УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-461-470

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПОЛОСОВОГО ШТАМПА НА АНИЗОТРОПНОМ КОМПОЗИТЕ*

Бабешко В.А.[1,2], **Евдокимова О.В.**[2], **Бабешко О.М.**[1], **Евдокимов В.С.**[1], **Хрипков Д.А.**[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 28.09.2024

Впервые методом блочного элемента строится точное решение динамической контактной задачи о действии без трения жесткого штампа в форме полуполосы на анизотропное многослойное композитное основание. Предполагается, что штамп подвергается гармоническому во времени воздействию, вызывая волновой процесс вне зоны контакта. Таким образом, впервые точно решается двумерное интегральное уравнение Винера – Хопфа с разностным ядром в области, представляющей собой полуполосу. Известными численными методами удается описывать поведение концентрации контактных напряжений на границе штампа в случаях изотропных материалов. Однако построить точное решение о распределении контактных напряжений в анизотропном случае под полуполосовым штампом с учетом особенностей на границе не удавалось. Получено решение, позволяющее описывать динамические процессы и концентрации напряжений под полуполосовым штампом при гармонических воздействиях на анизотропное основание. В тех случаях, когда полуполоса вырождается в полосу или в четверть плоскости, решение упрощается и переходит в известные решения для этих областей.

Для обеспечения корректной постановки задачи применяется принцип предельного поглощения Мандельштама. В процессе исследования используются метод блочного элемента, факторизационные методы, метод Ньютона – Канторовича.

Построенное точное решение контактной задачи позволяет выделить функции, описывающие концентрацию контактных напряжений на границах штампа, в том числе в угловых точках полуполосового штампа. Показатели концентрации контактных напряжений в угловых зонах полуполосового штампа близки к значениям, полученным приближенными методами и опубликованным ранее.

Найденное решение может быть полезно в инженерной практике, сейсмологии, а также в других областях.

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ и Кубанского научного фонда (региональный проект №24-11-20006).

Ключевые слова: динамическая контактная задача, полуполосовой штамп, композитный материал, анизотропная среда, интегральное уравнение, метод блочного элемента.

Введение

Предложенный ранее в статье [1] метод решения динамических контактных задач для полосового штампа конечной ширины позволяет применять его к случаям композитных слоистых материалов, имеющих анизотропную структуру для полуполосового штампа. Сложность решения рассматриваемых динамических контактных задач при наличии гармонических во времени воздействиях на штамп и анизотропии основания в сравнении со статическим случаем состоит в наличии у двумерного символа интегрального уравнения контактной задачи особенностей на вещественных осях, начиная с некоторых частот [2].

В статье [1] о динамической контактной задаче для полосового штампа описанная проблема преодолена введением принципа предельного поглощения Мандельштама [2]. В уравнения динамической контактной задачи временно вводится параметр ε, приводящий исходную идеальную среду, в которой смешанная задача имеет единственное решение, к материалу с поглощением. Для получения правильного излучения волн на бесконечность в граничных задачах колебания сплошных сред в неограниченных областях уравнение справа нагружается членом $\varepsilon \partial_t \varphi$ с малым параметром ε, вносящим поглощение энергии колебания.

После решения задачи в полученном результате принимаем $\varepsilon = 0$. Считаем, что в этом случае функция $K(u, v)$ записывается в виде $K(u, v, \varepsilon)$, который при $\varepsilon = 0$ совпадает с исходным символом. Вместе с обеспечением единственности решения контактной задачи этот принцип позволяет правильно осуществлять отбор волн, возбуждаемых штампом вне зоны контакта, задавая корректную физическую постановку задачи [2].

Как показано в контактной задаче для полосового штампа, этот принцип дополнительно к указанным свойствам обеспечивает при решении применение метода Ньютона – Канторовича [3, 4]. При решении рассматриваемой контактной задачи применяются в совокупности факторизационный метод, метод блочного элемента и метод, позволивший построить точное решение для полосового штампа [1]. Опубликовано большое количество работ, посвященных исследованиям граничных задач, в том числе контактных, для анизотропных композитов [5–19]. Это связано с их важностью в различных областях инженерной практики, в науках о Земле и в других областях. Исследования настоящей статьи выявляют ряд новых, не описанных ранее свойств решений контактных задач для полуполосовых штампов, действующих на произвольный анизотропный композит.

