УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-498-504

О СООТНОШЕНИИ СКОРОСТЕЙ СДВИГОВЫХ ВОЛН И ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ МЕХАНИКИ ОБОБЩЕННЫХ КОНТИНУУМОВ*

Антонов А.М.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

artem.antonov@autorambler.ru

Поступила в редакцию 09.08.2024

Изучается вопрос о том, как две известные модели обобщенных континуумов описывают поверхностную волну Рэлея, распространяющуюся вдоль свободной от напряжений поверхности упругого полупространства. В качестве тестируемых выбраны модели градиентно-упругой среды и упрощенной (редуцированной) среды Коссера. Получены дисперсионные уравнения, анализ которых показал, что обе модели свидетельствуют о том, что дисперсионные свойства поверхностной волны Рэлея в плоскости волновое число – частота описываются двумя кривыми, нижняя из которых исходит из начала координат, начало второй смещено вверх по оси частот. Поверхностная волна является двухмодовой и каждая ее мода обладает дисперсией, так как скорости обеих мод зависят от частоты. Согласно обеим моделям, объемная сдвиговая волна обладает дисперсией. Для градиентно-упругой среды при возрастании частоты скорость каждой моды поверхностной волны увеличивается и, если скорость нижней моды выходит снизу на горизонтальную асимптоту, скорость верхней моды сначала достигает максимума и только затем выходит сверху на эту горизонтальную асимптоту. При любом ненулевом значении волнового числа (или частоты) фазовая скорость сдвиговой волны больше скорости сдвиговой волны в классической среде. Скорость поверхностной волны не может быть больше фазовой скорости сдвиговой волны, а их равенство выполняется лишь в определенном частотном диапазоне. В редуцированной среде Коссера скорость верхней моды поверхностной волны с ростом частоты увеличивается и на больших частотах она возрастает неограниченно. Скорость нижней моды поверхностной волны уменьшается с ростом частоты, но во всем частотном диапазоне она остается больше фазовой скорости волны сдвига.

Ключевые слова: градиентно-упругое полупространство, редуцированная модель Коссера, поверхностная волна, сдвиговая волна, дисперсия, фазовая скорость, частота.

* Выполнено при финансовой поддержке Министерством науки и высшего образования РФ (проект № FSWR-2023-0036).

Введение

Механика однородного изотропного деформируемого твердого тела исключает возможность распространения поверхностной волны быстрее, чем распространяется сдвиговая волна [1–6]. Однако тот факт, что скорость волны Рэлея может быть больше скорости волны сдвига, описан и проанализирован в статье [7], где рассматривается слоистый материал, содержащий вблизи свободной поверхности слои, в которых скорость сдвиговой волны значительно выше, чем в слоях, более удаленных от поверхности.

В механике деформируемого твердого тела наряду с моделью классического континуума также достаточно широко применяются модели обобщенных континуумов [8–18].

Цель публикуемой статьи заключается в определении соотношения скоростей сдвиговых волн и поверхностных волн Рэлея для материалов, описываемых уравнениями механики обобщенных (неклассических) континуумов, к числу наиболее известных из которых принадлежат микрополярная среда (континуум Коссера [19, 20], его модификации [21–23]) и градиентно-упругая среда [24–26].

Дисперсионные свойства поверхностных волн в обобщенных континуумах

В качестве обобщенных континуумов рассматриваются градиентно-упругая среда и редуцированная среда Коссера. Если через $\mathbf{u}$ обозначить вектор перемещения, через λ и μ – упругие постоянные Ламе, через ρ – плотность материала, то получим следующие уравнения динамики:

– для градиентно-упругой среды

$$\rho\ddot{\mathbf{u}} - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} - \mu\Delta\mathbf{u} + 4\mu L^2\Delta(\Delta\mathbf{u} + \tilde{\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}) = 0, \tag{1}$$

где L – константа, характеризующая микроструктуру среды и имеющая размерность длины, $\tilde{\nu}$ – безразмерная константа;

– для редуцированной среды Коссера

$$(\lambda+2\mu)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u}) - \mu\nabla*(\nabla*\mathbf{u}) - J\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla*(\nabla*\mathbf{u}) = \rho\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}, \tag{2}$$

где J – константа, характеризующая инерционные свойства макрообъема.

