

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-445-460

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ  
НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ  
МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН,  
КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДОЙ.  
2. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ\***

© 2024 г.

**Янковский А.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

yankovsky\_ap@itam.nsc.ru

*Поступила в редакцию 01.03.2024*

Для однородных изотропных кольцевых пластин с жесткой вставкой, покоящихся на несжимаемом жидком основании, проведено сравнение решений, полученных аналитически П. Ходжем, и численным методом, разработанным ранее автором. На конкретных примерах продемонстрирована сходимость численного решения и его хорошее согласование с полным точным решением. При этом точность определения предельного значения поперечной нагрузки, приложенной к жесткой вставке, составляет 1-2%. Показано, что численное решение не является полным, так как позволяет рассчитать только предельное значение внешней активной нагрузки, приложенной к изгибаемой пластине, но не позволяет определить величину отпора жидкости в предельном состоянии конструкции. Проанализировано влияние параметров армирования пластин на предельную величину поперечной силы, приложенной к жесткой вставке. Исследованы варианты укладки арматуры по логарифмическим спиральям, по прямолинейным траекториям и по радиальным и/или окружным траекториям. Показано, что наибольшей несущей способностью обладают пластины с радиально-окружной структурой, когда в каждой ее точке суммарная плотность армирования равна максимально допустимому значению. Впервые рассмотрен нетрадиционный вариант граничных условий на внешней кромке пластины, работающей в указанных условиях, – свободный край. Продемонстрировано, что в случае конструктивного исполнения изделия, когда в предельном состоянии пластины невозможно перетекание жидкости с одной ее лицевой поверхности на другую, несущая способность пластины со свободным внешним краем в несколько раз меньше, чем пластины с опертой внешней кромкой. Показана возможность возникновения в предельном состоянии армированных пластин абсолютно жесткой кольцевой подобласти, примыкающей к внутренней вставке.

*Ключевые слова:* металлокомпозитные кольцевые пластины, несжимаемое жидкое основание, жесткая вставка, армирование проволоками, жестко-

---

\*Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

пластическая модель, несущая способность, предельное состояние, кусочно-линейные кривые текучести, численная схема, линейное программирование.

## Введение

Современные изделия из композитных материалов (КМ) могут испытывать нагрузки высокой интенсивности [1–3], при которых субструктурные элементы композиции могут вести себя неупруго [2, 4, 5]. Поэтому актуальна проблема математического моделирования пластического деформирования КМ и конструкций из них, которая в настоящее время находится на стадии становления [2, 5–14]. В ряде случаев изделия типа пластин и оболочек могут контактировать с жидкостью [7, 9, 15–18]. Моделирование механического поведения тонкостенных конструкций в таких ситуациях также представляет практический интерес.

В первом приближении для определения несущей способности тонкостенных изделий (в том числе и композитных) по второму предельному их состоянию можно использовать жесткопластическую модель [19], применение которой описано в [7, 9, 12–16]. В статье [20] был проведен критический анализ результатов, полученных ранее в [7, 9, 16], и указаны их серьезные недостатки и даже ошибочность.

В настоящей статье продолжается исследование, опубликованное в [20], где на основе принципа виртуальной мощности был сформулирован экстремальный принцип определения верхней (кинематической) границы несущей способности изгибаемых армированных кольцевых пластин с жесткой внутренней вставкой, покоящихся на несжимаемом жидком основании, и разработан численный метод решения соответствующей дискретизированной задачи, основанный на применении теории линейного программирования. Проведена верификация предложенного в [20] численного метода и сделан анализ влияния на предельную поперечную нагрузку параметров структуры армирования кольцевых пластин, покоящихся на несжимаемом жидком основании.

### 3. Верификация численного метода решения<sup>1</sup>

С целью верификации численного метода, разработанного в разделе 1 (см. [20]), рассмотрим тестовые задачи, для которых известны полные решения, полученные аналитически [9, 15]. А именно, предполагаем, что пластина постоянной толщины  $H = 2h = 1$  см изготовлена из алюминиевого сплава Д16 с пределом текучести  $\sigma_0 = 380$  МПа [4], пластическое течение которого описывается критерием текучести Треска. Кромки пластины имеют радиусы  $R_0 = 0,25$  м и  $R_1 = 1$  м. На внутренней кромке пластина жестко соединена с шайбой (см. (8) и (14) из [20]), а на внешней кромке может быть задана шарнирная опора или жесткое защемление. Конструкция нагружена только силой  $P_z$ , приложенной к шайбе, то есть в (5)  $\bar{P}_z = 1$  Н и  $\bar{p}_z(r) = 0$ .

В случае шарнирного опирания внешней кромки (см. первое равенство (13) в [20] при  $v_1^* = 0$ ) точное значение предельной нагрузки  $P_z$  определяется из решения системы нелинейных уравнений [15]:

$$P(r_1 - R_0) + \bar{q} \frac{r_1^3 - R_0^3}{3} + R_0 M_0 = 0,$$

<sup>1</sup>Для удобства изложения продолжается сквозная нумерация разделов, формул и рисунков, начатая в [20].

$$\begin{aligned}
P \ln \frac{r_2}{r_1} + \bar{q} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + M_0 &= 0, \\
P(R_1 - r_3) + \bar{q} \frac{R_1^3 - r_3^3}{3} + M_0 r_3 - 2R_1 M_0 &= 0, \\
P = -\frac{M_0 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad \bar{q} = \frac{M_0}{r_3^2 - r_2^2}, \quad P_z = 2\pi(M_0 - P), \quad q = 2\bar{q},
\end{aligned} \tag{19}$$

где  $M_0 = h^2 \sigma_0$ ;  $r_1, r_2, r_3$  – значения радиусов окружностей, при переходе через которые изменяется режим пластического течения на кривой Треска при плоском напряженном состоянии (не путать с узлами сетки дискретизированной задачи, введенными в разделе 1), причем  $R_0 < r_1 < r_2 < r_3 < R_1$ .

В случае жесткой заделки внешней кромки (см. (13) из [20] при  $v_1^* = 0$  и  $\vartheta_1^* = 0$ ) точное значение  $P_z$  получается из решения системы уравнений:

$$\begin{aligned}
P(r_1 - R_0) + \bar{q} \frac{r_1^3 - R_0^3}{3} + M_0 R_0 &= 0, \\
P \ln \frac{r_2}{r_1} + \bar{q} \frac{r_2^2 - r_1^2}{2} + M_0 &= 0, \\
P(r_4 - r_3) + \bar{q} \frac{r_4^3 - r_3^3}{3} + M_0 r_3 - 2M_0 r_4 &= 0, \\
(P - 2M_0) \ln \frac{R_1}{r_4} + \bar{q} \frac{R_1^2 - r_4^2}{2} - M_0 &= 0, \\
P = -\frac{M_0 r_2^2}{r_3^2 - r_2^2}, \quad \bar{q} = \frac{M_0}{r_3^2 - r_2^2}, \quad P_z = 2\pi(M_0 - P), \quad q = 2\bar{q},
\end{aligned} \tag{20}$$

где использованы те же обозначения, что и в (19).