Постановка задачи

Интегральные уравнения о действии в описанном выше динамическом режиме полуполосового штампа на многослойную анизотропную среду сводятся к решению интегрального уравнения вида [1, 2]

$$\mathbf{K}q = \int_{0}^{\infty}\int_{-a}^{a} k(x-\xi, y-\eta)\, q(\xi,\eta)\, d\varepsilon\, d\eta = f(x,y), \quad 0 \le x \le \infty,\ -a \le y \le a, \qquad (1)$$

$$k(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}K(u,v,\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-i(ux+vy)}\,du\,dv.$$

В общем случае функция $K(u,x)$ – символ интегрального уравнения (1) – является комплекснозначной функцией двух комплексных переменных, может иметь особенности в виде полюсов и точек ветвления.

Предполагается, что существует минимальное положительное число $\varepsilon > 0$, такое, что в комплексных областях в виде полос $|\mathrm{Im}\, u| < \varepsilon$, $|\mathrm{Im}\, v| < \varepsilon$ отсутствуют нули или полюса функции $K(u, v, \varepsilon)$. Таким свойством обладает функция $K(u, v, \varepsilon)$ в статических задачах. Она возникает при решении анизотропной граничной задачи в многослойной среде и является непрерывной, суммируемой на осях по обоим аргументам, с поведением на бесконечности вида

$$K(u,v,\varepsilon)=O(u^{-1}),\ v=\mathrm{const},\quad K(u,v,\varepsilon)=O(v^{-1}),\quad u=\mathrm{const},\ |u|,|v|\to\infty. \quad (2)$$

Подходящим к исследованию интегрального уравнения (1) является метод решения контактной задачи для полосового штампа [1]. Именно он предопределил подход, позволивший исследовать контактную задачу для полуполосового штампа.

Контактная задача для полуполосового штампа

В исследовании используются методы блочного элемента, разработанные в [1, 2]. Пусть $\Omega(0 \le x, |y| \le a)$ – область контакта штампа с основанием. Введем в рассмотрение области Ω_{mn} вне штампа, которые задаются соотношениями

$$\Omega_{11}(0\le x, y\ge a),\quad \Omega_{22}(0\le x, y\le -a),\quad \Omega_{12}(x\le 0, y\ge 0),\quad \Omega_{21}(x\le 0, y\le 0).$$

Очевидно, что эти области дополняют область контакта до всей плоскости. Продолжим уравнение (1) на всю плоскость введением дополнительных неизвестных. Введем в каждой области Ω_{mn} новую неизвестную функцию $\varphi_{mn}(x, y)$, m, n = 1, 2. Ниже будем применять преобразование Фурье в следующей форме с обозначением функций прописными и строчными буквами:

$$\Phi_{mn}(u,v)=\iint\limits_{\Omega_{mn}}\varphi_{mn}(\xi,\eta)\mathrm{e}^{i(ux+vy)}d\xi\, d\eta,\quad \varphi_{mn}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{mn}(u,v)\,\mathrm{e}^{-i(ux+vy)}du\, dv.$$

Применим к интегральному уравнению (1) вместе с введенными неизвестными функциями двойное преобразование Фурье. В результате получим справедливое в комплексных плоскостях u, v функциональное уравнение вида

$$K(u,v,\varepsilon)Q(u,v)-\Phi_{11}(u,v)-\Phi_{12}(u,v)-\Phi_{21}(u,v)-\Phi_{22}(u,v)-F(u,v)=0. \quad (3)$$

Исследование будет состоять в преобразовании функционального уравнения (3) таким образом, чтобы свести его к функциональному уравнению для полосового штампа, рассмотренного в [1]. Затем воспользуемся решением контактной задачи для четверти плоскости. В процессе исследования понадобятся операторы, позволяющие компактно осуществлять довольно громоздкие преобразования.