Путем введения скалярного φ и векторного $\boldsymbol{\psi}$ потенциалов отыскиваются решения уравнений (1) и (2) в виде:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla*\boldsymbol{\psi}. \tag{3}$$

Обратим внимание, что для плоской задачи у векторного потенциала будет отличной от нуля только одна компонента, которую обозначим через ψ. Тогда вместо каждого из уравнений (1) и (2) получаем по два уравнения, а именно:

– для градиентно-упругой среды

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta(1-L^2\Delta)\psi - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0; \tag{4}$$

– для редуцированной среды Коссера

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta\psi + G\Delta\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{5}$$

где $G = J/\mu$, c_1 – скорость продольной волны, c_2 – скорость волны сдвига.

Решение уравнений (4) и (5) отыскиваются в виде гармонических волн, распространяющихся в направлении оси x, причем из полученных решений следует выбирать только те, которым соответствует уменьшение амплитуд волны с глубиной y. В результате имеем:

– для градиентно-упругой среды

$$\begin{gathered} \varphi = A\exp\big(\varsigma y + i(\omega t - kx)\big), \\ \psi = B_1\exp\big(\eta_1 y + i(\omega t - kx)\big) + B_2\exp\big(\eta_2 y + i(\omega t - kx)\big), \end{gathered} \tag{6}$$

– для редуцированной среды Коссера

$$\varphi = A\exp\big(\varsigma y + i(\omega t - kx)\big), \quad \psi = B\exp\big(\eta y + i(\omega t - kx)\big). \tag{7}$$

Подставляя вектор перемещений (3) в граничные условия, которые выражаются отсутствием напряжений на границе полупространства $y = 0$ ($\sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{yx} = 0$, $\mu_y = 0$), получим систему из трех уравнений, которая сводится к дисперсионному уравнению, когда ее определитель обращается в нуль. Таким образом, дисперсионное уравнение для градиентно-упругой среды можно записать в виде:

$$\begin{gathered} 16(1-\beta\varsigma)(1+\alpha-\varsigma)\left[1+2\alpha+2\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)}\right] = (2-\varsigma)^2\left[(1-3\alpha^2)^2 + \right. \\ + \alpha(3-\alpha)(1+\alpha-\varsigma) + \left(1-\alpha^2\right)(1+\alpha-\varsigma)^2 + \alpha(1+\alpha-\varsigma)^3 + 2\left(1-3\alpha^2\right)\times \\ \times(3-\alpha)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} + 2(1-3\alpha^2)(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma) - \\ - 2\left(1-3\alpha^2\right)(1+\alpha-\varsigma)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} + 2(3-\alpha)(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)\sqrt{\alpha(1+\alpha-\varsigma)} - \\ \left. - 2(3-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)^2\alpha - 2(1-\alpha)(1+\alpha-\varsigma)^2\sqrt{\alpha(1+\alpha)-\varsigma}\right]. \end{gathered} \tag{8}$$

Здесь

$$\varsigma = c_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2c_2^2}, \quad \alpha = L^2k^2, \quad \beta = \frac{1-2\nu}{2-2\nu},$$

c_R – скорость волны Рэлея, ν – коэффициент Пуассона.

При $L = 0$ уравнение (8) сводится к дисперсионному уравнению поверхностной волны Рэлея в классическом случае [5]. Анализ уравнения (8) показал, что для градиентно-упругой среды дисперсионные свойства поверхностной волны Рэлея в плоскости волновое число – частота описываются двумя кривыми, одна из которых (нижняя) исходит из начала координат, начало второй смещено вверх по оси частот. Поверхностная волна является в этом случае двухмодовой и каждая ее мода обладает дисперсией, так как скорости обеих мод зависят от частоты. При возрастании частоты скорость каждой моды поверхностной волны увеличивается. Следует, однако, заметить, что если скорость нижней моды при $\omega \to \infty$ выходит снизу на горизонтальную асимптоту $c_R = \sqrt{2}c_2$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, то скорость верхней моды сначала достигает максимума и только затем выходит сверху на указанную горизонтальную асимптоту. Из второго уравнения системы (4) следует, что и объемная сдвиговая волна в градиентно-упругой среде обладает дисперсией. При любом ненулевом значении волнового числа (или частоты) ее фазовая скорость $V_ф > c_2$, а c_R не может быть больше фазовой скорости сдвиговой волны (равенство $c_R = V_ф$ выполняется лишь в определенном частотном диапазоне).

Аналогично получим, учитывая отсутствие напряжений на границе $y = 0$, дисперсионное уравнение для редуцированной среды Коссера:

$$\eta\left[\eta^3 - 8\eta^2 + \left(24 - 16\frac{\varsigma}{1 - J\omega^2/\mu}\right)\eta - 16\left(2 - \frac{\varsigma}{1 - J\omega^2/\mu} - \varsigma\right)\right] = 0, \qquad (9)$$

где $\varsigma = c_2^2/c_1^2$, $\eta = c_R^2/c_2^2$.

