

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-471-483

**УТОЧНЕННАЯ ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ,
ЗАКРЕПЛЕННОГО НА ДВУХСТОРОННЕМ ОПОРНОМ
ЭЛЕМЕНТЕ ЧЕРЕЗ УПРУГИЕ ПРОСЛОЙКИ.
1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ***

© 2024 г.

Паймушин В.Н.¹, Шишкин В.М.²

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vpajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.09.2024

При исследовании процессов деформирования плоских стержней с учетом деформации закрепленных участков требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния и применяемых для их описания математических моделей. Такая трансформация имеет место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному). Построена уточненная трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, состоящего по длине из закрепленного и незакрепленного участков. Закрепленный участок конечной длины считается соединенным по двум лицевым поверхностям с абсолютно жестким и неподвижным опорным элементом через упругие трансверсально-мягкие прослойки. Для представления перемещений закрепленного и незакрепленного участков стержня, а также упругих прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом их поперечного обжатия, подчиненные условиям непрерывности перемещений в точках соединения прослоек с закрепленным участком стержня и неподвижности точек контакта прослоек с опорным элементом. На основе этой сдвиговой модели получены в геометрически линейном приближении компоненты деформированного состояния и в физически линейно-упругом приближении соответствующие компоненты напряжений, а также вариации потенциальной энергии деформации и работы инерционных сил для закрепленного и незакрепленного участков стержня. Сформулированы условия кинематического сопряжения отмеченных участков стержня. При учете этих условий, исходя из вариационного принципа Даламбера – Лагранжа, получены для введенных в рассмотрение участков соответствующие уравнения движения и граничные условия к ним, а также силовые условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня.

*Выполнено при финансовой поддержке, выделяемой Казанскому национальному исследовательскому техническому университету им. А.Н. Туполева по государственному заданию в сфере научной деятельности (проект №FZSU-2024-0010, раздел 1) и за счет средств РФФ (проект №23-19-00021, раздел 2).

Ключевые слова: колебания, стержень-полоса, сдвиговая модель С.П. Тимошенко, незакрепленный и закрепленный участки, поперечное обжатие.

Введение

Для исследования процессов деформирования тонкостенных элементов конструкций (в том числе и плоских стержней) при различных вариантах закрепления и нагружения возможна пространственная постановка соответствующих задач и построение их численных решений на основе современных коммерческих пакетов прикладных программ [1, 2], что является желательным, но малоэффективным при малой относительной толщине элементов. В связи с этим значительное внимание в научной литературе уделяется проблемам редукции трехмерных уравнений механики деформирования к одномерным и двумерным уравнениям теории стержней, пластин и оболочек. Для тонкостенных элементов конструкций из композитных материалов такие уравнения построены в развитие классической теории [3, 4] и с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Научная литература, посвященная указанным проблемам, весьма обширна. Из нее, в частности, можно выделить публикации по построению высокоточных геометрически линейных и нелинейных моделей деформирования тонкостенных элементов конструкций с учетом поперечных сдвигов и поперечного обжатия, а также по разработке на их основе тех или иных аналитических и численных методов решения соответствующих статических и динамических задач [5–13].

Однако необходимо отметить, что во всех публикациях по разработке уточненных вариантов теории высокого порядка для тонкостенных элементов конструкций практически не уделяется должного внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединения с другими элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах. Так, например, при постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на жестких опорных элементах конечных размеров обычно заменяют условиями шарнирного опирания или жесткого защемления (см., например, [14, 15]), что, безусловно, вносит погрешность в решения таких задач за счет неучета податливости (деформативности) закрепленных частей отмеченных элементов, а в случае вибрационного нагружения может качественно менять напряженно-деформированное состояние (НДС) конструкции.

Следует заметить, что расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих публикациях (например, [16–19]).

В статье [20] отмечено, что при исследовании процессов деформирования плоских стержней с учетом податливости закрепленных участков требуется введение понятия трансформации параметров НДС и применяемых для их описания математических моделей. Такая трансформация имеет место при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному).

Настоящая статья является дальнейшим развитием статей [21, 22] в направлении применения трансформационных моделей динамического деформирования к исследо-

ванию НДС плоских стержней, имеющих двухсторонне закрепленные участки конечной длины.

1. Уточненная трансформационная модель деформирования закрепленного участка первого порядка точности

Рассмотрим стержень-полосу 0 безразмерной единичной ширины, закрепленный на конечной длине l в абсолютно жестком опорном элементе 3 через упругие прослойки 1 и 2 (рис. 1). Материал стержня считается ортотропным с модулями упругости E_1, E_3, G_{13} при деформировании его соответственно в направлениях осей Ox, Oz и сдвиге в плоскости Oxz . Прослойки считаются трансверсально-мягкими с модулями упругости E_3^0 и G_{13}^0 при деформировании их в поперечном направлении и поперечном сдвиге. Введя в рассмотрение декартовы системы координат $Oxz, O_1xz_{(1)}, O_2xz_{(2)}$ и обозначив через h и t соответственно толщины стержня и прослоек, будем считать, что их деформирование в точках поверхностей $z = \pm h/2, z_{(1)} = t/2, z_{(2)} = -t/2$ происходит без взаимного проскальзывания.