Используя обозначения из [2], при исследовании будем применять приведенные ниже операторы:

$$\{G(u,v)\}_{+u}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{G(\xi,v)}{\xi-u}d\xi,\ u\in\Pi_u^+,\quad \{G(u,v)\}_{-u}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1}\frac{G(\xi,v)}{\xi-u}d\xi,\ u\in\Pi_u^-,$$

$$\{G(u,v)\}_{+v} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(u,\eta)}{\eta - v}d\eta,\ v\in\Pi_v^+,\quad \{G(u,v)\}_{-v} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{G(u,\eta)}{\eta - v}d\eta,\ v\in\Pi_v^-,$$

$$K_{+u}(u,v) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1}\frac{\ln K(\xi,v)}{\xi - u}d\xi\right),\ \alpha\in\Pi_u^+,$$

$$K_{-u}(u,v) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1}\frac{\ln K(\xi,v)}{\xi - u}d\xi\right),\ u\in\Pi_u^-, \tag{4}$$

$$K_{+v}(u,v) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2}\frac{\ln K(u,\eta)}{\eta - v}d\eta\right),\ v\in\Pi_v^+,$$

$$K_{-v}(u,v) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2}\frac{\ln K(u,\eta)}{\eta - v}d\eta\right),\ v\in\Pi_v^-.$$

Здесь Π_u^+, Π_u^- – комплексные области соответственно выше (плюс) и ниже (минус) вещественной оси комплексной плоскости u, аналогично Π_v^+, Π_v^- – области выше и ниже вещественной оси комплексной плоскости v.

С помощью этих операторов удается компактно записывать преобразования и решения уравнений (1).

Построение решения контактной задачи

Применим алгоритм решения функционального уравнения (3), осуществив факторизацию символа K в виде произведения $K = K_{-u}K_{+u}$ по параметру u. В результате функциональное уравнение принимает вид

$$K_{+u}Q - K_{-u}^{-1}\Phi_{11} - K_{-u}^{-1}\Phi_{12} - K_{-u}^{-1}\Phi_{21} - K_{-u}^{-1}\Phi_{22} - K_{-u}^{-1}F = 0. \tag{5}$$

В соответствии с алгоритмом метода факторизации далее применяется операция факторизации всех членов функционального уравнения в виде суммы. При этом составляющие разделяются на регулярные в верхней и нижней полуплоскостях. После этого применяется теорема Лиувиля об аналитическом продолжении функций, совпадающих на континууме. Здесь учитывается поиск классического решения для правой части уравнения $f(x,y)$, имеющей непрерывные первые производные по обоим параметрам [1]. В распавшемся функциональном уравнении на два уравнения осуществим с учетом аналитических свойств функций Φ_{mn} анализ аналитических свойств всех членов функциональных уравнений в комплексной плоскости v. Выполнив преобразования с учетом носителей, в результате приходим к соотношениям:

$$K_{+u}Q\mathrm{e}^{-iva} - \{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva} - \{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva} - \{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva} = 0,$$

$$K_{+u}Q\mathrm{e}^{iva} - \{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{+u}Q\mathrm{e}^{iva} - \{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{+u}Q\mathrm{e}^{iva} - \{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}Q\mathrm{e}^{iva} = 0.$$

Введя обозначения

$$\{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{+u}\mathrm{e}^{iva} = T_{+v},\quad \{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{+u}\mathrm{e}^{iva} = T_{-v},$$

получим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &K_{+u}Q\mathrm{e}^{-iva} - T_{+v} - T_{-v}\mathrm{e}^{-2iva} - \{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva} = 0,\quad Q\mathrm{e}^{-iva} = \{Q\mathrm{e}^{-iva}\}_{-v},\\ &K_{+u}Q\mathrm{e}^{iva} - T_{+v}\mathrm{e}^{2iva} - T_{-v} - \{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{iva} = 0,\quad Q\mathrm{e}^{iva} = \{Q\mathrm{e}^{iva}\}_{+v}. \end{aligned} \tag{6}$$

Рассмотрим функциональные уравнения (6) в комплексной плоскости переменного v. Выберем те уравнения, которые содержат неизвестные T_{+v}, T_{-v}, и факторизуем в виде произведения по параметру v коэффициент K_{+u}, стоящий при функции Q, с учетом свойств носителя. Тогда получим функциональные уравнения вида

$$K_{+u-v}Q\mathrm{e}^{-iva} - K_{+u+v}^{-1}T_{+v} - K_{+u+v}^{-1}T_{-v}\mathrm{e}^{-2iva} - K_{+u+v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva} = 0,$$

$$K_{+u+v}Q\mathrm{e}^{iva} - K_{+u-v}^{-1}T_{+v}\mathrm{e}^{2iva} - K_{+u-v}^{-1}T_{-v} - K_{+u-v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{iva} = 0.$$

