

УДК 539.375

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-432-444

ВЛИЯНИЕ МОДЕЛИ ПОВЕДЕНИЯ ТОНКОГО АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ В СОЕДИНЕНИИ ВНАХЛЕСТ НА ЗНАЧЕНИЕ J -ИНТЕГРАЛА *

© 2024 г. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В.

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

v.boga4eva2014@yandex.ru, vadim@tsu.tula.ru, len4ic92@gmail.com

Поступила в редакцию 02.09.2024

Получена характеристика типа J -интеграла в случае деформирования упругопластического адгезионного слоя, который связывает линейно упругие тела внахлест. Контур интегрирования рассматриваемого интеграла охватывает область предполагаемого необратимого деформирования. Считается, что решение задачи может приводить к наличию ненулевого вектора напряжений на свободной поверхности клеевого слоя с однородным по толщине слоя распределением полей напряжений и деформаций. В случае выполнения условий свободной поверхности на торцевой поверхности клеевого слоя значение J -интеграла определяет произведение толщины адгезионного слоя на сумму удельных упругой энергии и диссипации. Для соединения несущих тел клеевым слоем внахлест из связанной системы уравнений в рамках известных допущений для поля перемещений в несущих линейно упругих телах образца и условия текучести Губера – Мизеса для адгезионного слоя получена замкнутая постановка задачи. С учетом упругого и упругопластического поведения адгезионного слоя получены решения задачи для известных экспериментальных данных для критической внешней нагрузки. В упругопластическом решении найдены области необратимого деформирования. Показано существенное различие в поведении касательных напряжений в упругопластических зонах деформирования и совпадение диагональных компонент тензора напряжений в клеевом слое для рассмотренных моделей его поведения. В случае критической внешней нагрузки найдены значения J -интеграла для относительно малых значений толщин адгезионного слоя. Показано, что в рамках рассмотренных моделей поведения адгезионного слоя предельная величина J -интеграла имеет одно асимптотическое значение при стремлении толщины слоя к нулевому значению.

Ключевые слова: адгезионный слой, упругопластическое деформирование, J -интеграл.

Введение

Изучение прочностных характеристик адгезионных соединений связано с прочностными свойствами адгезионного слоя (АС). Как правило, толщины адгезивов

* Исследование выполнено за счет гранта РНФ № 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> в Тульском государственном университете.

существенно уступают соответствующим размерам сопрягаемых слоев материалов и дефекты АС могут рассматриваться как математический разрез, а сам АС при этом представлен слоем с нулевой толщиной. Это обстоятельство дает право использовать методы и подходы механики квазихрупкого разрушения [1–3] для оценки несущей способности слоистого композита [4–6]. В качестве критерия разрушения можно выбрать J -интеграл [7–9], который связан с коэффициентом интенсивности напряжений [10–13] для случая трещиноподобного дефекта в виде математического разреза.

Однако адгезионные слои имеют конечные размеры и свои механические свойства, в том числе и упругопластические [14]. В этом случае моделирование предельных состояний АС, как правило, основывается на конечно-элементном моделировании с использованием когезионных элементов [15–19], при котором напряженное состояние когезионных элементов связывается с адгезионной прочностью на отрыв и сдвиг. Для слоев с конечной толщиной в случае соединения внахлест имеются аналитические решения, полученные в рамках гипотез пластин при линейно упругом поведении композита [20–22] и с учетом пластических свойств АС [23]. В настоящей статье из системы вариационных уравнений, описывающих состояние равновесия двух тел, соединенных посредством слоя, с учетом гипотезы «дифференциального сдвига» [24] получена система дифференциальных уравнений, на основе решения которой для различных толщин АС найдена прочностная характеристика в виде J -интеграла для композита с линейно упругим поведением сопряженных адгезивом тел и с учетом упругопластических свойств его АС.

1. Постановка задачи

Расчетная схема нагружения образца представлена на рис. 1. Тела 1 и 2 с равными длинами и толщинами деформируются обратимо, а материал АС полагается упругопластическим без упрочнения.