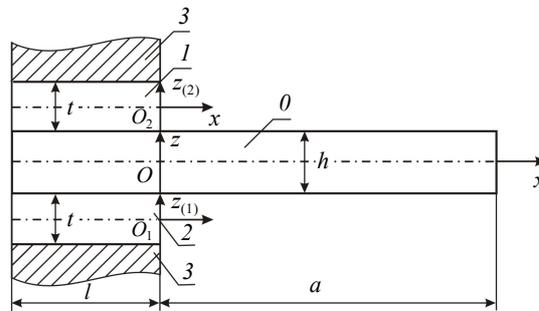


Рис.1. Схема закрепления стержня-полосы в опорном элементе через упругие прослойки

Введение в рассмотрение прослоек в исследуемой механической системе обусловлено, во-первых, их наличием в реальных конструкциях [23]: например, в изделиях конструкционной оптики летательных аппаратов (фонари самолетов, иллюминаторы и любые окна и двери из стекла в зданиях, которые с элементами жесткого каркаса всегда соединяются через эластичные герметизирующие прослойки). Во-вторых, без введения в расчетную схему прослоек построение простейшей математической модели деформирования конструкции в целом с использованием для стержня-полосы в пределах участка его закрепления (см рис. 1) простейших известных моделей деформирования (Кирхгофа – Лява, типа С.П. Тимошенко без учета поперечного обжатия и др.) вообще невозможно.

Еще одно приложение исследуемой механической системы, показанной на рис. 1, может состоять в ее использовании для теоретического обоснования, постановки и решения задач циклического деформирования двухсторонне закрепленных через упругие прокладки композитных пластин при их усталостных испытаниях на консольный изгиб [24, 25].

В статье [22] для представления перемещений закрепленного участка стержня и прослоек использовались простейшие приближения, основанные на сдвиговой модели С.П. Тимошенко. С целью уточнения модели деформирования участка закрепления стержня-полосы для перемещений $U^{(0)}, W^{(0)}$ и $U^{(k)}, W^{(k)}$ ($k = 1, 2$) произвольных точек поперечных сечений стержня и прослоек в направлениях осей Ox, Oz примем аппроксимации

$$U^{(0)} = u^{(0)} + z\gamma^{(0)}, \quad W^{(0)} = w^{(0)} + z\varphi^{(0)}, \quad -h/2 \leq z \leq h/2, \quad (1)$$

$$U^{(k)} = u^{(k)} + z_{(k)}\gamma^{(k)}, \quad W^{(k)} = w^{(k)} + z_{(k)}\varphi^{(k)}, \quad k = 1, 2, \quad -t/2 \leq z_{(k)} \leq t/2, \quad (2)$$

где $u^{(0)}, w^{(0)}, \gamma^{(0)}, \varphi^{(0)}$ – соответственно продольные и поперечные перемещения точек, расположенных на оси Ox закрепленного участка стержня, а также углы поворота поперечных сечений и функция, учитывающая поперечное обжатие указанного участка; $u^{(k)}, w^{(k)}, \gamma^{(k)}, \varphi^{(k)}, k = 1, 2$, – те же величины для прослоек.

Подчинив перемещения $U^{(0)}, W^{(0)}, U^{(k)}, W^{(k)}$ кинематическим условиям сопряжения стержня с прослойками, записываемым в виде

$$U^{(0)}(x, z = -h/2) = U^{(1)}(x, z_{(1)} = t/2), \quad U^{(0)}(x, z = h/2) = U^{(2)}(x, z_{(2)} = -t/2),$$

$$W^{(0)}(x, z = -h/2) = W^{(1)}(x, z_{(1)} = t/2), \quad W^{(0)}(x, z = h/2) = W^{(2)}(x, z_{(2)} = -t/2),$$

и считая

$$U^{(1)}(x, z_{(1)} = -t/2) = 0, \quad U^{(2)}(x, z_{(2)} = t/2) = 0,$$

$$W^{(1)}(x, z_{(1)} = -t/2) = 0, \quad W^{(2)}(x, z_{(2)} = t/2) = 0,$$

получаем зависимости

$$u^{(1)} = \frac{1}{2} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad u^{(2)} = \frac{1}{2} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right),$$

$$w^{(1)} = \frac{1}{2} \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \quad w^{(2)} = \frac{1}{2} \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right),$$

$$\gamma^{(1)} = 2 \frac{u^{(1)}}{t} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad \gamma^{(2)} = -2 \frac{u^{(2)}}{t} = -\frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right),$$

$$\varphi^{(1)} = 2 \frac{w^{(1)}}{t} = \frac{1}{t} \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \quad \varphi^{(2)} = -2 \frac{w^{(2)}}{t} = -\frac{1}{t} \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right).$$