Выполним для всех членов этих функциональных уравнений факторизацию по параметру v в виде суммы. Разделим в соответствии с алгоритмом метода факторизации члены, полученные после факторизации, на регулярные в верхней и нижней полуплоскостях. Затем по теореме Лиувиля об аналитическом продолжении и оценке поведения на бесконечности получим систему функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} &K_{+u-v}Q\mathrm{e}^{-iva} - \{K_{+u+v}^{-1}T_{-v}\mathrm{e}^{-2iva}\}_{-v} - \{K_{+u+v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva}\}_{-v} = 0,\\ &K_{+u+v}Q\mathrm{e}^{iva} - \{K_{+u-v}^{-1}T_{+v}\mathrm{e}^{2iva}\}_{+v} - \{K_{+u-v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{iva}\}_{+v} = 0, \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &K_{+u+v}^{-1}T_{+v} + \{K_{+u+v}^{-1}T_{-v}\mathrm{e}^{-2iva}\}_{+v} + \{K_{+u+v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva}\}_{+v} = 0,\\ &K_{+u-v}^{-1}T_{-v} + \{K_{+u-v}^{-1}T_{+v}\mathrm{e}^{2iva}\}_{-v} + \{K_{+u-v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{iva}\}_{-v} = 0. \end{aligned} \qquad (8)$$

Введем новые неизвестные с помощью соотношений

$$K_{+u+v}^{-1}T_{+v} = X_{+}, \quad K_{+u-v}^{-1}T_{-v} = X_{-}.$$

В результате приходим к системе интегральных уравнений, детально изученной в [1]:

$$X_{+} + \{K_{+u+v}^{-1}K_{+u-v}X_{-}\mathrm{e}^{-2iva}\}_{+v} + \{K_{+u+v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{-iva}\}_{+v} = 0,$$

$$X_{-} + \{K_{+u-v}^{-1}K_{+u+v}X_{+}\mathrm{e}^{2iva}\}_{-v} + \{K_{+u-v}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{+u}\mathrm{e}^{iva}\}_{-v} = 0.$$

Для упрощения считаем функцию $K(u, v, \varepsilon)$ четной по обоим параметрам, что имеет место во многих анизотропных материалах. Проведем следующие преобразования: под интегралами в первом уравнении заменим параметр η на $-\eta$ и изменим направление интегрирования, во втором уравнении заменим v на $-v$. После этого введем обозначение новой функции, регулярной по параметру v в верхней полуплоскости, $X_{-}(u,-v) = Y_{+}(u,v)$:

$$\begin{aligned} Z_{\pm}(u,v) = {}&\pm\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_{+u-v}^{-1}(u,\eta,\varepsilon)K_{+u+v}(u,\eta,\varepsilon)Z_{\pm}(u,\eta)\mathrm{e}^{2i\eta a}}{\eta+v}d\eta -\\ &-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_{-u}^{-1}F(u,-\eta)\mathrm{e}^{i\eta a}}{\eta+v}d\eta \pm \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_2}\frac{K_{-u}^{-1}F(u,\eta)\mathrm{e}^{i\eta a}}{\eta+v}d\eta, \quad v\in\Pi_v^{+}, \end{aligned} \qquad (9)$$

$$Z_{+}(u,v) = X_{+}(u,v) + Y_{+}(u,v), \quad Z_{-}(u,v) = X_{+}(u,v) - Y_{+}(u,v).$$

Как доказано в [1], эти уравнения решаются точно методом Ньютона – Канторовича [3, 4] на всем интервале изменения параметра $0 < a < \infty$.