В таблице 1 приведены значения предельной нагрузки  $P_z$ , рассчитанные по формулам (19), (20) и численно по формулам из раздела 1 при разных значениях узлов сетки  $M$ , вводимой на отрезке  $r \in [R_0, R_1]$ . Видно, что значения  $P_z$  с увеличением  $M$  стремятся к некоторым предельным числам, то есть имеет место сходимост численного решения.

Таблица 1

**Расчетные значения предельной нагрузки  $P_z$ , приложенной к жесткой шайбе, в случае пластины из алюминиевого сплава Д16**

Закрепление кромки $R_1$	$P_z$ , кН, аналитическое решение (19), (20)	$P_z$ , кН, численное решение				
		$M=13$	$M=26$	$M=51$	$M=101$	$M=201$
Шарнир	303,82	393,37	350,82	320,84	306,88	300,18
Заделка	351,77	560,76	426,97	377,24	354,98	344,38

Значения  $P_z$ , определенные численно при  $M=201$ , получились на 1-2% меньше аналитических решений. Это объясняется тем, что при точном решении в предельном состоянии пластины возникают пластические шарниры (три в случае использования соотношений (19) и четыре – в случае (20) [9, 15]). Разработанный в разделе 1 [20] численный метод не учитывает в явном виде появление пластических шарниров. В рамках этого метода каждый такой шарнир как бы «размазывается» между тремя

соседними узлами сетки, что приводит к некоторому занижению мощности диссипации механической энергии  $D$  при изгибном деформировании пластины и, как следствие, к некоторому занижению, хотя и незначительному, значения предельной нагрузки по сравнению с точным решением. Из всех значений  $P_z$ , полученных численно и представленных в таблице, с аналитическими решениями лучше всего согласуются результаты расчетов, выполненных при  $M = 101$ . Ошибка при этом не превышает 1%, поэтому далее численные расчеты будем проводить, задавая  $M = 101$ .

#### 4. Анализ влияния параметров структуры армирования пластины на предельную нагрузку

Исследуем влияние параметров структуры армирования (углов и плотностей) на значение предельной нагрузки, выдерживаемой КМ-пластиной, покоящейся на жидком несжимаемом основании. Толщина пластины и размеры конструкции в плане приняты такими же, как в разделе 3. Металлокомпозитные пластины изготовлены из алюминиевого сплава Д16 и армированы двумя семействами стальной проволоки марки У8А:  $\sigma_{[k]} = 2400$  МПа,  $k = 1, 2$  [4].

Отметим, что из рассмотрения сразу же следует исключить наиболее часто встречающийся на практике вид нагружения изгибаемой конструкции, а именно: нагружение только равномерной поперечной нагрузкой  $\bar{p}_z^0$  как самой пластины, так и шайбы. Действительно, в этом случае в равенствах (5) из [20] получаем

$$\bar{P}_z = \pi R_0^2 \bar{p}_z^0, \quad \bar{p}_z(r) = \bar{p}_z^0 = \text{const}. \quad (21)$$

Подстановка этих выражений в (6) при учете (8), (9) и  $\bar{Q}_z^1 = 0$ ,  $\bar{m}_n^0 = \bar{m}_n^1 = 0$  приводит к тому, что квадратная скобка в уравнении (6) становится равной нулю. Так как в предельном состоянии пластины правая часть в (6) не может быть равна нулю, в рассматриваемом случае из (6) следует, что параметр  $p \rightarrow \infty$ , то есть при таком виде нагружения конструкция обладает неограниченно большой несущей способностью. Если же при выполнении равенств (21) имеют место неравенства  $\bar{Q}_z^1 \neq 0$  и/или  $\bar{m}_n^0 \neq 0$  и/или  $\bar{m}_n^1 \neq 0$ , то конечная предельная нагрузка (значение параметра  $p^*$ ) может быть определена из сформулированной в разделе 1 экстремальной задачи.

Далее в настоящем разделе для конкретности предполагаем, что, как и в [7, 9, 15, 16], рассматриваемая КМ-конструкция нагружается только поперечной силой  $P_z$ , приложенной к шайбе, то есть в соотношении (11) (см. [20]) принимаем  $\bar{P}_z = 1$  Н,  $\bar{Q}_z^1 = 0$ ,  $\bar{m}_n^0 = \bar{m}_n^1 = 0$  и  $\bar{p}_z(r) = 0$ .

**4.1. Влияние направлений армирования при фиксированном расходе арматуры.** Сначала исследуем вырожденный случай первого варианта армирования – укладка проволок по прямолинейным траекториям (см. рис. 1б в [20]), так как из всех спиральных структур такое армирование наиболее просто реализуется на практике. В силу осевой симметрии задачи углы армирования  $\psi_k(r)$  при этом вычисляются по формуле Клеро [21] (геодезические направления):

$$r \sin \psi_k(r) = R_0 \sin \psi_k^0 = \text{const} > 0, \quad k = 1, 2, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (22)$$

где  $\psi_k^0$  – угол армирования проволокой  $k$ -го семейства на внутренней кромке пластины  $r = R_0$  (см. рис. 1б [20]), где  $\psi_1^0 = \pi/4$ .

Из формул (2) (см. [20]) при учете (22) следует, что интенсивности армирования  $\omega_k(r)$  при такой структуре КМ-пластины монотонно убывают по радиусу  $r$  и остаются

положительными, если  $\omega_k^0 > 0$  ( $k = 1, 2$ ). При задании  $\omega_1^0 = \omega_2^0$  и  $\psi_1^0 = -\psi_2^0$  из равенств (2), (22) получаем  $\omega_1(r) = \omega_2(r)$  и  $\psi_1(r) = -\psi_2(r)$ . В силу того, что  $\omega_k(r)$  положительные убывающие функции от  $r$ , физическое ограничение (3) достаточно проверять только при  $r = R_0$ .

