнимой части волнового числа:

$$k_2^2(\Omega)=-\frac{\Omega^2}{2}+\frac{\Omega^2}{2}\sqrt{1+\frac{1}{\alpha^2\Omega^2}}. \quad (7)$$

Соотношение (6) характеризует дисперсионные свойства продольной вязкоупругой волны и позволяет вычислить ее фазовую скорость

$$v_f = \frac{\Omega(k_1)}{k_1} = \frac{2\alpha k_1}{\sqrt{1+4\alpha^2 k_1^2}} \tag{8}$$

и групповую скорость

$$v_g = \frac{d\Omega(k_1)}{dk_1} = \frac{4\alpha k_1 \left(1+2\alpha^2 k_1^2\right)}{\left(1+4\alpha^2 k_1^2\right)\sqrt{1+4\alpha^2 k_1^2}}. \tag{9}$$

Зависимость (6) изображена на рис. 3 при следующих значениях параметра α: красная линия – для $\alpha = 10^2$ ($x_0 = 10^2 c_0 T$); синяя линия – для $\alpha = 1$ ($x_0 = c_0 T$); зеленая линия для $\alpha = 10^{-2}$ ($x_0 = 10^{-2} c_0 T$).

Зависимости фазовой v_f (красная линия) и групповой v_g (фиолетовая линия) скоростей от действительной части волнового числа представлены на рис. 4 при $\alpha = 1$.

Частотная зависимость квадрата мнимой части волнового числа (7) представлена на рис. 5 при $\alpha = 1$.

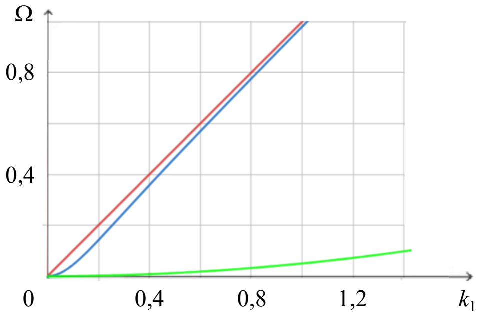

Рис. 3

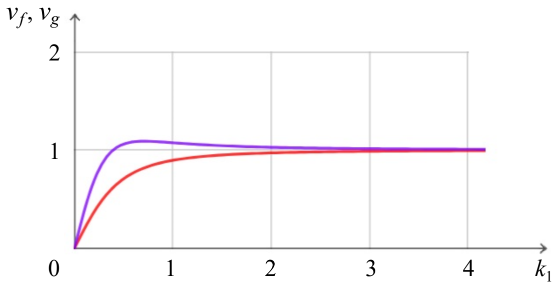

Рис. 4

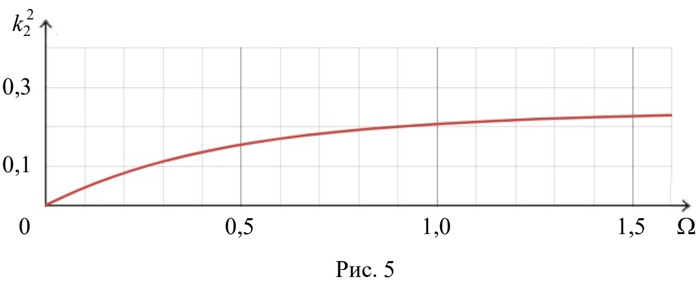

Рис. 5

Заметим, что задача об изучении дисперсионных свойств вязкоупругого стержня, описываемого уравнением (1), при наличии комплексных волновых чисел была сформулирована в [21], но там были оценены только предельные (при частоте, стремящейся к бесконечности) значения фазовой скорости и затухания продольной волны.

Постановке задачи Коши и исследованию ее корректности по Адамару для продольных колебаний вязкоупругого по модели Максвелла стержня (задача 2) посвящена статья [22].

Очевидно, что модель вязкоупругого стержня, описываемая уравнением (1), является частным случаем моделей Максвелла, основанных на нелинейных определяющих соотношениях [17, 18] или включающих в себя дробные производные [19]. Представляет интерес проведение исследований дисперсии и затухания продольных волн, описываемых этими более общими моделями вязкоупругих стержней.