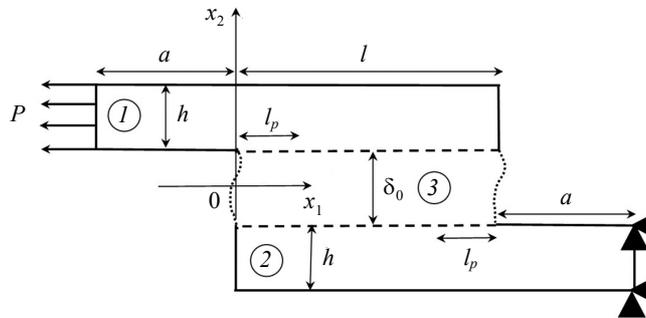


Рис. 1. Схема нагружения образца

Для описания взаимодействия АС с сопряженными им телами воспользуемся концепцией «слоя взаимодействия», развитой в статьях [25–27]. Основываясь на [25], запишем уравнения равновесия для тела 1:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0,5\delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_1} dx_1 \right) = A, \quad (1)$$

для тела 2:

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} ds - \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_l \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + \\ + 0,5 \delta_0 \left(\int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_l \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = 0, \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций в телах l и 2 ; \mathbf{u} – вектор перемещений; $A = \int_{L_1} A_1 dL_1$, $A_1 = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u}$ – удельная работа распределенной внешней нагрузки в теле l ; S_n – площадь сечения n -го тела плоскостью Ox_1x_2 ; L_n – контур левого торца n -го тела в плоскости Ox_1x_2 ($n = 1, 2$); точкой обозначено скалярное умножение; двумя точками – двойное скалярное умножение; $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$, $\bar{\sigma}_{12}$, $\bar{\varepsilon}_{11}$, $\bar{\varepsilon}_{22}$, $\bar{\varepsilon}_{12}$ – компоненты тензоров средних напряжений и деформаций АС, определяемые соотношениями:

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{12} = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0,5\delta_0}^{0,5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\varepsilon}_{11} = 0,5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{22} = \frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0}, \quad (3)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21} = \bar{\varepsilon}_{12} = 0,5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0,5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right). \quad (4)$$

Здесь u_k^+ , u_k^- – соответственно компоненты векторов перемещений верхней и нижней границ слоя, $k = 1, 2$. Согласно концепции «слоя взаимодействия», на границах АС с консолями l и 2 имеет место жесткое сцепление и для векторов напряжений постулируются равенство модулей и противоположность направлений.

Вариационные уравнения равновесия (1) и (2) для упругих тел замыкаются законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon \delta_{ij} \right), \quad (5)$$

где E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона тел l и 2 ; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемная деформация; δ_{ij} – символ Кронекера ($i, j = 1, 2, 3$).

Для материала слоя 3 определяющие соотношения вводим относительно средних компонент тензоров напряжений и деформаций. В области упругого деформирования получим:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right), \quad (6)$$

где E_3 , ν_3 – модуль упругости и коэффициент Пуассона адгезива.

Для упругопластического деформирования АС определяющие соотношения принимаем в виде постоянства интенсивности касательных напряжений [28]:

$$T_p = \sqrt{\frac{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{33})^2 + 6\bar{\sigma}_{12}^2}{6}} = \text{const}. \quad (7)$$

Значение постоянной в (7) определяет предел текучести по интенсивности касательных напряжений. Соответствующий предел текучести может быть определен через предел текучести при одноосном растяжении $T_p = \sigma_0 / \sqrt{3}$, где σ_0 – предел текучести адгезива при одноосном растяжении с одним ненулевым главным напряжением.

В результате решение системы (1)–(7) приводит к полю перемещений $u(x_1, x_2)$ в сопряженных клею телах 1 и 2 (см. рис. 1) при заданных граничных условиях.

2. Нахождение характеристики типа J -интеграла

Следуя [5, 7, 8], запишем термомеханическое соотношение:

$$\oint_{\gamma} \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma = 0, \quad (8)$$

где ψ – удельная (на единицу объема) свободная энергия; n_1 – проекция вектора нормали к поверхности контура на направление оси x_1 ; \mathbf{q} – распределенная нагрузка; γ – замкнутый контур $AMM'SA'B'BA$, показанный на рис. 2а, охватывающий область упругого деформирования композита, проходящий по свободной поверхности SA' тела 1 и левой границе области упругопластического деформирования адгезионного слоя.