При их подстановке в (2) следуют преобразованные аппроксимации

$$U^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t} \right) \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad U^{(2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t} \right) \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right), \quad (3)$$

$$W^{(1)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t} \right) \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \quad W^{(2)} = \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t} \right) \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right).$$

Аппроксимациям (1), (3) в геометрически линейном приближении соответствуют ненулевые компоненты деформаций на закрепленном участке стержня (нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате x)

$$\varepsilon_x^{(0)} = \frac{\partial U^{(0)}}{\partial x} = u_{,x}^{(0)} + z\gamma_{,x}^{(0)}, \quad \varepsilon_z^{(0)} = \frac{\partial W^{(0)}}{\partial z} = \varphi^{(0)}, \quad (4)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \frac{\partial U^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial W^{(0)}}{\partial x} = \gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)} + z\varphi_{,x}^{(0)},$$

а также в прослойках 1, 2

$$\begin{aligned}
\varepsilon_z^{(1)} &= \frac{\partial W^{(1)}}{\partial z_{(1)}} = \frac{1}{t} \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), & \varepsilon_z^{(2)} &= \frac{\partial W^{(2)}}{\partial z_{(2)}} = -\frac{1}{t} \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \\
\gamma_{xz}^{(1)} &= \frac{\partial U^{(1)}}{\partial z_{(1)}} + \frac{\partial W^{(1)}}{\partial x} = \frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t} \right) \left(w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right), \\
\gamma_{xz}^{(2)} &= \frac{\partial U^{(2)}}{\partial z_{(2)}} + \frac{\partial W^{(2)}}{\partial x} = -\frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t} \right) \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Зависимостям (4) и (5) в физически линейно-упругом приближении соответствуют ненулевые компоненты напряжений:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^{(0)} &= E_1^* (\varepsilon_x^{(0)} + \nu_{31} \varepsilon_z^{(0)}) = E_1^* (u_{,x}^{(0)} + z \gamma_{,x}^{(0)} + \nu_{31} \varphi^{(0)}), \\
\sigma_z^{(0)} &= E_3^* (\varepsilon_z^{(0)} + \nu_{13} \varepsilon_x^{(0)}) = E_3^* [\varphi^{(0)} + \nu_{13} (u_{,x}^{(0)} + z \gamma_{,x}^{(0)})], \\
\sigma_{xz}^{(0)} &= G_{13} \gamma_{xz}^{(0)} = G_{13} (\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)} + z \varphi_{,x}^{(0)}), \\
\sigma_z^{(1)} &= E_3^0 \varepsilon_z^{(1)} = \frac{E_3^0}{t} \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), & \sigma_z^{(2)} &= E_3^0 \varepsilon_z^{(2)} = -\frac{E_3^0}{t} \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \\
\sigma_{xz}^{(1)} &= G_{13}^0 \gamma_{xz}^{(1)} = G_{13}^0 \left[\frac{1}{t} \left(u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{z_{(1)}}{t} \right) \left(w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right) \right], \\
\sigma_{xz}^{(2)} &= G_{13}^0 \gamma_{xz}^{(2)} = G_{13}^0 \left[-\frac{1}{t} \left(u^{(0)} + \frac{h}{2} \gamma^{(0)} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{z_{(2)}}{t} \right) \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right) \right],
\end{aligned} \tag{6}$$

где $E_1^* = E_1 / (1 - \nu_{13} \nu_{31})$, $E_3^* = E_3 / (1 - \nu_{13} \nu_{31})$; ν_{13} , ν_{31} – коэффициенты Пуассона материала стержня ($E_1 \nu_{31} = E_3 \nu_{13}$).