Объем КМ-пластины  $V_p$  и общий объем арматуры в ней  $V_f$  вычисляются по формулам

$$V_p = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} H(r) r dr, \quad V_f = V_1 + V_2, \quad V_k = 2\pi \int_{R_0}^{R_1} H(r) \omega_k(r) r dr, \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Как и в разделе 3, рассмотрим пластины постоянной толщины  $H(r) = 2h(r) = H = \text{const}$ . Для КМ-пластины с параметрами армирования (2) и (22) при углах  $\psi_1^0 = -\psi_2^0 = \pi/3$  зададим  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = 0,35$ , что позволяет удовлетворить неравенство (3) во всех точках  $r$  с предельно допустимым значением  $\omega_m = 0,7$ . Относительный объем проволоки  $\Omega$  в такой пластине ( $\Omega = V_f/V_d$ ; см. (23) с учетом (2) и (22)) примем за эталонное значение

$$\Omega_e = 0,1589. \quad (24)$$

На рис. 2а (см. [20]) изображены кривые текучести такой композиции в безразмерных усредненных напряжениях  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0$  ( $i = 1, 2$ ), рассчитанные в трех характерных точках пластины (см. (15) и (16) в [20]): кривая 1 – при  $r = R_0$  ( $\psi_1(r) = \psi_1^0 = \pi/3$ ), кривая 2 – при  $r = \sqrt{1,5}R_0$  ( $\psi_1(r) = \pi/4$ ) и кривая 3 – при  $r = R_1$  ( $\psi_1(r) \approx 0,218$  рад). При этом кривая 2 является шестиугольником, симметричным относительно прямой  $\sigma_2 = \sigma_1$ , а кривая 3 – восьмиугольником, визуально почти выродившимся в шестиугольник. Сравнение кривых на рис. 2а демонстрирует, насколько существенно изменяются кривые текучести композиции в зависимости от значения полярного радиуса  $r$  ( $R_0 \leq r \leq R_1$ ) в КМ-пластине, причем это изменение является не только количественным, но и качественным. Поэтому расчеты, выполненные, например, в статье [7] в предположении о постоянстве кривых текучести во всех точках изгибаемой КМ-пластины, являются необоснованно идеализированными, даже несмотря на допущенные в статье [7] ошибки, о которых уже говорилось во введении в [20].

Будем варьировать углы  $\psi_1^0 = -\psi_2^0$  в КМ-пластине с рассматриваемым типом армирования в диапазоне  $\psi_1^0 \in [0, \pi/3]$ , а интенсивности армирования  $\omega_1^0 = \omega_2^0$  при различных  $\psi_1^0$  будем выбирать так, чтобы относительный объем проволоки  $\Omega$  в ней, полученный с использованием формул (2), (22) и (23), равнялся эталонному значению (24). Углы в пределах  $\psi_1^0 \in (\pi/3, \pi/2)$  при таком армировании не рассматриваются, потому что при требовании  $\Omega = \Omega_e$  нарушается неравенство (3).

На рис. 3 изображены зависимости предельной силы  $P_z$  от угла армирования  $\psi_1^0$  на внутренней кромке пластины. Штриховые кривые 1–3 определены для рассматриваемого случая укладки проволоки по геодезическим траекториям (см. рис. 1б в [20]). Кривая 1 получена при жестком скреплении шайбы с пластиной и при жесткой заделке ее внешней кромки (см. (8), (13), (14) в [20] при  $v_1^* = 0$  и  $\vartheta_1^* = 0$ ); кривая 2 – при жестком скреплении шайбы с пластиной и при шарнирном опирании ее внешней кромки (см. (8), (14) и первое равенство (13) при  $v_1^* = 0$ ); кривая 3 – при шарнирном скреплении шайбы с пластиной и при шарнирном опирании ее внешней кромки (см. (8) и первое равенство (13) при  $v_1^* = 0$ ). Все три кривые монотонно

убывают, следовательно, из всех прямолинейно армированных пластин наибольшую несущую способность имеют пластины с радиальной укладкой проволок ( $\psi_1^0 = -\psi_2^0 = 0$ ). Однако рассматриваемые кривые обладают достаточно малой изменчивостью (особенно кривая 3), а значит, варьирование углов  $\psi_1^0 = -\psi_2^0$  несущественно влияет на изменение предельной нагрузки  $P_z$  при таком типе армирования пластины.

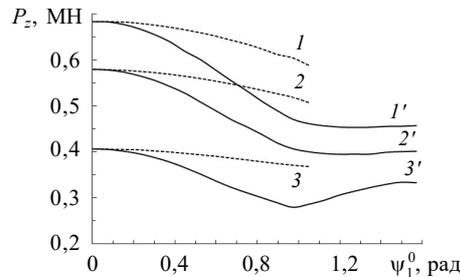


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки, приложенной к жесткой вставке, от угла спирального армирования на внутренней кромке пластины

Исследуем другой тип укладки волокон – армирование по логарифмическим спиралям:  $\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi_1^0$ ,  $R_0 \leq r \leq R_1$  (см. рис. 1а в [20]). В этом случае для пластины постоянной толщины из формулы (2) следует, что

$$\omega_k(r) = \frac{R_0 \omega_k^0}{r}, \quad k = 1, 2, \quad R_0 \leq r \leq R_1. \quad (25)$$

Следовательно, интенсивности армирования  $\omega_k$  не зависят от углов укладки проволок  $\psi_k^0$  и монотонно убывают по радиусу  $r$ . Если задано  $\omega_1^0 = \omega_2^0$ , то из (25) получаем  $\omega_1(r) = \omega_2(r)$ . Таким образом, при фиксированных значениях  $\omega_1^0 = \omega_2^0$  и любых углах армирования  $\psi_1^0 \in [0, \pi/2)$  в пластинах, усиленных по логарифмическим спиралям, общий расход арматуры одинаков. Согласно (23) и (25), при задании  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = 0,1986$  относительный объем арматуры  $\Omega$  в такой КМ-пластине равен эталонному значению (24).

Зависимости от углов  $\psi_1^0$  предельной силы  $P_z$  для пластин, армированных по логарифмическим спиралям, изображены на рис. 3 сплошными кривыми 1'–3', которые рассчитаны при тех же типах опирания внешней кромки КМ-пластины и ее скрепления с шайбой, что и кривые 1–3 соответственно. Кривые 1'–3' ведут себя немонотонно и имеют значительную изменчивость, однако наибольшее предельное значение внешней нагрузки  $P_z$  и при таких структурах армирования по-прежнему обеспечивает укладка силовых элементов в радиальном направлении (см. точки на кривых 1'–3' при  $\psi_1^0 = 0$ ).