Выводы

Продольная волна, удовлетворяющая условиям первой задачи, обладает особенностями распространения: ее частота возрастает с увеличением действительной части волнового числа (при малой вязкости возрастает медленно, при большой вязкости – быстро); фазовая скорость сначала возрастает с увеличением действительной части волнового числа, а затем выходит на горизонтальную асимптоту (при k_1, стремящемся к бесконечности, v_f стремится к единице); групповая скорость возрастает с увеличением действительной части волнового числа, достигает максимума, превосходящего значение $v_g = 1$, затем убывает, стремясь к горизонтальной асимптоте $v_g = 1$ (при стремлении k_1 к бесконечности). Во всем диапазоне изменения k_1 наблюдается аномальная дисперсия продольной волны (то есть $v_g > v_f$); затухание волны (определяемое мнимой частью волнового числа) сначала увеличивается с ростом частоты, затем выходит на горизонтальную асимптоту и становится частотно-независимым.

Список литературы

1. *Вибрации в технике: Справочник в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем*. Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.

2. Астарита Дж., Марруччи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей.* М.: Мир, 1978. 310 с.

3. Жермен П. *Курс механики сплошных сред*. М.: Высшая школа, 1983. 400 с.

4. Joseph D.D. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids*. New York: Springer, 1990. 758 p.

5. Годунов С.К., Роменский Е.И. *Элементы механики сплошных сред и законы сохранения*. Новосибирск: Научная книга, 1998. 272 с.

6. Palmov V. *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. 312 p.

7. Сагомонян А.Я. *Волны напряжения в сплошных средах*. М.: Ленанд, 2021. 416 с.

8. Пухначев В.В. Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. *Прикладная механика и техническая физика*. 2010. Т. 51. №4. С. 116–126.

9. Шешенин С.В., Чистяков П.В., Закалюкина И.М. Применение модели вязкоупругости Максвелла для резинокордного композита. *Интернет-журнал «Науковедение»*. 2017. Т. 9. №4. С. 1–9.

10. Gerritsma M.I., Phillips T.N. On the characteristics and compatibility equations for the UCM model fluid. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2008. Vol. 88. Iss. 7. P. 523–539. https://doi.org/10.1002/zamm.200700058.

11. Phan Thien N. Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid. *Rheologica Acta*. 1983. Vol. 22. P. 127–130. https://doi.org/10.1007/BF01332366.

12. Cruz D.O.A., Pinho F.T. Analitical solution of steady 2D wall-free extensional flows of UCM fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 223. P. 157–164. https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.06.001.

13. Hayat T., Awais M., Qasim M., Yendi A.A. Effects of mass transfer on the stagnation point of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011. Vol. 54. Iss. 15-16. P. 3777–3782. DOI. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.03.003.

14. Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A. Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium. *Wave Motion*. 2011. Vol. 48. Iss. 8. P. 727–737. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.04.002.

15. Ляпидевский В.Ю., Пухначев В.В. Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. *Труды Математического института имени В.А. Стеклова*. 2013. Т. 281. С. 84–97.

16. Мелешко С.В., Петрова А.Г., Пухначев В.В. Характеристические свойства системы уравнений несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. Т. 58. Вып. 5. С. 44–50. https://doi.org/10.15372/PMTF20170504.

17. Хохлов А.В. Индикаторы применимости и методика идентификации нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла по двойным кривым обратной ползучести материала. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №4. С. 433–450. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-4-433-450.

18. Хохлов А.В. Гибридизация определяющего соотношения линейной вязкоупругости и нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла и анализ сценариев эволюции коэффициента поперечной деформации при ползучести. *Физическая мезомеханика*. 2024. Т. 27. №1. С. 20–48. DOI: 10.55652/1683-805X_2024_27_1_20-48.

19. Шитикова М.В. Обзор вязкоупругих моделей с операторами дробного порядка, используемых в динамических задачах механики твердого тела. *Изв. РАН. МТТ*. 2022. №1. С. 3–40. DOI: 10.31857/s0572329921060118.