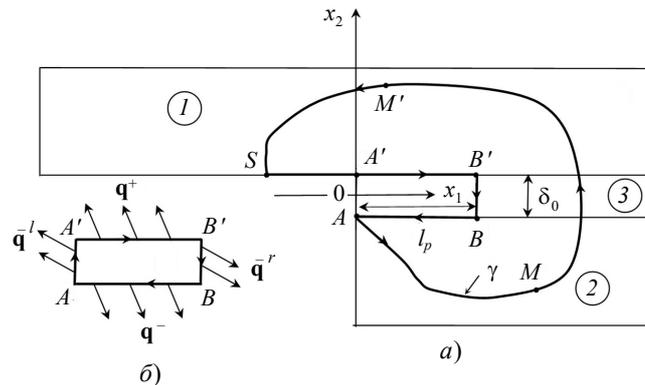


Рис. 2. Контур интегрирования

Представим (8) в виде суммы двух контурных интегралов:

$$J + J_1 = 0, \quad (9)$$

где

$$J = \int_{\gamma_1} \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_1, \quad J_1 = \int_{\gamma_2} \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_2,$$

γ_1 – контур $AMM'S$; γ_2 – контур $SA'B'BA$.

В силу того, что поверхность SA' тела 1 свободна от напряжений и на этой поверхности $n_1 = 0$, контур γ_2 определим как контур $A'B'BA$ по границе области упругопластического деформирования АС. Интеграл J является J -интегралом Черепанова – Райса [5, 8], однако его инвариантность ограничена контурами, проходящими вне зоны диссипации.

Рассмотрим нахождение J -интеграла посредством определения интеграла J_1 . Выделим область диссипации адгезионного слоя, находящуюся в равновесии под действием распределенной нагрузки \mathbf{q} , являющейся по отношению к рассматриваемой области внешней, где \mathbf{q}^+ – нагрузка по верхней границе слоя, \mathbf{q}^- – нагрузка по нижней границе слоя, $\bar{\mathbf{q}}^r$ – нагрузка по правому торцу слоя, $\bar{\mathbf{q}}^l$ – нагрузка по левому торцу слоя. Отметим, что равновесие показанного на рис. 2 композита можно рассмотреть без области диссипации, приложив по контуру сопряжения $A'B'BA$ внешнюю нагрузку, противоположную по знаку нагрузке \mathbf{q} .

Соотношение (8) для упругопластической области $AA'B'BA$, показанной на рис. 2б, ограниченной замкнутым контуром γ_3 , запишем в виде [29]:

$$\oint_{\gamma_3} \left(n_1 \psi - \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} \right) d\gamma_3 = - \int_S \frac{\partial w}{\partial x_1} ds, \quad (10)$$

где w – удельная (на единицу объема) диссипация. С учетом того, что $\gamma_3 = \gamma_2 + AA'$, внешние нагрузки на контуре равны по модулю и противоположны по знаку нагрузкам на участке сопряжения упругопластической и упругой областей и внешние нормали к упругой и упругопластической областям по сопрягаемому участку также имеют противоположные знаки, условие (10) приобретает вид:

$$- \delta_0 \psi_c - \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} - J_1 = \delta_0 w_c, \quad (11)$$

где

$$\delta_0 w_c = - \int_S \frac{\partial w}{\partial x_1} ds,$$

$w_c = w|_{x_1=0}$ – удельная диссипация на торце слоя; $\psi_c = \psi|_{x_1=0}$ – удельная свободная энергия на торце слоя; $\bar{\mathbf{u}} = 0,5(\mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-)$ – вектор средних перемещений на торце слоя; $\bar{\mathbf{q}}^l = -\bar{\sigma}_{11}\mathbf{e}_1 - \bar{\sigma}_{12}\mathbf{e}_2$ – граничные напряжения слоя на торце слоя; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – орты.

Таким образом, из (11) приходим к выражению:

$$- J_1 = \delta_0 (\psi_c + w_c) + \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}. \quad (12)$$

С учетом последнего выражения из (9) следует

$$J = \delta_0 (\psi_c + w_c) + \delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0}. \quad (13)$$

Если граничные напряжения на торце удовлетворяют условию свободной поверхности, то (13) приводит к выражению $J = \delta_0 (\psi_c + w_c)$, полученному в [27].