На рис. 4 приведены нормированные эпюры скоростей  $v(r)$ , полученные при разных углах  $\psi_1^0$  в случае армирования пластины по логарифмическим спиралям и при наличии шарниров на обеих ее кромках  $r = R_0, R_1$  (кривые 1–3). Зависимость  $P_z(\psi_1^0)$  при этом характеризуется кривой 3' на рис. 3. Сплошные кривые на рис. 4 соответствуют предельному состоянию КМ-пластины ( $R_0 \leq r \leq R_1$ ), а пунктирная горизонтальная линия определяет скорость точек жесткой шайбы ( $0 \leq r < R_0$ ). Ординаты точек пунктирной прямой положительны (равны единице) в силу того, что вертикальная ось  $z$  ранее предполагалась направленной вниз. Сплошная кривая 1 получена при  $\psi_1^0 = 0$  (радиальное армирование), кривая 2 – при  $\psi_1^0 = 17\pi/42$  (спи-

ральное армирование), а кривая 3 – при  $\psi_1^0 = \pi/2$  (окружная структура при плотностях армирования, распределенных по закону (25) для обоих семейств).

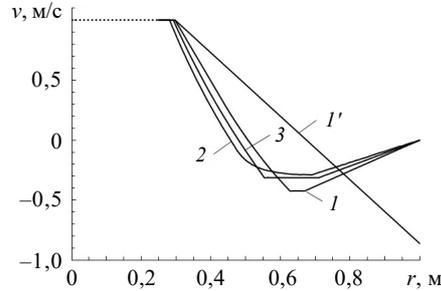


Рис. 4. Зависимость скорости прогиба от полярного радиуса в предельном состоянии пластины при разных углах ее армирования по логарифмическим спиралям и при разных граничных условиях на внешней кромке

Точки изломов на кривых 1–3 на рис. 4 свидетельствуют о появлении в предельном состоянии КМ-пластины пластических шарниров, что ранее было обнаружено и в аналитических решениях для однородных пластин, покоящихся на несжимаемой жидкости [7, 9, 15, 16]. Сравнение этих кривых показывает, что эпюры скоростей  $v(r)$  в предельном состоянии КМ-пластины существенно зависят от структуры армирования, причем при разных значениях  $\psi_1^0$  зависимости  $v(r)$  могут различаться даже качественно. Так, кривая 2 на рис. 4 имеет на один излом меньше, чем кривые 1 и 3, то есть в предельном состоянии пластина со спиральным армированием по направлениям  $\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \psi_1^0 = 17\pi/42$  имеет на один пластический шарнир меньше, чем пластины с радиальной и окружной структурами. Возможность изменения количества пластических шарниров в предельном состоянии КМ-пластины при изменении ее структуры армирования не была ранее обнаружена теоретически в исследованиях [7, 9].

**4.2. Влияние интенсивности армирования при фиксированных траекториях укладки волокон.** Влияние изменения плотностей армирования  $\omega_k(r)$  на значение предельной силы  $P_z$  при фиксированных углах  $\psi_k$  ( $k = 1, 2$ ) исследуем на примере радиально-окружной структуры (см. рис. 1в в [20]). Армирование по радиальным и окружным направлениям в осесимметричном случае изгиба пластины совпадает с укладкой арматуры по направлениям главных напряжений в ее композиции. Структуры с таким типом армирования считаются рациональными [22], о чем свидетельствует и поведение всех кривых на рис. 3: из всех рассмотренных в разделе 4.1 спиральных структур наибольшую несущую способность обеспечивает вырожденная структура с радиальным армированием ( $\psi_1^0 = 0$ ).

В радиально-окружной структуре армирования первое ( $k = 1$ ) семейство проволок укладывается в радиальном направлении ( $\psi_1 = 0$ ), поэтому интенсивность армирования  $\omega_1(r)$  при  $H(r) = 2h(r) = H = \text{const}$ , согласно (2) из [20], определяется по формуле (25). Второе ( $k = 2$ ) семейство проволок укладывается в окружном направлении ( $\psi_2 = \pi/2$ ). При выполнении ограничения (3) его интенсивность армирования  $\omega_2(r)$  может быть произвольной неотрицательной функцией от  $r$ . В частности, можно задать

$$\omega_2(r) = \omega_1^0 - \omega_1(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (26)$$

где  $\omega_1(r)$  определена в (25). Из выражения (26) следует, что при такой структуре суммарная плотность армирования  $\omega_\Sigma$  (см. (3)) является величиной постоянной ( $\omega_\Sigma(r) = \omega_1^0 = \text{const}$ ), а относительное объемное содержание арматуры  $\Omega$ , согласно (23), имеет значение, равное  $\omega_1^0$ .

На рис. 2б (см. [20]) изображены кривые текучести рассматриваемой металлокомпозиции (см. (25) и (26)) в безразмерных усредненных напряжениях  $\bar{\sigma}_i = \sigma_i/\sigma_0$  ( $i = 1, 2$ ), рассчитанные при  $\omega_1^0 = 0,7$  в трех характерных точках пластины (см. (17) и (18) в [20]): кривая 1 – при  $r = R_0$ ; кривая 2 – при  $r = (R_0 + R_1)/3$ ; кривая 3 – при  $r = R_1$ . Сопоставление кривых на рис. 2б, как и на рис. 2а, показывает, насколько существенно изменяются кривые текучести такой металлокомпозиции в зависимости от значения полярного радиуса  $r$  в КМ-пластине даже в том случае, когда при радиально-окружной структуре суммарная плотность армирования остается постоянной величиной. Поэтому расчеты, проведенные в [9] для КМ-пластины с рассматриваемым типом укладки волокон, но в предположении об одинаковости кривых текучести во всех точках пластины (об однородности структуры армирования), также являются необоснованно идеализированными.

Так как при задании плотностей армирования в виде (25) (при  $k = 1$ ) и (26) получаем  $\Omega = \omega_1^0$ , то в рассмотренном выше случае отсутствует возможность варьирования плотностей армирования  $\omega_1(r)$  и  $\omega_2(r)$  в радиально-окружной структуре, обеспечивающих выполнение равенства  $\Omega = \Omega_e$  при разных вариантах задания этих функций. Поэтому временно откажемся от выполнения равенства (26) и для определения плотности армирования окружного семейства волокон воспользуемся, например, линейной зависимостью

$$\omega_2(r) = \frac{r - R_0}{R_1 - R_0} \omega_2^1 + \frac{R_1 - r}{R_1 - R_0} \omega_2^0 \quad (\omega_2^0 = \omega_2(R_0), \omega_2^1 = \omega_2(R_1)). \quad (27)$$