Из уравнения (3) применением алгоритма метода факторизации, объединив все функции, регулярные в нижней полуплоскости комплексной плоскости u, получим еще одно уравнение, имеющее вид

$$K_{-u}^{-1}(\Phi_{12}+\Phi_{21}) + \{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{-u} + \{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{-u} + \{K_{-u}^{-1}F\}_{-u} = 0.$$

Отсюда находим сумму неизвестных $\Phi_{12} + \Phi_{21}$, выраженную с помощью функций Φ_{11}, Φ_{22}:

$$\Phi_{12} + \Phi_{21} = -K_{-u}\{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{-u} - K_{-u}\{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{-u} - K_{-u}\{K_{-u}^{-1}F\}_{-u}.$$

Таким образом, найдены все неизвестные Φ_{mn}.

Подставив найденные значения Φ_{mn} в функциональное уравнение (3), будем иметь возможность записать точное решение интегрального уравнения в виде

$$Q = K^{-1}F + K^{-1}\Phi_{11} + K^{-1}\Phi_{22} + K^{-1}(\Phi_{12} + \Phi_{21}).$$

Выполнив несложные преобразования, получаем точное решение $q(x, y)$ контактной задачи для полуполосы:

$$Q = K^{-1}F + K^{-1}\Phi_{11} + K^{-1}\Phi_{22} - K_{+u}^{-1}\{K_{-u}^{-1}F\}_{-u} - K_{+u}^{-1}\{K_{-u}^{-1}\Phi_{11}\}_{-u} - K_{+u}^{-1}\{K_{-u}^{-1}\Phi_{22}\}_{-u},$$

$$q(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} Q(u,v,\varepsilon)\,\mathrm{e}^{-i(ux+vy)}du\,dv. \qquad (10)$$

Исследование свойств решения

1. Легко показать, что построенное решение (10) обращает уравнение (1) в тождество. Достаточно внести в формулу ниже $Q(u, v)$ из (10) и осуществить сокращение

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(u,v,\varepsilon)Q(u,v)\mathrm{e}^{-i(ux+vy)}\,du\,dv = f(x,y).$$

В результате получается

$$\mathbf{K}q = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-i(ux+vy)}F(u,v)\,du\,dv = f(x,y),\ x,y \in \Omega.$$

2. Для исследования особенностей решения на прямолинейных участках и в угловых точках границы применяются приемы, используемые в [20]. В результате доказывается, что на прямолинейной границе особенность контактных напряжений имеет вид $x^{-1/2}$, $y^{-1/2}$, а в угловых точках

$$q_1(x,y) = O(r^{-3/4}) \text{ при } r = \sqrt{x^2 + (\pm a \mp y)^2} \to 0.$$

Последнее выражение близко к полученному приближению для угловой точки штампа в [20, стр. 130]. В построенном таким образом решении необходимо совершить предельный переход $\varepsilon \to 0$ [1].

Выводы

Построенное решение имеет интегральное представление, удобное для численного анализа, и дает возможность получать его асимптотические представления как для относительно широких полуполос, так и для узких. Модель пригодна для анализа сейсмичности в горных регионах.

Список литературы

1. Бабешко В.А, Евдокимова О.В, Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Уафа С.Б. Динамические контактные задачи для композитных сред с анизотропной структурой. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №2. С. 182–191. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-2-182-191.

2. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979. 320 с.

3. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977. 742 с.

4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. *Приближенное решение операторных уравнений.* М.: Наука, 1969. 454 с.

5. Горячева И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.

6. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

7. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

8. Liu M., Huang H. Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 165. P. 34–49. ttps://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.01.026.

9. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3-0 algorithm for generating representative volumes in Acelan-Compos package. *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 44. Iss. 3. P. 392–403. DOI: 10.18720/MPM.4432020_10.

10. Sundar U., Lao Z., Cook-Chennault K. Investigation of piezoelectricity and resistivity of surface modified barium titanate nanocompositesm. *Polymers*. 2019. Vol. 11. Iss. 12. Article No 2123. https://doi.org/10.3390/polym11122123.

11. Ehterami A., Kazemi M., Nazari B., Saraeian P., Azami M. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high piezoelectric coefficient for bone tissue engineering applications. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2018. Vol. 79. P. 195–202. https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.12.034.

12. Saheb N., Hayat U., Hassan S.F. Recent advances and future prospects in spark plasma sintered alumina hybrid nanocomposites. *Nanomaterials*. 2019. Vol. 9. Iss. 11. Article No 1607. https://doi.org/10.3390/nano9111607.