Анализ уравнения (9) показал, что и в этой модели поверхностная волна Рэлея является двухмодовой. Каждая ее мода обладает дисперсией. Анализ второго уравнения системы (5) показывает, что и объемная сдвиговая волна в редуцированной среде Коссера обладает дисперсией. Скорость верхней моды поверхностной волны с ростом частоты увеличивается и на больших частотах возрастает неограниченно. Скорость нижней моды поверхностной волны уменьшается с ростом частоты, но во всем частотном диапазоне она остается больше фазовой скорости волны сдвига.

Заключение

Исследования поверхностных волн Рэлея, проведенные с привлечением моделей и методов механики обобщенных континуумов, позволяют описать частотную зависимость их фазовых скоростей, а также вскрыть иные, неклассические, соотношения между скоростями поверхностных и объемных упругих волн.

Список литературы

1. Ермолов И.Н., Ланге Ю.В. *Неразрушающий контроль. Справочник в 7 т. Т. 3: Ультразвуковой контроль*. Под общ. ред. В.В. Клюева. М.: Машиностроение, 2004. 864 с.

2. Никитина Н.Е. *Акустоупругость. Опыт практического применения*. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2005. 208 с.

3. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. *Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации.* М.: Наука, 2009. 278 с.

4. ГОСТ Р 56664-2015. *Контроль неразрушающий. Определение напряженного состояния материала изделий машиностроения методом акустоупругости. Общие требования*. Утвержден и введен в действие Приказом Федерального агентства по техническому регулированию и метрологии от 22 октября 2015 г. № 1615-ст. М.: Стандартинформ, 2016. 15 с.

5. Викторов И.А. *Звуковые поверхностные волны в твердых телах*. М.: Наука, 1981. 287 с.

6. Голямина И.П. *Ультразвук. Маленькая энциклопедия*. М.: Советская энциклопедия, 1979. 400 с.

7. Жэн Б.-С., Лу Л.-Ю. Волны Рэлея и обнаружение низкоскоростных слоев в слоистом полупространстве. *Акустический журнал*. 2003. Т. 49. №5. С. 613–625.

8. *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*. Eds. H. Altenbach, V.A. Eremeyev. Wien: Springer-Verlag, 2013. 404 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.

9. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave dynamics of generalized continua. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 24. Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2024. 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-37267-4.

10. Generalized continua as models for classical and advanced materials. Eds. H. Altenbach, S. Forest. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 42. Cham, Switzerland: Springer-Verlag, 2016. 458 p. DOI: 10.1007/978-3-319-31721-2.

11. Generalized models and non-classical approaches in complex materials 1. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch. In: *Advanced Structured Materials*.

Vol. 89. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. 760 p. DOI:10.1007/978-3-319-72440-9

12. Generalized models and non-classical approaches in complex materials 2. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 90. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2018. 328 p. DOI: 10.1007/978-3-319-77504-3.

13. Dynamical processes in generalized continua and structures. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 103. Eds. H. Altenbach, A. Belyaev, V.A. Eremeyev, A. Krivtsov, A.V. Porubov. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2019. 526 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11665-1.

14. Higher gradient materials and related generalized continua. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 120. Eds. H. Altenbach, W. Müller, B. Abali. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 231 p. DOI: 10.1007/978-3-030-30406-5.

15. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Structural modeling of metamaterials. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 144. Cham, Switzerland: Springer, 2021. 208 p. DOI: 10.1007/978-3-030-60330-4.

16. Sixty shades of generalized continua. In: *Advanced Structured Mathematials*. Vol. 170. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov. Cham, Switzerland: Springer, 2023. 746 p. DOI: 10.1007/978-3-031-26186-2.

17. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. № 4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

18. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. An algebraic decomposition of hemitropic pseudotensors in N dimensions and applications to micropolar continuum theories. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №2. С. 153–163. DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-2-153-163.

19. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. Paris: A. Hermann et Fils, 1909. 226 p. DOI:10.1038/081067a0.

20. Vardoulakis I. Cosserat continuum mechanics. In: *Lecture Notes in Applied and Computatonal Mechanics*. Vol. 87. Cham, Switzerland: Springer, 2019. 180 p. DOI: 10.1007/978-3-319-95156-0.

21. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Warszawa–Oxford: Pergamon Press, 1986. 383 p.

22. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials. *Physical Review Letters*. 1984. Vol. 52. No 10. P. 831–834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.52.831.

23. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2016. Vol. 21. No 1. P. 73–93. DOI: 10.1177/1081286515577042.

24. Le Roux J. Etude geometrique de la torsion et de la flexion dans la deformations infinitesimaleg d'nn milien continu. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1911. Vol. 28. P. 523–579. DOI: 10.24033/asens.643.

25. Le Roux J. Recherchesg sur la géométrie beg déformatios finies. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1913. Vol. 30. P. 193–245. DOI: 10.24033/asens.659.

26. Jaramillo T.J. A generalization of the energy function of elasticity theory. *Dissertation*. Departament of Mathematics. University of Chicago. 1929. 154 p.

References

1. Ermolov I.N., Lange Yu.V. *Nerazrushayushchiy kontrol. Spravochnik v 7 t. T. 3: Ultrazvukovoy kontrol* [*Non-Destructive Testing*: *Handbook in 7 Vols*]. Ed. V.V. Klyuev. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2004. 864 p. (In Russian).

2. Nikitina N.E. *Akustouprugost. Opyt prakticheskogo primeneniya* [*Acoustoelasticity. Practical Experience*]. Nizhny Novgorod. TALAM Publ. 2005. 208 p. (In Russian).

3. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* [*Acoustic Monitoring of Equipment During Manufacturing and Operation*]. Moscow. Nauka Publ. 2009. 278 p. (In Russian).

4. GOST R 56664-2015. *Kontrol nerazrushayushchiy. Opredelenie napryazhennogo sostoyaniya materiala izdeliy mashinostroeniya metodom akustouprugosti. Obshchie trebovaniya*. [*Non-Destructive Testing. Determination of the Stress State of the Material of Mechanical Engineering Products by the AcoustoelasticityMethod. General Requirements*]. Utverzhden i vveden v deystvie Prikazom Federalnogo agentstva po tekhnicheskomu regulirovaniyu i metrologii ot 22 oktyabrya 2015 g. №1615-st [Approved and Put into Effect by Order of the Federal Agency for Technical Regulation and Metrology Dated 22 Oct. 2015. No. 1615-st.]. Moscow. Standartinform Publ. 2016. 15 p. (In Russian).

5. Viktorov I.A. *Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdykh telakh* [*Sound Surface Waves in Solids*]. Moscow. Nauka Publ. 1981. 287 p. (In Russian).

6. Golyamina I.P. *Ultrazvuk. Malenkaya entsiklopediya* [*Ultrasound. A Little Encyclopedia*]. Moscow. Sovetskaya entsiklopediya Publ. 1979. 400 p. (In Russian).

7. Zhang B., Lu L. Rayleigh wave and detection of low-velocity layers in a stratified half-space. *Acoustical Physics.* 2003. Vol. 49. Iss. 5. P. 516–528.

8. *Generalized Continua – from the Theory to Engineering Applications*. Eds. H. Altenbach., V.A. Eremeyev. Wien. Springer-Verlag. 2013. 404 p. DOI: 10.1007/978-3-7091-1371-4.

9. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. Wave dynamics of generalized continua. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 24. Berlin. Heidelberg. Springer-Verlag. 2024. 274 p. DOI: 10.1007/978-3-642-37267-4.

10. Generalized continua as models for classical and advanced materials. Eds. H. Altenbach, S. Forest. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 42. Cham, Switzerland. Springer-Verlag. 2016. 458 p. DOI: 10.1007/978-3-319-31721-2.

11. Generalized models and non-classical approaches in complex materials 1. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 89. Cham, Switzerland. Springer International Publishing. 2018. 760 p. DOI:10.1007/978-3-319-72440-9

12. Generalized models and non-classical approaches in complex materials 2. Eds. H. Altenbach, J. Pouget, M. Rousseau, B. Collet, T. Michelitsch. In: *Advanced Structured Materials.* Vol. 90. Cham, Switzerland. Springer International Publishing. 2018. 328 p. DOI: 10.1007/978-3-319-77504-3.

13. Dynamical processes in generalized continua and structures. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 103. Eds. H. Altenbach, A. Belyaev, V.A. Eremeyev, A. Krivtsov, A.V. Porubov. Cham, Switzerland. Springer International Publishing. 2019. 526 p. DOI: 10.1007/978-3-030-11665-1.

14. Higher gradient materials and related generalized continua. Eds. H. Altenbach, W. Müller, B. Abali. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 120. Cham, Switzerland: Springer. 2019. 231 p. DOI: 10.1007/978-3-030-30406-5.