Векторы напряжений, получаемые в результате решения на торце слоя, могут не удовлетворять условиям свободной поверхности. Из решения задачи при нормальном разрыве слоя [25] на его торце реализуются напряжения $\bar{\sigma}_{11}$, а в случае нагружения слоя по моде II – $\bar{\sigma}_{12}$ [29]. Отметим, что асимптотические решения линейной теории упругости предполагают соответствующие напряжения при нулевой толщине слоя [2]. Рассмотрим поправки в значение (13), связанные со вторым слагаемым в его правой части для линейно упругого деформирования. Так, в случае нормального разрыва слоя $u_1^+ = u_1^- = \bar{u}_1$ и удельная работа торцевых напряжений будет определяться равенством

$$\delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = -\frac{1}{2} \delta_0 \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=0}.$$

Для нагружения по моде II $u_1^+ = -u_1^-$ и в этом случае $\bar{u}_1 = 0$, следовательно,

$$\delta_0 \bar{\mathbf{q}}^l \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=0} = 0.$$

Таким образом, из (13) следует, что в случае нормального разрыва J -интеграл определяется удельной свободной энергией напряжений разрыва $J = (\delta_0 \bar{\sigma}_{22} \bar{\varepsilon}_{22})/2$, а для случая нагружения слоя по моде II – удельной свободной энергией касательных напряжений $J = \delta_0 \bar{\sigma}_{12} \bar{\varepsilon}_{12}$.

Из (9), рассматривая нагрузку на упругопластическую область (см. рис. 2б) в качестве внешней, приходим к следующему определению J -интеграла:

$$J = \delta_0 \left(\Psi \Big|_{x_1=l_p} - \bar{\mathbf{q}}^r \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x_1} \Big|_{x_1=l_p} \right) - \int_0^{l_p} \left(\mathbf{q}^- \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^-}{\partial x_1} + \mathbf{q}^+ \cdot \frac{\partial \mathbf{u}^+}{\partial x_1} \right) dx_1, \quad (14)$$

где $\mathbf{q}^+ = \sigma_{12}^+ \mathbf{e}_1 + \sigma_{22}^+ \mathbf{e}_2$, $\mathbf{q}^- = -\sigma_{12}^- \mathbf{e}_1 - \sigma_{22}^- \mathbf{e}_2$, $\bar{\mathbf{q}}^r = \bar{\sigma}_{11} \mathbf{e}_1 + \bar{\sigma}_{12} \mathbf{e}_2$, $\sigma_{12}^\pm, \sigma_{22}^\pm$ – граничные напряжения слоя; $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}$ – средние напряжения на торцах слоя, связанные с граничными условиями равновесия [25]:

$$\delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{11}}{\partial x_1} = \sigma_{12}^- - \sigma_{12}^+, \quad \delta_0 \frac{\partial \bar{\sigma}_{12}}{\partial x_1} = \sigma_{22}^- - \sigma_{22}^+.$$

3. Нахождение энергетической характеристики

Полагаем, что поле перемещений определено согласно концепции «дифференциального сдвига» [24, 27] в теле 1 как

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1), \quad u_2^{(1)}(x_1, x_2) = 0, \quad (15)$$

а в теле 2

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1), \quad u_2^{(2)}(x_1, x_2) = 0. \quad (16)$$

При рассмотрении состояния плоской деформации в АС, как и в статье [26], принимаем наличие всех диагональных компонент тензора напряжений в адгезионном слое, для которых в силу (15), (16) и условия упругой сжимаемости на всех стадиях деформирования имеет место

$$\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \frac{\nu_3}{1 - \nu_3} \bar{\sigma}_{11}.$$

С учетом этой связи диагональных компонент слоя условие текучести для заданной схемы нагружения адгезива преобразуется к виду:

$$\bar{\sigma}_{12} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_0^2 - \left(\frac{1 - 2\nu_3}{1 - \nu_3} \right)^2} \bar{\sigma}_{11}. \quad (17)$$