13. Toozandehjani M., Matori K.A., Ostovan F., Aziz S.A., Mamat S.M. Effect of milling time on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al_2O_3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 11. Article No 1232. https://doi.org/10.3390/ma10111232.

14. Mathew J., Mandal A., Deepak Kumar S., Bajpai S., Chakraborty M., West G.D., Srirangam P. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast Al-Cu-TiB_2 composites. *Journal of Alloys and Compounds*. 2017. Vol. 712. P. 460–467. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.04.113.

15. Mavros H., Karantzalis A.E., Lekatou A. Solidification observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites. *Journal of Composite Materials*. 2013. Vol. 47. Iss. 17. P. 2149–2162. DOI: 10.1177/0021998312454901.

16. Mao H.-J., Liu D.-F., Zhang N., Huang T., Kuhnert I., Yang J.-H., Wang Y. Constructing a microcapacitor network of carbon nanotubes in polymer blends via crystallization-induced phase separation toward high dielectric constant and low loss. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2020. Vol. 12. Iss. 23. P. 26444–26454. https://doi.org/10.1021/acsami.0c04575.

17. Evgin T., Turgut A., Hamaoui G., Spitalsky Z., Horny N., Micusik M., Chirtoc M., Sarikanat M., Omastova M. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization. *Beilstein Journal of Nanotechnology*. 2020. Vol. 11. Iss. 1. P. 167–179. https://doi.org/10.3762/bjnano.11.14.

118. Айзикович С.М., Кудиш И.И. Приближенное аналитическое решение задачи о полосовом электроде на поверхности пьезоэлектроупругой полуплоскости с функционально-градиентным пьезоэлектроупругим покрытием. *Проблемы прочности и пластичности.* 2019. Т. 81. №4. С. 393–401. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-393-401.

19. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Об одной модели индентирования функционально-градиентной полосы. *Доклады АН*. 2019. Т. 485. №5. С. 564–567. https://doi.org/10.31857/S0869-56524855564-567.

20. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. *Динамика неоднородных линейно-упругих сред*. М.: Наука, 1989. 344 с.

References

1. Babeshko V.A, Evdokimova O.V, Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Uafa S.B. Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya kompozitnykh sred s anizotropnoy strukturoy [Dynamic contact problems for composite media with anisotropic structure]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2024. Vol. 86. No 2. P. 182–191 (In Russian).

2. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [*Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).

3. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz* [*Functional Analysis*]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 742 p. (In Russian).

4. Krasnoselskiy M.A., Vaynikko G.M., Zabreyko P.P. et al. *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy* [*Approximate Solution of Operator Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1969. 454 p. (In Russian)

5. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya* [*Mechanics of Frictional Interaction*]. Moscow. Nauka Publ. 2001. 478 p. (In Russian).

6. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granichnykh elementov* [*Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

7. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritelno napryazhennykh tel* [*Contact Problems for Prestressed Bodies*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 240 p. (In Russian).

8. Liu M., Huang H. Poroelastic response of spherical indentation into a half space with a drained surface via step displacement. *Int. J. Solids Struct*. 2019. Vol. 165. P. 34–49. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.01.026.

9. Kudimova A.B., Nadolin D.K., Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Oganesyan P.A., Soloviev A.N. Finite element homogenization of piezocomposites with isolated inclusions using improved 3-0 algorithm for generating representative volumes in Acelan-Compos package. *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 44. Iss. 3. P. 392–403. DOI: 10.18720/MPM.4432020_10.

10. Sundar U., Lao Z., Cook-Chennault K. Investigation of piezoelectricity and resistivity of surface modified barium titanate nanocompositesm. *Polymer*s. 2019. Vol. 11. Iss. 12. P. 2123. https://doi.org/10.3390/polym11122123.

11. Ehterami A., Kazemi M., Nazari B., Saraeian P., Azami M. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high piezoelectric coefficient for bone tissue engineering applications. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 2018. Vol. 79. P. 195–202. https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.12.034.

12. Saheb N., Hayat U., Hassan S.F. Recent advances and future prospects in spark plasma sintered alumina hybrid nanocomposites. *Nanomaterials*. 2019. Vol. 9. Iss. 11. Article No 1607. https://doi.org/10.3390/nano9111607.