Имея зависимости (6) и (7), введем в рассмотрение для стержня и прослоек приведенные к их срединным поверхностям $z = 0$, $z_{(1)} = 0$, $z_{(2)} = 0$ соответствующие усилия и моменты:

– для стержня

$$\begin{aligned}
T_x^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} dz = B_{11} (u_{,x}^{(0)} + \nu_{31} \varphi^{(0)}), & T_z^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_z^{(0)} dz = B_{33} (\varphi^{(0)} + \nu_{13} u_{,x}^{(0)}), \\
T_{xz}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^{(0)} dz = B_{13} (\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)}), & M_x^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^{(0)} z dz = D_{11} \gamma_{,x}^{(0)}, \\
M_{xz}^{(0)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz}^{(0)} z dz = D_{13} \varphi_{,x}^{(0)},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$B_{11} = E_1^* h, \quad B_{33} = E_3^* h, \quad D_{11} = B_{11} h^2 / 12, \quad B_{13} = G_{13} h, \quad D_{13} = B_{13} h^2 / 12; \tag{9}$$

– для прослоек

$$\begin{aligned}
T_z^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z^{(1)} dz_{(1)} = E_3^0 \left(w^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), & T_z^{(2)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_z^{(2)} dz_{(2)} = -E_3^0 \left(w^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi^{(0)} \right), \\
T_{xz}^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(1)} dz_{(1)} = G_{13}^0 \left[u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} + \frac{t}{2} \left(w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{xz}^{(2)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(2)} dz_{(2)} = G_{13}^0 \left[-u^{(0)} - \frac{h}{2} \gamma^{(0)} + \frac{t}{2} \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right) \right], \\
M_{xz}^{(1)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(1)} z_{(1)} dz_{(1)} = \frac{G_{13}^0 t^2}{12} \left(w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right), \\
M_{xz}^{(2)} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz}^{(2)} z_{(2)} dz_{(2)} = -\frac{G_{13}^0 t^2}{12} \left(w_{,x}^{(0)} + \frac{h}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right). \tag{10}
\end{aligned}$$

Используя далее соотношения (8), (10) и проведя стандартные преобразования, для вариации потенциальной энергии деформации закрепленного участка стержня можно получить выражение

$$\begin{aligned}
\delta \Pi^{(0)} &= \left(T_x^{(0)} \delta u^{(0)} + M_x^{(0)} \delta \gamma^{(0)} + Q_{xz}^{(0)} \delta w^{(0)} + H_{xz}^{(0)} \delta \varphi^{(0)} \right) \Big|_{x=-l}^{x=0} - \\
&- \int_{-l}^0 \left[\left(T_{x,x}^{(0)} - \frac{T_{xz}^-}{t} \right) \delta u^{(0)} + \left(M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} T_{xz}^+ \right) \delta \gamma^{(0)} + \right. \\
&\left. + \left(Q_{xz,x}^{(0)} - \frac{T_z^-}{t} \right) \delta w^{(0)} + \left(H_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} + \frac{h}{2t} T_z^+ \right) \delta \varphi^{(0)} \right] dx. \tag{11}
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
T_{xz}^+ &= T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)}, \quad T_{xz}^- = T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)}, \quad T_z^+ = T_z^{(1)} + T_z^{(2)}, \quad T_z^- = T_z^{(1)} - T_z^{(2)}, \\
Q_{xz}^{(0)} &= T_{xz}^{(0)} + \frac{T_{xz}^+}{2} + \frac{M_{xz}^-}{t}, \quad H_{xz}^{(0)} = M_{xz}^{(0)} - \frac{h}{2} \left(\frac{T_{xz}^-}{2} + \frac{M_{xz}^+}{t} \right), \tag{12}
\end{aligned}$$

в которых в соответствии с (10)

$$\begin{aligned}
T_{xz}^+ &= T_{xz}^{(1)} + T_{xz}^{(2)} = G_{13}^0 (t w_{,x}^{(0)} - h \gamma^{(0)}), \quad T_{xz}^- = T_{xz}^{(1)} - T_{xz}^{(2)} = G_{13}^0 \left(2u^{(0)} - \frac{ht}{2} \varphi_{,x}^{(0)} \right), \\
T_z^+ &= T_z^{(1)} + T_z^{(2)} = -E_3^0 h \varphi^{(0)}, \quad T_z^- = T_z^{(1)} - T_z^{(2)} = 2E_3^0 w^{(0)}, \\
M_{xz}^+ &= M_{xz}^{(1)} + M_{xz}^{(2)} = -\frac{G_{13}^0 h t^2}{12} \varphi_{,x}^{(0)}, \quad M_{xz}^- = M_{xz}^{(1)} - M_{xz}^{(2)} = \frac{G_{13}^0 t^2}{6} w_{,x}^{(0)}, \tag{13} \\
\frac{T_{xz}^+}{2} + \frac{M_{xz}^-}{t} &= G_{13}^0 \left(\frac{2t w_{,x}^{(0)}}{3} - \frac{h \gamma^{(0)}}{2} \right), \quad \frac{h}{2} \left(\frac{T_{xz}^-}{2} + \frac{M_{xz}^+}{t} \right) = \frac{G_{13}^0 h}{2} \left(u^{(0)} - \frac{1}{3} h t \varphi_{,x}^{(0)} \right).
\end{aligned}$$