Уравнения равновесия (1), (2) с учетом (15)–(17) принимают вид [26]:

$$\frac{d\sigma_{11}^{(k)}}{dx_1} = 0, \quad x_1 \in [-a, 0) \cup (l, l+a], \quad (18)$$

$$h \frac{d\sigma_{11}^{(k)}}{dx_1} + \frac{\delta_0}{2} \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \mp \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_0^2 - \left(\frac{1-2\nu_3}{1-\nu_3} \right)^2 \bar{\sigma}_{11}^2}, \quad x_1 \in (0, l_p) \cup (l-l_p, l], \quad (19)$$

$$h \frac{d\sigma_{11}^{(k)}}{dx_1} + \frac{\delta_0}{2} \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \pm \bar{\sigma}_{21}, \quad x_1 \in (l_p, l-l_p), \quad (20)$$

где

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{du_1^\pm}{dx_1};$$

верхний индекс k определяет номер консоли; верхний знак в обозначениях \pm , \mp соответствует $k = 1$;

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{E_3}{2(1+\nu_3)} \frac{u_1^+ - u_1^-}{\delta_0}; \quad \bar{\sigma}_{11} = \frac{E_3(1-\nu_3)}{2(1+\nu_3)(1-2\nu_3)} \left(\frac{du_1^+}{dx_1} + \frac{du_1^-}{dx_1} \right).$$

Решения уравнений (18)–(20) сопрягаются в точке $x_1 = 0$:

$$h\sigma_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=0-0} = (h\sigma_{11}^{(1)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=0+0}, \quad u_1^+ \Big|_{x_1=0-0} = u_1^+ \Big|_{x_1=0+0}, \quad (21)$$

в точках $x_1 = l_p; l-l_p$:

$$(h\sigma_{11}^{(k)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=l_p-0; l-l_p-0} = (h\sigma_{11}^{(k)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=l_p+0; l-l_p+0}, \quad u_1^\pm \Big|_{x_1=l_p-0; l-l_p-0} = u_1^\pm \Big|_{x_1=l_p+0; l-l_p+0}, \quad (22)$$

в точке $x_1 = l$:

$$(h\sigma_{11}^{(2)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=l-0} = h\sigma_{11}^{(2)} \Big|_{x_1=l+0}, \quad u_1^- \Big|_{x_1=l-0} = u_1^- \Big|_{x_1=l+0} \quad (23)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(1)} \Big|_{x_1=-a} &= P, \quad (h\sigma_{11}^{(2)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=0} = 0, \\ (h\sigma_{11}^{(1)} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11}) \Big|_{x_1=l} &= 0, \quad u_1^- \Big|_{x_1=l+a} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Общее решение задачи (17)–(20) получено в статье [27] при условии текучести Треска – Сен-Венана, и соответствующее решение использовалось в [26]. Для нахождения длины пластической области l_p использовалось условие (17) и применялась итерационная процедура, описанная в статье [30] при условии симметрии области пластичности относительно середины АС.

Рассмотрим решение (18)–(24) при нахождении характеристики (14) для упруго-пластического и упругого поведения адгезионного слоя в случае критической нагрузки образца. При упругом поведении слоя из постановочной части исключаются уравнения (19) и условия сопряжения (22).

Согласно статье [31], для материала пластин 1 и 2 в рассматриваемой схеме нагружения использовался алюминиевый сплав Al6082-T651 с механическими характеристиками: $E = 70$ ГПа, $\nu = 0,3$. В качестве адгезива была выбрана смола Araldite AV138 с механическими свойствами: $E_3 = 4,9$ ГПа, $\nu_3 = 0,35$, $\sigma_0 = 36,49$ МПа. Общая длина образца $2a + l$ задавалась равной 180 мм, толщина пластин в направлении, ортогональном плоскости $0x_1x_2$, $B = 25$ мм, длина сопрягаемого адгезивом участка $l = 50$ мм, толщина пластин $h = 3$ мм, толщина слоя $\delta_0 = 0,2$ мм.

Значение внешней критической нагрузки F равнялось 9300 Н, что соответствует критической внешней нагрузке $P = F/(hB)$ в рассматриваемой постановке задачи.

На рис. 3 показано распределение напряжений в АС для критического состояния. Кривая 1 определяет напряжение $\bar{\sigma}_{12}$, а кривые 2 и 3 соответствуют напряжениям $\bar{\sigma}_{11}$, $\bar{\sigma}_{22}$ при упругопластическом деформировании адгезива. Кривые 4, 5, 6 определяют соответствующие напряжения при упругом деформировании.