13. Toozandehjani M., Matori K.A., Ostovan F., Aziz S.A., Mamat S.M. Effect of milling time on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al_2O_3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 11. Article No 1232. https://doi.org/10.3390/ma10111232.

14. Mathew J., Mandal A., Deepak Kumar S., Bajpai S., Chakraborty M., West G.D., Srirangam P. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast Al-Cu-TiB_2 composites. *J. Alloy. Compd*. 2017. Vol. 712. P. 460–467. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.04.113.

15. Mavros H., Karantzalis A.E., Lekatou A. Solidification observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites. *J. Compos. Mater*. 2013. Vol. 47. Iss. 17. P. 2149–2162. DOI: 10.1177/0021998312454901.

16. Mao H.-J., Liu D.-F., Zhang N., Huang T., Kuhnert I., Yang J.-H., Wang Y. Constructing a microcapacitor network of carbon nanotubes in polymer blends via crystallization-induced

phase separation toward high dielectric constant and low loss. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2020. Vol. 12. Iss. 23. P. 26444–26454. https://doi.org/10.1021/acsami.0c04575.

17. Evgin T., Turgut A., Hamaoui G., Spitalsky Z., Horny N., Micusik M., Chirtoc M., Sarikanat M., Omastova M. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization. *Beilstein J. Nanotechnol.* 2020. Vol. 11. Iss. 1. P. 167–179. https://doi.org/10.3762/bjnano.11.14.

18. Ayzikovich S.M., Kudish I.I. Priblizhennoe analiticheskoe reshenie zadachi o polosovom elektrode na poverkhnosti pyezoelektrouprugoy poluploskosti s funktsionalno-gradientnym pyezoelektrouprugim pokrytiem [Approximated analytical solution of the problem about an electrode on the piezoelectroelastic half-placewith piezoelectroelastic functionally graded coating]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2019. Vol. 81. No 4. P. 393–401 (In Russian).

19. Vatulyan A.O., Plotnikov D.K. Ob odnoy modeli indentirovaniya funktsionalno-gradientnoy polosy [On a model of indentation for a functionally graded strip]. *Doklady Akademii Nauk*. 2019. Vol. 485. No 5. P. 564–567 (In Russian).

20. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [*Dynamics of Inhomogeneous Linear Elastic Media*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 344 p. (In Russian).

DYNAMIC CONTACT PROBLEMS FOR A HALF-STRIP STAMP ON AN ANISOTROPIC COMPOSITE*

Babeshko V.A.[1,2]**, Evdokimova O.V.**[2]**, Babeshko O.M.**[1]**, Evdokimov V.S.**[1]**, Khripkov D.A.**[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2024/09/28

For the first time, the exact solution of the dynamic contact problem of the frictionless action of a rigid die in the form of a half-strip on an anisotropic multilayer composite base is constructed by the block element method. It is assumed that the stamp is subjected to a harmonic effect in time, causing a wave process outside the contact zone. Thus, for the first time, the two-dimensional Wiener – Hopf integral equation with a difference kernel in the region representing the half-band is precisely solved. Using known numerical methods, it is possible to describe the behavior of the concentration of contact stresses at the stamp boundary in cases of isotropic materials. However, it was not possible to construct an accurate solution for the distribution of contact stresses in the anisotropic case under a half-strip stamp, together with features at the boundary. For the first time, a solution was constructed reflecting the real distribution of contact stresses and their concentrations under the stamp. The solution obtained in the work tends to the solutions obtained for a strip or a quarter of the plane when the half-strip degenerates into these areas. To ensure the correct formulation of the problem, the principle of Mandelstam's marginal absorption is applied. The block element method, factorization methods, and the Newton – Kantorovich method are used in the research process. The constructed exact solution of the contact problem makes it possible to distinguish functions describing the concentration of contact stresses at the boundaries of the stamp, including at

* Completed with the financial support of the RSF and Kuban Scientific Foundation (regional project No 24-11-20006).

the corner points of the half-strip stamp. The constructed indicators of the concentration of contact stresses in the angular zones of the half-strip stamp are close to the values constructed earlier in publications by approximate methods. The result of this work can be useful in engineering practice, seismology, as well as in other fields.

Keywords: dynamic contact problem, half-band stamp, composite material, anisotropic medium, integral equation, block element method.