Анализируя структуру полученного выражения (11) и используя соотношения (8), (12), (13), можно записать необходимые в дальнейшем дифференциальные выражения:

$$\begin{aligned}
L_u^{(0)} &= T_{x,x}^{(0)} - \frac{T_{xz}^-}{t} = B_{11} u_{,xx}^{(0)} + \left(B_{11} \nu_{31} + \frac{h}{2} G_{13}^0 \right) \varphi_{,x}^{(0)} - 2G_{13}^0 \frac{u^{(0)}}{t}, \\
L_\varphi^{(0)} &= H_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} + \frac{h}{2t} T_z^+ = \\
&= \left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6} \right) \varphi_{,xx}^{(0)} - \left(B_{33} \nu_{13} + \frac{G_{13}^0 h}{2} \right) u_{,x}^{(0)} - \left(B_{33} + \frac{E_3^0 h^2}{2t} \right) \varphi^{(0)},
\end{aligned}$$

$$L_{\gamma}^{(0)} = M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} T_{xz}^+ = D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2} \right) w_{,x}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t} \right) \gamma^{(0)},$$

$$L_w^{(0)} = Q_{xz,x}^{(0)} - \frac{T_z^-}{t} = \left(B_{13} + \frac{2G_{13}^0 t}{3} \right) w_{,xx}^{(0)} + \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2} \right) \gamma_{,x}^{(0)} - \frac{2E_3^0}{t} w^{(0)}. \quad (14)$$

Используя аппроксимации (1) и (3), для вариации работы инерционных сил на закрепленном участке стержня можно получить выражение

$$\delta K^{(0)} = - \int_{-l}^0 \left[\left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) (\ddot{u}^{(0)} \delta u^{(0)} + \ddot{w}^{(0)} \delta w^{(0)}) + \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) (\ddot{\gamma}^{(0)} \delta \gamma^{(0)} + \ddot{\varphi}^{(0)} \delta \varphi^{(0)}) \right] dx. \quad (15)$$

Здесь ρ, ρ_0 – плотности материалов стержня и прослоек, точки над переменными обозначают частные производные по времени τ .

2. Модель деформирования незакрепленного участка стержня и уравнения движения стержня

Если на незакрепленном участке стержня для перемещений U, W произвольных точек поперечных сечений принять аппроксимации

$$U = u + z\gamma, \quad W = w + z\varphi, \quad (16)$$

аналогичные зависимостям (1) для закрепленного участка, то в сечении $x=0$ должны быть выполнены очевидные условия кинематического сопряжения

$$(u^{(0)} - u)|_{x=0} = 0, \quad (\gamma^{(0)} - \gamma)|_{x=0} = 0, \quad (w^{(0)} - w)|_{x=0} = 0, \quad (\varphi^{(0)} - \varphi)|_{x=0} = 0. \quad (17)$$

При использовании для рассматриваемого участка геометрически линейных кинематических соотношений остаются неизменными составленные ранее зависимости (4), (6), (8), в которых все верхние индексы со скобками убираются. Так, например, для определения вариации потенциальной энергии деформации будет иметь место выражение

$$\delta \Pi = (T_x \delta u + M_x \delta \gamma + T_{xz} \delta w + M_{xz} \delta \varphi)|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a [T_{x,x} \delta u + (M_{x,x} - T_{xz}) \delta \gamma + T_{xz,x} \delta w + (M_{xz,x} - T_z) \delta \varphi] dx, \quad (18)$$

а вариация работы инерционных сил на соответствующих перемещениях будет определяться выражением

$$\delta K = -\rho \int_0^a \left[h(\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) + \frac{h^3}{12} (\ddot{\gamma} \delta \gamma + \ddot{\varphi} \delta \varphi) \right] dx. \quad (19)$$

Для получения уравнений движения закрепленного и незакрепленного участков стержня воспользуемся вариационным уравнением принципа Даламбера – Лагранжа:

$$\delta \Pi^{(0)} - \delta K^{(0)} + \delta \Pi - \delta K - \delta A = 0. \quad (20)$$

В предположении о том, что на незакрепленную часть стержня действует поверхностная нагрузка $p_z = p_z(x, \tau)$, входящая в (20) вариация работы внешних сил будет определяться выражением

$$\delta A = \int_0^a p_z \delta w dx. \quad (21)$$

Из уравнения (20) после подстановки в него соотношений (11), (15), (18), (19), (21) и последующего учета кинематических условий сопряжения участков (17) следуют:

– уравнения движения для закрепленного участка $-l \leq x \leq 0$

$$\begin{aligned} T_{x,x}^{(0)} - \frac{T_{xz}^-}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} &= 0, \\ H_{xz,x}^{(0)} - T_z^{(0)} + \frac{h}{2t} T_z^+ - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\varphi}^{(0)} &= 0, \\ M_{x,x}^{(0)} - T_{xz}^{(0)} + \frac{h}{2t} T_{xz}^+ - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6} \right) \ddot{\gamma}^{(0)} &= 0, \\ Q_{xz,x}^{(0)} - \frac{T_z^-}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{w}^{(0)} &= 0 \end{aligned} \quad (22)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (22) в сечении $x = -l$,

$$\begin{aligned} T_x^{(0)} \Big|_{x=-l} &= 0 \text{ при } \delta u^{(0)} \neq 0, \quad M_x^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta \gamma^{(0)} \neq 0, \\ Q_{xz}^{(0)} \Big|_{x=-l} &= 0 \text{ при } \delta w^{(0)} \neq 0, \quad H_{xz}^{(0)} \Big|_{x=-l} = 0 \text{ при } \delta \varphi^{(0)} \neq 0; \end{aligned} \quad (23)$$

– уравнения движения для незакрепленного участка $0 \leq x \leq a$

$$\begin{aligned} T_{x,x} - \rho h \ddot{u} &= 0, \quad M_{xz,x} - T_z - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} = 0, \\ M_{x,x} - T_{xz} - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\gamma} &= 0, \quad T_{xz,x} - \rho h \ddot{w} + p_z = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

и силовые граничные условия, формулируемые для (24) в сечении $x = a$,

$$\begin{aligned} T_x \Big|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta u \neq 0, \quad M_{xz} \Big|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta \varphi \neq 0, \\ M_x \Big|_{x=a} &= 0 \text{ при } \delta \gamma \neq 0, \quad T_{xz} \Big|_{x=a} = 0 \text{ при } \delta w \neq 0; \end{aligned} \quad (25)$$

а также силовые условия сопряжения участков

$$\begin{aligned} (T_x^{(0)} - T_x) \Big|_{x=0} &= 0, \quad (H_{xz}^{(0)} - M_{xz}) \Big|_{x=0} = 0, \\ (M_x^{(0)} - M_x) \Big|_{x=0} &= 0, \quad (Q_{xz}^{(0)} - T_{xz}) \Big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

формулируемые в сечении $x = 0$.

Уравнения движения (22), (24), а также условия (23), (25) и (26) с учетом соотношений упругости (8) и выражений (12), (13) и (14) можно записать в перемещениях:

$$B_{11} u_{,xx}^{(0)} + \left(B_{11} v_{31} + \frac{h}{2} G_{13}^0 \right) \varphi_{,x}^{(0)} - 2G_{13}^0 \frac{u^{(0)}}{t} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3} \right) \ddot{u}^{(0)} = 0,$$

$$\left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 t h^2}{6}\right) \varphi_{,xx}^{(0)} - \left(B_{33} \nu_{13} + \frac{G_{13}^0 h}{2}\right) u_{,x}^{(0)} - \left(B_{33} + \frac{E_3^0 h^2}{2t}\right) \varphi^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6}\right) \ddot{\varphi}^{(0)} = 0, \quad (27)$$

$$D_{11} \gamma_{,xx}^{(0)} - \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2}\right) w_{,x}^{(0)} - \left(B_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2}{2t}\right) \gamma^{(0)} - \left(\frac{\rho h^3}{12} + \frac{\rho_0 t h^2}{6}\right) \ddot{\gamma}^{(0)} = 0,$$

$$\left(B_{13} + \frac{2G_{13}^0 t}{3}\right) w_{,xx}^{(0)} + \left(B_{13} - \frac{G_{13}^0 h}{2}\right) \gamma_{,x}^{(0)} - \frac{2E_3^0}{t} w^{(0)} - \left(\rho h + \frac{2\rho_0 t}{3}\right) \ddot{w}^{(0)} = 0,$$

$$B_{11}(u_{,xx} + \nu_{31} \varphi_{,x}) - \rho h \ddot{u} = 0, \quad D_{13} \varphi_{,xx} - B_{33}(\varphi + \nu_{13} u_{,x}) - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\varphi} = 0, \quad (28)$$

$$D_{11} \gamma_{,xx} - B_{13}(\gamma + w_{,x}) - \frac{\rho h^3}{12} \ddot{\gamma} = 0; \quad B_{13}(\gamma_{,x} + w_{,xx}) - \rho h \ddot{w} + p_z = 0,$$

$$(u_{,x}^{(0)} + \nu_{31} \varphi^{(0)})|_{x=-l} = 0, \quad \gamma_{,x}^{(0)}|_{x=-l} = 0,$$

$$\left[B_{13}(\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)}) + \frac{2}{3} G_{13}^0 t w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 \gamma^{(0)} \right]|_{x=-l} = 0, \quad (29)$$

$$\left[\left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2 t}{6} \right) \varphi_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 u^{(0)} \right]|_{x=-l} = 0,$$