15. Erofeev V.I., Pavlov I.S. Structural modeling of metamaterials. In: *Advanced Structured Materials*. Vol. 144. Cham, Switzerland. Springer. 2021. 208 p. DOI: 10.1007/978-3-030-60330-4.

16. Sixty Shades of generalized continua. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov. In: *Advanced Structured Matherials*. Vol. 170. Cham, Switzerland. Springer. 2023. 746 p. DOI: 10.1007/978-3-031-26186-2.

17. Radaev Yu.N., Murashkin E.V. Psevdotenzornaya formulirovka mekhaniki gemitropnikh mikropolyarnikh srud [Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2020. Vol. 82. No 4. P. 399–412. (In Russian).

18. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. An algebraic decomposition of hemitropic pseudotensors in *N* dimensions and applications to micropolar continuum theories. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2023. Vol. 85. No 2. P. 153–163. DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-2-153-163.

19. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps Déformables*. Paris. A. Hermann et Fils. 1909. 226 p. DOI:10.1038/081067a0.

20. Vardoulakis I. Cosserat continuum mechanics. In: *Lecture Notes in Applied and Computatonal Mechanics*. Vol. 87. Cham, Switzerland. Springer. 2019. 180 p. DOI: 10.1007/978-3-319-95156-0.

21. Nowacki W. *Theory of Asymmetric Elasticity*. Warszawa. Oxford. Pergamon Press. 1986. 383 p.

22. Schwartz L.M., Jonson D.L., Feng S. Vibrational models in granular materials. *Phys. Rev. Lett*. 1984. Vol. 52. No 10. P. 831–834. DOI: 10.1103/PhysRevLett.52.831.

23. Grekova E.F. Plane waves in the linear elastic reduced Cosserat medium with a finite axially symmetric coupling between volumetric and rotational strains. *Math. Mech. Solids*. 2016. Vol. 21. No 1. P. 73–93. DOI: 10.1177/1081286515577042.

24. Le Roux J. Etude geometrique de la torsion et de la flexion dans la deformations infinitesimaleg d'nn milien continu. *Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure*. 1911. Vol. 28. P. 523–579. DOI: 10.24033/asens.643.

25. Le Roux J. Recherchesg sur la géométrie beg déformatios finies. *Annales Scientifiques de l' École Normale Supérieure*. 1913. Vol. 30. P. 193–245. DOI: 10.24033/asens.659.

26. Jaramillo T.J. A generalization of the energy function of elasticity theory. *Dissertation*. Departament of Mathematics. University of Chicago. 1929. 154 p.

ON THE RELATIONSHIP OF THE SPEED OF SHEAR WAVES AND RAYLEIGH SURFACE WAVES FOR MATERIALS DESCRIBED BY THE EQUATIONS OF GENERALIZED CONTINUUM MECHANICS*

Antonov A.M.

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

artem.antonov@autorambler.ru

Received by the Editor 2024/08/09

The question of how two known models of generalized continua describe a Rayleigh surface wave propagating along a stress-free surface of an elastic half-space is studied. The models of a gradient-elastic medium and a simplified (reduced) Cosserat medium are selected as the tested ones. Dispersion equations are obtained. The analysis of which showed that both models state that the dispersion properties of a Rayleigh surface wave in the wave number–frequency plane are described by two curves, one of which (the lower one) comes from the origin of coordinates, the origin of the second is shifted upward along the frequency axis.

The surface wave is two-mode and each of its modes has dispersion, since the velocities of both modes depend on the frequency. Both models also state that the bulk shear wave has dispersion. For a gradient-elastic medium, as the frequency increases, the velocity of each mode of the surface wave increases, and if the velocity of the lower mode reaches a horizontal asymptote from below, then the velocity of the upper mode first reaches a maximum and only then reaches this horizontal asymptote from above. For any non-zero value of the wave number (or frequency), the phase velocity of the shear wave is greater than the velocity of the shear wave in a classical medium. The velocity of the surface wave cannot be greater than the phase velocity of the shear wave, and their equality is fulfilled only in a certain frequency range. In a reduced Cosserat medium, the velocity of the upper mode of the surface wave is improbably high, at high frequencies it increases indefinitely. The velocity of the lower mode of the surface wave decreases with increasing frequency, but in the entire frequency range it remains greater than the phase velocity of the shear wave.

Keywords: gradient-elastic semi-space, reduced Cosserat model, surface wave, shear wave dispersion, phase velocity, frequency.

* Completed with financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (project No FSWR-2023-0036).