20. Асташев В.К., Крупенин В.Л. *Нелинейная динамика ультразвуковых технологических процессов*. М.: Московский государственный университет печати им. Ивана Федорова, 2016. 372 с.

21. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.

22. Корзюк В.И., Рудько Я.В., Колячко В.В. Задача о продольных колебаниях вязкоупругого по модели Максвелла стержня. *Прикладная математика и механика*. 2023. Т. 87. №3. С. 489–498.

References

1. *Vibratsii v tekhnike: Spravochnik v 6 t. T.1. Kolebaniya lineynykh system* [*Vibrations in Technology: A Reference Book in 6. Vols. Vol. 1. Oscillations of Linear Systems*]. Ed. V.V. Bolotin. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1999. 504 p. (In Russian).

2. Astarita G., Marrucci G. *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. London. New York. McGraw-Hill. 1974. 289 p.

3. Germain P. *Cours de Mecanique des Milieux Continus. T. 1. Theorie Genelale*. Paris. Masson et Cie. 1973. 417 p.

4. Joseph D.D. *Fluid Dynamics of Viscoelastic Liquids.* New York. Springer. 1990. 758 p.

5. Godunov S.K., Romenskii, E.I. *Elements of Continuum Mechanics and Conservation Laws*. New York. Springer. 2013. 258 p.

6. Palmov V. *Vibrations of Elasto-Plastic Bodies*. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 1998. 312 p.

7. Sagomonyan A.Ya. *Volny napryazheniya v sploshnykh sredakh* [*Stress Waves in Continuous Media*]. Moscow. Lenand Publ. 2021. 416 c. (In Russian).

8. Pukhnachev V.V. Mathematical model of an incompressible viscoelastic Maxwell medium. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*. 2010. Vol. 51. Iss. 4. P. 546–554. DOI: https://doi.org/10.1007/s10808-010-0071-5.

9. Sheshenin S.V., Chistyakov P.V., Zakalyukina I.M. Primenenie modeli vyazkouprugosti

Maksvella dlya rezinokordnogo kompozita [Application of Maxwell's viscoelasticity model for a rubber-cord composite]. *Internet-zhurnal "Naukovedenie"* [*Internet Journal "Scientific Studies"*]. 2017. Vol. 9. No 4. P. 1–9 (In Russian).

10. Gerritsma M.I., Phillips T.N. On the characteristics and compatibility equations for the UCM model fluid. *Zeitschrift fürAngewandte Mathematik und Mechanik*. 2008. Vol. 88. Iss. 7. P. 523–539. https://doi.org/10.1002/zamm.200700058.

11. Phan Thien N. Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid. *Rheol. Acta*. 1983. Vol. 22. P. 127–130. https://doi.org/10.1007/BF01332366.

12. Cruz D.O.A., Pinho F.T. Analitical solution of steady 2D wall-free extensional flows of UCM fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. 2015. Vol. 223. P. 157–164. https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2015.06.001.

13. Hayat T., Awais M., Qasim M., Yendi A.A. Effects of mass transfer on the stagnation point of an upper-convected Maxwell (UCM) fluid. *Int. J. Heat Mass Transf*. 2011. Vol. 54. Iss. 15-16. P. 3777–3782. DOI. 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.03.003.

14. LiapidevskiiV.Yu., Pukhnachev V.V., Tani A. Nonlinear waves in incompressible viscoelastic Maxwell medium. *Wave Motion*. 2011. Vol. 48. Iss. 8. P. 727–737. https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2011.04.002.

15. Liapidevskii V.Yu., Pukhnachev V.V. Hyperbolic submodels of an incompressible viscoelastic Maxwell medium. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2013. Vol. 281. P. 77–90. https://doi.org/10.1134/S0081543813040081.

16. Meleshko S.V., Petrova A.G., Pukhnachev V.V. Characteristic properties of the system of equations for an incompressible viscoelastic Maxwell medium. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 5. P. 794–800. https://doi.org/10.1134/S0021894417050042.