$$(u_{,x} + \nu_{31} \varphi)|_{x=a} = 0, \quad \varphi_{,x}|_{x=a} = 0, \quad \gamma_{,x}|_{x=a} = 0, \quad (\gamma + w_{,x})|_{x=0} = 0, \quad (30)$$

$$(u_{,x}^{(0)} - u_{,x})|_{x=0} = 0, \quad \left[\left(D_{13} + \frac{G_{13}^0 h^2 t}{6} \right) \varphi_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 u^{(0)} - D_{13} \varphi_{,x} \right]|_{x=0} = 0, \quad (31)$$

$$(\gamma_{,x}^{(0)} - \gamma_{,x})|_{x=0} = 0, \quad \left[B_{13}(\gamma^{(0)} + w_{,x}^{(0)} - \gamma - w_{,x}) + \frac{2}{3} G_{13}^0 t w_{,x}^{(0)} - \frac{h}{2} G_{13}^0 \gamma^{(0)} \right]|_{x=0} = 0.$$

На основе уравнений движения (27), (28) соответственно закрепленного и незакрепленного участков стержня при выполнении условий (17), (29), (30) и (31) можно ставить и решать две основные задачи, состоящие в определении требуемого спектра собственных форм и частот колебаний стержня рассматриваемого класса, а также его динамической реакции при действии заданной нагрузки $p_z = p_z(x, \tau)$.

Заключение

Построена уточненная трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, консольно закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки. Для представления перемещений стержня и прослоек приняты аппроксимации по сдвиговой модели С.П. Тимошенко с учетом их поперечного обжатия, подчиненные условиям непрерывности в точках их соединения между собой и неподвижности в точках соединения прослоек с опорным элементом. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня. При выполнении этих условий на основе вариационного прин-

ципа Даламбера – Лагранжа получены уравнения движения, сформулированы граничные условия к ним, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков стержня.

Список литературы

1. Басов К.А. *ANSYS в примерах и задачах*. Под общ. ред. Д.Г. Красковского. М.: Компьютер пресс, 2002. 224 с.
2. Чигарев А.В., Кравчук А.С., Смалюк А.Ф. *ANSYS для инженеров: Справ. пособие*. М.: Машиностроение, 2004. 512 с.
3. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
4. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. М.: Наука, 1987. 360 с.
5. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1984. Vol. 51. Iss. 4. P.745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
6. Librescu L. Refined geometrically nonlinear theories of anisotropic laminated shells. *Quarterly Applied Mathematics*. 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1090/QAM/885164>.
7. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *Journal of Applied Mechanics*. 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. <https://doi.org/10.1115/1.3125837>.
8. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
9. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
10. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
11. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.
12. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
13. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
14. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
15. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
16. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
17. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics*. 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
18. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.

19. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Journal of Vibration and Acoustics*. 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
20. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.
21. Паймушин В.Н., Шишкин В.М. Трансформационная модель деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухсторонних скользящих опорах. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. № 2. С. 215–234. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234.
22. Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Чумакова С.Ф. Математическое моделирование динамического деформирования стержня-полосы, закрепленного на двухстороннем опорном элементе через упругие прослойки. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2024. Т. 166. Кн. 3. С. 407–425. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2024.3.407-425>.
23. Паймушин В.Н., Фирсов В.А. *Оболочки из стекла. Расчет напряженно-деформированного состояния*. М.: Машиностроение, 1993. 208 с.
24. Murugan R., Ramesh R., Padmanabhan K. Experimental study on fatigue-vibration interactions of cyclically loaded FRP composite cantilever beams made of glass/carbon-layered arrangements. In: *Advances in Structural Integrity*. Eds. R. Prakash, V. Jayaram, A. Saxena. Singapore: Springer, 2018. P. 579–591. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7197-3_48.
25. Van Paeregem W., Degrieck J. Experimental set-up for and numerical modelling of bending fatigue experiments on plain woven glass/epoxy composites. *Composite Structures*. 2001. Vol. 51. Iss. 1. P. 1–8. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00092-1.

References

1. Basov K.A. *ANSYS v primerakh i zadachakh. Pod obshchey redaktsiey D.G. Kraskovskogo [ANSYS in Examples and Tasks. Ed. D.G. Kraskovsky]*. Moscow. Kompyuter press. 2002. 224 p. (In Russian).
2. Chigarev A.V., Kravchuk A.S., Smalyuk A.F. *ANSYS dlya Inzhenerov: Spravochnoe posobie [ANSYS for Engineers: A Handbook]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 2004. 512 p. (In Russian).
3. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [General Theory of Anisotropic Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1974. 448 p. (In Russian).
4. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin. Prochnost, ustoychivost i kolebaniya [Theory of Anisotropic Plates. Strength, Stability and Vibrations]*. Moscow. Nauka Publ. 1987. 360 p. (In Russian).
5. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Appl. Mech.* 1984. Vol. 51. Iss. 4. P. 745–752. <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
6. Librescu L. Refined geometrically non-linear theories of anisotropic laminated shells. *Quart. Appl. Math.* 1987. Vol. 45. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1090/QAM/885164>.
7. Schmidt R., Reddy J.N. A refined small strain and moderate rotation theory of elastic anisotropic shells. *J. Appl. Mech.* 1988. Vol. 55. Iss. 3. P. 611–617. <https://doi.org/10.1115/1.3125837>.
8. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *Int. J. Non Linear Mech.* 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
9. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int. J. Non Linear Mech.* 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
10. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.
11. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *Int. J. Solids and Struct.* 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.

12. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
13. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Comput. Mech.* 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
14. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
15. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
16. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Appl. Math. Model.* 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
17. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
18. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.* 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
19. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Journal of Vibration and Acoustics.* 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
20. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.
21. Paymushin V.N., Shishkin V.M. Transformatsionnaya model deformirovaniya sterzhnya-polosy, zakreplennogo na dvukhstoronnikh skolzyashchikh oporakh [Transformation model of deformation of a rod-strip fixed on two-sided sliding supports]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. Iss. 2. P. 215–234 (In Russian).
22. Paymushin V.N., Shishkin V.M., Chumakova S.F. Matematicheskoe modelirovanie dinamicheskogo deformirovaniya sterzhnya-polosy, zakreplennogo na dvukhstoronnem opornom elemente cherez uprugie prosloyki [Mathematical modeling of dynamic deformation of a rod-strip fixed to a two-sided support element through elastic layers]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki [Proceedings of Kazan University. Physical and Mathematical Sciences]*. 2024. Vol. 166. Book 3. P. 407–425 (In Russian).
23. Paymushin V.N., Firsov V.A. *Obolochki iz stekla. Raschet napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya [Glass Shells. Calculation of Stress-Strain State]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1993. 208 p. (In Russian).
24. Murugan R., Ramesh R., Padmanabhan K. Experimental study on fatigue-vibration interactions of cyclically loaded FRP composite cantilever beams made of glass/carbon-layered arrangements. In: *Advances in Structural Integrity*. Eds. R. Prakash, V. Jayaram, A. Saxena. Singapore. Springer. 2018. P. 579–591. https://doi.org/10.1007/978-981-10-7197-3_48.
25. Van Paepegem W., Degrieck J. Experimental set-up for and numerical modelling of bending fatigue experiments on plain woven glass/epoxy composites. *Compos. Struct.* 2001. Vol. 51. Iss 1. P. 1–8. DOI: 10.1016/S0263-8223(00)00092-1.

**REFINED TRANSFORMATION MODEL OF DEFORMATION
OF A ROD-STRIP FIXED ON A DOUBLE-SIDED SUPPORT ELEMENT
THROUGH ELASTIC INTERLAYERS.**

1. BASIC RELATIONS AND MOTION EQUATIONS*

Paimushin V.N.¹, Shishkin V.M.²

¹*Kazan National Research Technical University n. a. A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2024/09/16

It is noted that when studying the deformation processes of flat rods taking into account the deformability of clamped sections, it is necessary to introduce the transformational concept of the stress-strain state parameters and the mathematical models used to describe them. Such a transformation takes place when passing through the boundary from free section to a clamped one (from clamped to free). A refined transformation model of the dynamic deformation of a rod consisting of clamped and free sections along its length is constructed. The clamped section of finite length is considered to be connected along two front surfaces with an absolutely rigid and fixed support element through elastic transversely soft interlayers. To represent the displacements of the clamped and free sections of the rod, as well as the elastic interlayers, approximations according to the S.P. Timoshenko's shear model taking into account their transverse compression is accepted. They subject to the conditions of continuity of displacements at the points of connection of the layers with the clamped section of the rod and immobility of the points of contact of the layers with the support element. On the basis of this shear model, the components of the deformed state are obtained in the geometrically linear approximation and the corresponding stress components in the physically linear-elastic approximation, as well as variations in the potential energy of deformation and the work of inertial forces for the clamped and free sections of the rod. The conditions of kinematic conjugation of the noted sections of the rod are formulated. Taking into account these conditions, based on the of d'Alembert–Lagrange's variational principle, the corresponding equations of motion and boundary conditions for them, as well as the force conditions for conjugation of the clamped and free sections of the rod are obtained for the sections introduced into consideration.

Keywords: vibrations, rod-strip, S.P. Timoshenko's shear model, free and clamped sections, transverse compression.

*The study was carried out with financial support allocated to the Kazan National Research Technical University name after A.N. Tupolev on a state assignment in the field of scientific activity (project No FZSU-2024-0010, section 1) and at the expense of the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021, section 2).