Для обоснованного сравнения несущей способности пластин с радиально-окружными и спиральными структурами армирования потребуем, чтобы и при укладке проволок по радиальным и окружным направлениям относительный объем арматуры  $\Omega$  в них по-прежнему был равен эталонному значению (24). В рассматриваемом случае толщина  $H(r) = H = \text{const}$ , поэтому, согласно (23) с учетом (25) (при  $k = 1$ ) и (27), имеем

$$\begin{aligned} V_p &= \pi H (R_1^2 - R_0^2), \quad V_1 = 2\pi H R_0 (R_1 - R_0) \omega_1^0; \\ V_2 &= \frac{2\pi H}{R_1 - R_0} \left[ \frac{\omega_2^1 - \omega_2^0}{3} (R_1^3 - R_0^3) + \frac{\omega_2^0 R_1 - \omega_2^1 R_0}{2} (R_1^2 - R_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Из последнего равенства следует, что

$$\omega_2^1 = \left( \frac{R_1^3 - R_0^3}{3} - R_0 \frac{R_1^2 - R_0^2}{2} \right)^{-1} \left[ \frac{V_2 (R_1 - R_0)}{2\pi H} + \left( \frac{R_1^3 - R_0^3}{3} - R_1 \frac{R_1^2 - R_0^2}{2} \right) \omega_2^0 \right]; \quad (29)$$

используя выражения  $\Omega = V_f/V_p = \Omega_e$ , (28) и второе соотношение (23), получаем зависимость

$$V_2 = V_2(\omega_1^0) = \pi H [\Omega_e (R_1^2 - R_0^2) - 2R_0 (R_1 - R_0) \omega_1^0]. \quad (30)$$

Учитывая (30) и известное из (24) значение  $\Omega_e$ , параметры  $\omega_1^0$  и  $\omega_2^0$  в соотношении (29) можно варьировать, а значит, согласно (25) и (27), можно получать разные

функции плотностей армирования  $\omega_1(r)$  и  $\omega_2(r)$ . При этом требуется контролировать выполнение ограничения (3) из [20] при условиях  $\omega_1^0 \geq 0$ ,  $\omega_2^0 \geq 0$  и  $\omega_2^1 \geq 0$ .

Расчеты, проведенные для аналогичной ситуации в [13] при разных значениях  $\omega_1^0$  и  $\omega_2^0$  в (29), показали, что в случае изгибаемых КМ-пластин, не покоящихся на несжимаемой жидкости, при фиксированном значении  $\omega_1^0$  наибольшей несущей способностью обладают пластины, для которых значение  $\omega_2^0$  обеспечивает выполнение равенства  $\omega_2^1 = 0$ . Предварительные расчеты, выполненные в рассматриваемом здесь случае, показали, что этот вывод справедлив и в данном исследовании, поэтому в (29) зададим  $\omega_2^1 = 0$ , тогда будем иметь

$$\omega_2^0 = \left( \frac{R_1^3 - R_0^3}{3} - R_1 \frac{R_1^2 - R_0^2}{2} \right)^{-1} \frac{(R_1 - R_0)^2}{2} [2R_0\omega_1^0 - \Omega_e(R_1 + R_0)]. \quad (31)$$

Из формул (25) и (27) при учете (31) следует, что интенсивности армирования радиального и окружного семейства монотонно убывают по  $r$ , поэтому ограничение (3) из [20] достаточно проверять лишь при  $r = R_0$ , учитывая неравенства  $\omega_1^0 \geq 0$  и  $\omega_2^0 \geq 0$ .

На рис. 5 изображены зависимости  $P_z(\omega_1^0)$ , рассчитанные для пластин, имеющих радиально-окружную структуру армирования.

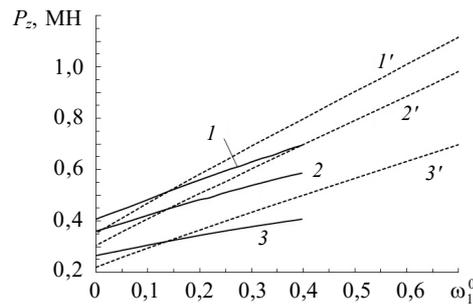


Рис. 5. Зависимость предельной нагрузки, приложенной к жесткой вставке, от плотности армирования на внутренней кромке пластины при радиально-окружных структурах

Сплошные кривые 1–3 получены при использовании равенств (25), (27), (31) и  $\omega_2^1 = 0$ . Эти кривые, как и штриховые кривые 1'–3' (подробнее см. ниже), рассчитаны при тех же условиях закрепления кромок КМ-пластин, что и кривые 1–3, 1'–3' на рис. 3 соответственно. Кривые 1–3 на рис. 5 монотонно возрастают и достигают максимумов при  $\omega_1^0 = 0,3972$ . Для  $\omega_1^0 > 0,3972$  не удается получить рассматриваемую структуру армирования, удовлетворяющую ограничениям (3). Видно, что эти кривые обладают значительной изменяемостью, то есть варьирование параметра  $\omega_1^0$  в соотношениях (25), (27) и (31) действительно позволяет существенно изменить несущую способность исследуемых конструкций. В отличие от этого, в статье [13] было показано, что для аналогичных изгибаемых КМ-пластин с такими же структурами армирования, но не покоящихся на несжимаемой жидкости, изменение параметра  $\omega_1^0$  практически не влияет на их несущую способность.

Сравнение максимумов зависимостей 1–3 на рис. 3 и 5 соответственно показывает, что при спиральном армировании (см. рис. 3) наибольшие значения  $P_z(\omega_1^0)$ , достигаемые при  $\omega_1^0 = 0$  (радиальная структура), всего на 1–1,8% меньше максималь-

ных значений  $P_z(\psi_1^0)$ , достигаемых при  $\omega_1^0 = 0,3972$  в случае радиально-окружной структуры (см. рис. 5) при условии одинакового расхода арматуры в них (см. (24)). Следовательно, как и в [13] для пластин, замена радиальной структуры армирования на радиально-окружную при выполнении равенства  $\Omega = \Omega_e$  не приводит к существенному увеличению несущей способности рассматриваемой конструкции.

Выше изучалась зависимость  $P_z$  от параметров армирования  $\psi_1^0$  и  $\omega_1^0$  для пластин с заданным относительным объемом волокон  $\Omega = \Omega_e$  (см. (24)). Исследуем КМ-пластины, для которых это требование не выполняется. По-прежнему рассматриваем пластины с радиально-окружной структурой; интенсивность армирования радиальным семейством проволок  $\omega_1(r)$  задается формулой (25), где  $k = 1$ , а интенсивность армирования окружным семейством волокон  $\omega_2(r)$  определяется по формуле (26). При этом, как уже отмечалось, суммарная плотность армирования  $\omega_\Sigma$  (см. (3) в [20]) не зависит от  $r$ , поэтому равна  $\Omega$  и параметру  $\omega_1^0$ , который можно варьировать в интервале  $\omega_1^0 \in [0, 0,7]$ .