17. Khokhlov A.V. Indikatory primenimosti i metodika identifikatsii nelineynoy modeli vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella po dvoynym krivym obratnoy polzuchesti materiala [Applicability indicators and identification technique for a nonlinear Maxwell-type elasto-viscoplastic model using repeated creep recovery tests]. *Problemy prochnosti i pastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2021. Vol. 83. Iss. 4. P. 433–450.

18. Khokhlov A.V. Gibridizatsiya opredelyayushchego sootnosheniya lineynoy vyazko-uprugosti i nelineynoy modeli vyazkouprugoplastichnosti tipa Maksvella i analiz stsenariev evolyutsii koeffitsienta poperechnoy deformatsii pri polzuchesti [Hybridization of the constitutive relation of linear viscoelasticity and a nonlinear Maxwell-type viscoelastoplasticity model and analysis of scenarios for the evolution of the transverse strain coefficient under creep]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [*Physical Mesomechanics*]. 2024. T. 27. No 1. P. 20–48 (In Russian).

19. Shitikova M.V. Fractional operator viscoelastic models in dynamic problems of mechanics of solids: a review. *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57. No 1. P. 1–33. DOI: 10.3103/S0025654422010022.

20. Astashev V.K., Krupenin V.L. *Nelineynaya dinamika ultrazvukovykh tekhnologicheskikh protsessov* [*Nonlinear Dynamics of Ultrasonic Technological Processes*]. Moscow. Ivan Fedorov Moscow State University of Printing Arts. 2016. 372 p. (In Russian).

21. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost* [*Waves in Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).

22. Korzyuk V.I., Rudzko J.V.,Kolyachko V.V. Problem of longitudinal vibrations of a Maxwell-type viscoelastic rod. *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58. No 7. P. 2631–2639. DOI:10.3103/S0025654423070129.

LONGITUDINAL WAVE PROPAGATION IN A VISCOELASTIC ROD ACCORDING TO THE MAXWELL MODEL. PART 1. ANALYSIS OF DISPERSION CHARACTERISTICS AND FREQUENCY DEPENDENT DAMPING WHEN SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS[*]

Erofeev V.I.[1,2], Ermakov Ja.D.[2], Kotov V.L.[2]

[1]*Mechanical Engineering Research Institute of Russian Academy of Sciences – Branch of Federal Research Center "Institute of Applied Physics n. a. A.V. Gaponov-Grekhov of the Russian Academy of Sciences" Nizhny Novgorod, Russian Federation*
[2]*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

aroslavermakov935@gmail.com, erof.vi@yandex.ru

Received by the Editor 2024/06/04

The dynamics of a rod, the material of which obeys Maxwell's law of deformation of a medium, is considered. The propagation of a longitudinal wave in such a rod is described by a one-dimensional wave equation supplemented by a term characterizing the viscosity of the material. The solution to the equation is found in the form of a traveling harmonic wave. From the original partial differential equation, a transition is made to an algebraic complex dispersion equation that connects frequency and wave number, allowing one to calculate the phase and group velocities of the wave and determine the patterns of its propagation and attenuation. When analyzing the dispersion equation, two problems are highlighted: 1) frequency is considered a real quantity, and the wave number is considered a complex quantity (as is customary when solving boundary value problems); 2) the wave number is considered a real quantity, and the frequency is considered a complex quantity (as is customary when solving the Cauchy problem). The first task is considered in detail. It has been revealed that a longitudinal wave that satisfies its conditions has the following propagation features: as the real part of the wave number increases, its frequency increases (at low viscosity it increases slowly, at high viscosity it increases quickly), the phase velocity first increases and then reaches a horizontal asymptote, the group velocity increases, reaches a maximum, then decreases, reaching a different horizontal asymptote than the phase velocity. Over the entire range of changes in the real part of the wave number, anomalous dispersion of the longitudinal wave is observed (i.e., the group velocity is greater than the phase velocity); The attenuation of the wave (determined by the imaginary part of the wave number) first increases with increasing frequency, then reaches a horizontal asymptote and becomes frequency-independent.

Keywords: Maxwell's viscoelastic medium, rod, longitudinal wave, dispersion, attenuation.

[*] The research was supported by the Russian Scientific Foundation (project №20-19-00613).