На рис. 5 штриховые кривые  $I'-3'$  характеризуют зависимости  $P_z(\omega_1^0) = P_z(\Omega)$  для исследуемых КМ-пластин. Ординаты точек на этих кривых при  $\omega_1^0 = 0$  равны значениям  $P_z$  для однородных изотропных пластин из сплава Д16, для кривых  $I'$  и  $2'$  эти значения представлены в таблице 1 при  $M = 101$ . Кривые  $I'-3'$  на рис. 5 монотонно возрастают практически по линейному закону и изменяемость этих кривых значительно больше, чем кривых  $I-3$ . Возрастающий характер кривых  $I'-3'$  наглядно демонстрирует эффект, достигаемый за счет армирования изгибаемых пластин, покоящихся на несжимаемом жидком основании. Так, сравнение ординат правых и левых точек на этих кривых показывает, что за счет армирования несущую способность рассматриваемых пластин можно увеличить более чем в 3 раза. При  $\omega_1^0 = \Omega_e$  (см. (24)) ординаты точек на кривых  $I'-3'$  на 23–30% меньше, чем ординаты правых точек на кривых  $I-3$  соответственно, то есть при одинаковом расходе волокон ( $\Omega = \Omega_e$ ) радиально-окружная структура с плотностями армирования (25) и (26) является менее эффективной, чем аналогичная структура с параметрами (25), (27), (31) и  $\omega_2^1 = 0$  при  $\omega_1^0 = 0,3972$ . Сопоставление ординат правых точек на кривых  $I'-3'$  и  $I-3$  соответственно демонстрирует, что использование структуры с последним вариантом параметров армирования (см. кривые  $I-3$ ) дает значения  $P_z$  примерно на 40% меньше, чем в случае задания первого варианта плотностей армирования (см. кривые  $I'-3'$ ). Однако общий расход арматуры при использовании равенств (25), (26) и  $\omega_1^0 = 0,7$  на 76% больше, чем в случае использования соотношений (25), (27), (31) и  $\omega_2^1 = 0$  при  $\omega_1^0 = 0,3972$ .

Выше рассматривались традиционные варианты закрепления кромок пластины [7, 9, 15, 16]: неподвижные заделка или шарнир на внешней кромке ( $r = R_1$ ) и подвижные заделка или шарнир на внутренней кромке ( $r = R_0$ ). Сравнение ординат точек на кривых  $I-3$  и  $I'-3'$  на рис. 3 или 5 при фиксированных значениях  $\psi_1^0$  или  $\omega_1^0$  позволяет проследить за влиянием типа закрепления кромок на несущую способность КМ-пластин. Однако разработанный в разделе 1 (см. [20]) численный метод позволяет решать аналогичные задачи и при нетрадиционных вариантах закрепления и/или нагружения кромок пластины. В частности, внешняя кромка может быть и свободной (подвижный шарнир), если конструктивное исполнение соответствующего изделия не позволяет в предельном состоянии пластины перетекать жидкости, на которой она покоится, с одной лицевой поверхности на другую. Так, на рис. 4 кривая  $I'$  характеризует эпюру скорости прогиба в предельном состоянии

конструкции со свободной внешней кромкой и шарнирным скреплением шайбы с пластиной при ее радиальном армировании. Такому же случаю, но с шарнирной опорой на внешней кромке, соответствует кривая 1 на рис. 4, которая имеет форму, характерную для эпюр  $v(r)$  в случаях традиционного закрепления внешней кромки пластины, покоящейся на несжимаемом жидком основании. Поведение кривой 1' свидетельствует о том, что при свободной внешней кромке в предельном состоянии конструкция приобретает форму усеченного конуса, а это характерно, как правило, для изгибаемых пластин (с шайбой), закрепленных на внешней кромке и не контактирующих с несжимаемой жидкостью [13]. Кривые 1 и 1' на рис. 4 соответствуют одной и той же радиальной структуре армирования, но разным вариантам граничных условий на внешней кромке. При этом в случае кривой 1  $P_z = 0,406$  МН (см. левые точки на кривых 3 и 3' на рис. 3), а в случае кривой 1' на рис. 4  $P_z = 0,130$  МН, то есть замена шарнирного опирания внешней кромки на свободный от закрепления край приводит к уменьшению значения предельной нагрузки в 3,13 раза.

Все сплошные кривые на рис. 4 имеют левый горизонтальный участок. Это означает, что в предельном состоянии соответствующих КМ-пластин в некоторой окрестности шайбы (см. пунктирную линию на рис. 4) возникает абсолютно жесткая армированная кольцевая подобласть. В статьях [7, 9] при построении аналитических решений для КМ-пластин, покоящихся на несжимаемой жидкости, возможность возникновения таких жестких подобластей не рассматривалась. Однако практически во всех обсуждавшихся выше численных расчетах в предельном состоянии КМ-пластин было обнаружено возникновение таких жестких подобластей ( $R_0 \leq r < r_* < R_1$ ), примыкающих к шайбе и имеющих правую границу с координатой  $r_*$ . Аналогичные жесткие подобласти, примыкающие к внешним кромкам КМ-пластин, обнаружены не были.

На рис. 6 изображены зависимости  $r_*$  от углов армирования по логарифмическим спиралям  $\psi_1^0$  (рис. 6а) и от плотностей армирования  $\omega_1^0$  (рис. 6б) в случае радиально-окружной структуры с параметрами (25) и (26).

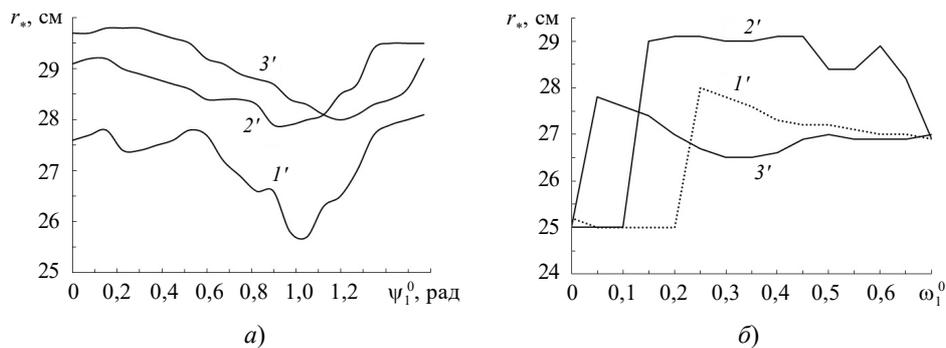


Рис. 6. Зависимость внешнего радиуса жесткой кольцевой КМ-подобласти в предельном состоянии пластины от угла армирования по логарифмическим спиралям (а) и от плотности армирования на внутренней кромке при радиально-окружной структуре (б)

Кривые с номерами 1'–3' на рис. 6а и 6б рассчитаны при тех же условиях, что и кривые 1'–3' на рис. 3 и 5 соответственно. Поведение кривых на рис. 6а свидетельствует о том, что в случае армирования по логарифмическим спиралям с фиксированным относительным объемом волокон (24) при любых углах укладки проволочек  $\psi_1^0 \in [0, \pi/2)$  в предельном состоянии конструкций всегда возникает ука-

занная жесткая подобласть, то есть соответствующие КМ-пластины в окрестности шайбы переармированы. Нижние горизонтальные участки на кривых 1' и 2' на рис. 6б указывают на то, что в соответствующих случаях закрепления внешних кромок КМ-пластин при определенных параметрах их радиально-окружного армирования такие жесткие подобласти в предельном состоянии могут и не возникать (как это априори и предполагалось в [7, 9]). Однако из особенностей общего поведения кривых на рис. 6б видно, что в подавляющем большинстве случаев и при радиально-окружной структуре армирования указанные жесткие КМ-подобласти в предельном состоянии все же возникают, причем даже в случаях шарнирного скрепления КМ-пластин с шайбой (см. кривую 3' как на рис. 6б, так и на рис. 6а).

### **Заключение**

Для однородных металлических кольцевых пластин постоянной толщины при разных типах их закрепления на внешней кромке показаны сходимость разработанного в [20] численного метода и хорошее согласование численных решений с полными решениями, полученными ранее аналитически в [9, 15]. При этом точность определения предельного значения поперечной нагрузки, приложенной к внутренней вставке пластин, составляет 1-2%.

Исследовано влияние особенностей структуры армирования пластин на предельную поперечную нагрузку, приложенную к шайбе. Рассмотрены варианты армирования: по логарифмическим спиралям, по геодезическим линиям (прямолинейным радиально-симметричным траекториям), по радиальным и/или окружным направлениям. Продемонстрирована существенная изменяемость (как количественная, так и качественная) кривых текучести таких композиций в зависимости от полярного радиуса, что является следствием существенной неоднородности указанных структур армирования. Показано, что при одинаковом расходе арматуры из всех спиральных структур, в том числе и с укладкой проволоки по геодезическим направлениям, наибольшую предельную нагрузку обеспечивает структура с радиальным армированием. Примерно такие же, но чуть большие, значения предельной нагрузки при том же расходе арматуры обеспечивает и радиально-окружная структура с рациональным из рассматриваемого множества распределением плотностей армирования в обоих направлениях. Наибольшей несущей способностью обладают КМ-пластины, жестко скрепленные с шайбой и жестко защемленные на внешней кромке и армированные по радиальным и окружным направлениям так, чтобы в каждой точке пластины суммарная плотность армирования была равна ее максимально допустимому значению.

Впервые рассмотрен нетипичный вариант граничных условий на внешней кромке КМ-пластины, покоящейся на несжимаемой жидкости, – свободный край (подвижный шарнир). Такое граничное условие возможно, если конструктивное исполнение изделия не допускает в предельном состоянии пластины перетекания жидкости с одной ее лицевой поверхности на другую. Показано, что несущая способность КМ-пластин со свободным внешним краем в несколько раз меньше, чем пластин, опертых по внешней кромке. Аналогичные результаты можно получить и при подвижной заделке внешней кромки.

Показано, что в подавляющем большинстве рассмотренных вариантов армирования пластин в предельном их состоянии в окрестности шайбы появляется абсолютно жесткая кольцевая армированная подобласть. Возможность появления такой

подобласти ранее в [7, 9] не рассматривалась. Аналогичная жесткая КМ-подобласть в окрестности внешней кромки пластины обнаружена не была.

#### Список литературы

1. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 852 p.
2. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 408 с.
3. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton: CRC Press, 2016. 700 p.
4. Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х. и др. *Композиционные материалы. Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
5. Хазов П.А., Ведяйкина О.И., Помазов А.П., Кожанов Д.А. Упругопластическое деформирование сталебетонных балок с локальным смятием при трехточечном изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. № 1. С. 71–82. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-71-82.
6. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 36. P. 86–112.
7. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Расчет несущей способности ледяных пластин, армированных геосинтетическими волокнами. *Наука и техника в дорожной отрасли*. 2013. №1(64). С. 27–31.
8. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 67. P. 27–38. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004.
9. Джагангиров А.А. Несущая способность усиленной трехслойной волокнистой круглой пластинки, защемленной по контуру и находящейся на несжимаемой среде. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2015. № 4 (33). С. 50–54.
10. Иванов В.А., Кибец А.И., Кибец Ю.И. Конечно-элементная методика решения трехмерной задачи динамики конструкции, подкрепленной системой армирующих элементов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №2. С. 191–201. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-191-201
11. Zoubida Sekkate, Ahmed Aboutajeddine, Abbass Seddouki. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 3. P. 449–474. DOI: 10.1080/15376494.2020.1776431.
12. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 8. P. 1235–1252. DOI: 10.3103/S0025654420080221.
13. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 26. P. 5651–5665. DOI: 10.1080/15376494.2021.1961952.
14. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. P. 1–19. DOI: 10.1080/15376494.2024.2328751.
15. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incompressible fluid. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. No 7. P. 405–414.
16. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Несущая способность усиленных ледяных круглых пластин. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 25–34.
17. Юдин А.С. *Устойчивость и колебания конструктивно-анизотропных и армированных оболочек вращения*. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2011. 362 с.
18. Ченг Ванг, Тонгуи Янг, Ван Ли, Ли Тао, Абузьяров М.Х., Кочетков А.В. Моделирование упругопластического деформирования элементов пространственных конструкций при импульсном взаимодействии с жидкостью на основе метода Годунова повышен-

ной точности. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. № 4. С. 489–499. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-4-488-499.

19. Chakrabarty J. *Applied Plasticity. Second Edition*. New York: Springer, 2010. 755 p.

20. Янковский А.П. Определение верхней границы несущей способности изгибаемых армированных металлокомпозитных кольцевых пластин, контактирующих с жидкой несжимаемой средой. 1. Постановка задачи и метод расчета. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №3. Р. 270–284. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-270-284.

21. Кармо М.П. *Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 608 с.

22. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. *Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов*. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.

### References

1. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 852 p.

2. Solomonov Yu.S., Georgievskiy V.P., Nedbay A.Ya., Andryushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek* [*Principles of Composite Material Mechanics*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2014. 408 p. (In Russian).

3. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton. CRC Press. 2016. 700 p.

4. Vishnyakov L.R., Grudina T.V., Kadyrov V.Kh. et al. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik* [*Composite Materials. Reference Book*]. Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).

5. Khazov P.A., Vedyaykina O.I., Pomazov A.P., Kozhanov D.A. Uprugoplasticheskoe deformirovanie stalebetonnykh balok s lokalnym smyatim pri trekhtochechnom izgibe [Elastic-plastic deformation of steel-concrete beams with local crumpling during three-point bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2024. Vol. 86. No 1. P. 71–82 (In Russian).

6. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *Int. J. Plast.* 2012. Vol. 36. P. 86–112.

7. Nemirovskii Yu.V., Romanova T.P. Raschet nesushchey sposobnosti ledyanykh plastin, armirovannykh geosinteticheskimi voloknami [Calculation of bearing ability of the ice plates reinforced by geosynthetic fibres]. *Nauka i tekhnika v dorozhnoy otrasli* [*Advanced Science and Technology for Highways*]. 2013. No 1(64). P. 27–31 (In Russian).

8. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates. – A review. *Int. J. Impact Eng.* 2014. Vol. 67. P. 27–38. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004.

9. Jahangirov A.A. Nesushchaya sposobnost usilen-noy trekhsloynoy voloknistoy krugloy plastinki, zashchemlennoy po konturu i nakhodya-shcheysya na neszhimaemoy srede [Carrying capacity of reinforced three layers circular composite plate clamped on edge and lying on non compressible foundation]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov* [*Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*]. 2015. No 4 (33). P. 50–54 (In Russian).

10. Ivanov V.A., Kibets A.I., Kibets Yu.I. Konechno-elementnaya metodika resheniya trekhmerno-y zadachi dinamiki konstruksiy, podkreplennykh sistemoy armiruyushchikh elementov [A finite-element methodology of analyzing a 3D problem of dynamics of structures stiffened by a system of reinforcing rods]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2019. Vol. 81. No 2. P. 191–201 (In Russian).

11. Zoubida Sekkate, Ahmed Aboutajeddine, Abbass Seddouki. Elastoplastic mean-field homo-genization: recent advances review. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. Vol. 29. Iss. 3. P. 449–474. DOI: 10.1080/15376494.2020.1776431.

12. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 8. P. 1235–1252. DOI: 10.3103/S0025654420080221.

13. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow

shells and plates. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. Vol. 29. Iss. 26. P. 5651–5665. DOI: 10.1080/15376494.2021.1961952.

14. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2024. P. 1–19. DOI: 10.1080/15376494.2024.2328751.

15. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incompressible fluid. *Int. J. Mech. Sci.* 1967. Vol. 9. No 7. P. 405–414.

16. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Nesushchaya sposobnost usilennykh ledyanykh kruglykh plastin [Carrying capacity of reinforced ice circular plate]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 25–34 (In Russian).

17. Yudin A.S. *Ustoychivost i kolebaniya konstruktivno-anizotropnykh i artifitsirovannykh obolochek vrashcheniya [Stability and Vibrations of Structurally Anisotropic and Artificial Shells of Rotation]*. Rostov-on-Don. Southern Federal University Publ. 2011. 362 p. (In Russian).

18. Cheng Vang, Tongui Yang, Van Li, Li Tao, Abuzyarov M.Kh., Kochetkov A.V. Modelirovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya elementov prostranstvennykh konstruksiy pri impulsnom vzaimodeystvii s zhidkostyu na osnove metoda Godunova povyshennoy tochnosti [Modeling of elastic-plastic deformation of elements of spatial structures during pulse interaction with fluid based on the Godunov's method of increased accuracy]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 4. P. 489–499 (In Russian).

19. Chakrabarty J. *Applied Plasticity. Second Edition*. New York. Springer. 2010. 755 p.

20. Yankovskii A.P. Opredelenie verkhney granitsy nesushchey sposobnosti izgibaemykh armirovannykh metallokompozitnykh koltsevykh plastin, kontaktiruyushchikh s zhidkoy neszhimaemoy sredoy. 1. Postanovka zadachi i metod rascheta [Determination of the upper limit of the load-loading capacity of bending reinforced metal-composite ring plates in contact with a liquid incompressible medium. 1. Problem formulation and calculation method]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 3. P. 270–284 (In Russian).

21. Carmo M.P. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. New Jersey. Prentice-Hall Inc. 1976. 503 p.

22. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. *Optimizaciya elementov konstrukcij iz kompozitsionnykh materialov [Optimization of Structural Elements Made of Composite Materials]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1988. 224 p. (In Russian).

**DETERMINATION OF THE UPPER LIMIT OF THE LOAD-LOADING CAPACITY  
OF BENDING REINFORCED METAL-COMPOSITE RING PLATES IN CONTACT  
WITH A LIQUID INCOMPRESSIBLE MEDIUM.  
2. ANALYSIS OF CALCULATION RESULTS\***

**Yankovskii A.P.**

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,  
Novosibirsk, Russian Federation*

yankovsky\_ap@itam.nsc.ru

*Received by the Editor 2024/03/01*

For homogeneous isotropic annular plates with a rigid insert resting on an incompressible liquid base, a comparison was made of the solutions obtained analytically by Hodge and the numerical method previously developed by the author. Specific examples demonstrate the convergence of the numerical solution and its good agreement with the complete exact solution. In this case, the accuracy of determining the limit value of the transversal load applied to the rigid insert is 1-2%. It is shown that the numerical solution is not complete, since it allows one

---

\*Completed within the framework of the state assignment (state registration No 124021400036-7).

to calculate only the limiting value of the external active load applied to the bending plate, but does not allow one to determine the magnitude of the fluid resistance in the limit state of the structure. The influence of plate reinforcement parameters on the limiting value of the transverse force applied to a rigid insert is analyzed. Options for laying reinforcement along logarithmic spirals, along rectilinear trajectories and along radial and/or circumferential trajectories have been studied. It is shown that plates with a radial-circumferential structure have the greatest load-bearing capacity when at each point the total reinforcement density is equal to the maximum permissible value. For the first time, an unconventional version of the boundary conditions on the outer edge of the plate, which exploit under the specified conditions, is considered - the free edge. It has been demonstrated that in the case of the design of the product, when in the limit state of the plate it is impossible for liquid to flow from one of its front surfaces to another, the load-bearing capacity of a plate with a free outer edge is several times less than with a supported outer edge. The possibility of the emergence of an absolutely rigid annular subregion adjacent to the internal insert in the limit state of reinforced plates is shown.

*Keywords:* metal-composite ring plates, incompressible liquid base, rigid insert, wire reinforcement, rigid-plastic model, load-bearing capacity, limit state, piecewise linear yield curves, numerical scheme, linear programming.