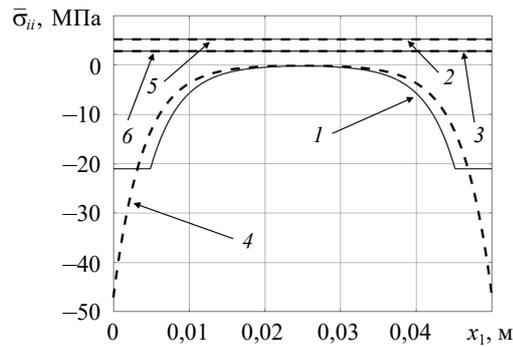


Рис. 3. Распределение напряжений в адгезионном слое

Уменьшение толщины АС приводит к росту длины пластической области для упругопластической постановки и значения касательных напряжений при упругом поведении слоя.

На рис. 4 показаны зависимости J -интеграла от десятичного логарифма отношения толщины адгезионного слоя и толщины консоли. Кривая 1 соответствует упругопластической модели, кривая 2 — упругому поведению АС. Отметим, что уменьшение предела текучести не оказывает влияние на кривую 1 при наличии упругой области в адгезионном слое.

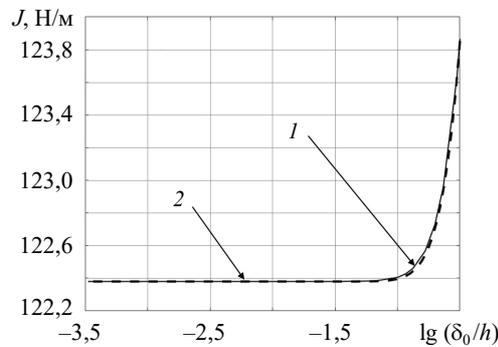


Рис. 4. Значения J -интеграла

Из графиков рис. 4 видно, что значение J -интеграла имеет асимптотическую сходимость при стремлении толщины АС к нулю. Согласно (13), происходят принципиально различные механизмы формирования значения J -интеграла. В случае обратимого деформирования значение J -интеграла определяет удельная свободная энергия, а для упругопластического деформирования при малой толщине слоя — удельная диссипация. Однако при этом асимптотическое значение J -интеграла не зависит от рассмотренных моделей поведения адгезива.

Заключение

Для нагружения внахлест рассмотрена характеристика типа J -интеграла для контура, охватывающего одну локальную зону диссипации в АС. В рамках известных допущений на распределение поля перемещений в несущих линейно упругих консолях образца и условия текучести Губера – Мизеса получена замкнутая постановка задачи. На основе экспериментальных данных из аналитического решения поставленной задачи определено критическое значение J -интеграла для упругопластического и линейно упругого поведений материала адгезионного слоя. Показано, что в рамках рассмотренных моделей поведения критическое значение J -интеграла имеет одно асимптотическое значение при стремлении толщины слоя к нулю.

Список литературы

1. Broberg K.V. *Cracks and Fracture*. San Diego: Academic Press, 1999. 752 p.
2. Черепанов Г.П. *Механика хрупкого разрушения*. М.: Наука, 1974. 640 с.
3. Kanninen M.F., Popelar C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford: Oxford University Press, 1985. 563 p.
4. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
5. Черепанов Г.П. *Механика разрушения композиционных материалов*. М.: Наука, 1983. 296 с.
6. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *International Journal of Fracture*. 1990. Vol. 43. Iss. 1. P. 1–18. <https://doi.org/10.1007/BF00018123>.
7. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 519–536. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014>.
8. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968. Vol. 35. Iss. 2. P. 379–386. <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.
9. Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F.D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*. 2014. Vol. 187. Iss. 1. P. 77–107. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9920-6>.
10. Barker D.B., Sanford R.J., Chona R. Determining K and related stress-field parameters from displacement fields. *Experimental Mechanics*. 1985. Vol. 25. Iss. 4. P. 399–407. <https://doi.org/10.1007/BF02321339>.
11. Zanganeh M., Lopez-Crespo P., Tai Y.H., Yates J.R. Locating the crack tip using displacement field data: a comparative study. *Strain*. 2013. Vol. 49. Iss. 2. P. 102–115. <https://doi.org/10.1111/str.12017>.
12. Малик А.В., Лавит И.М. Метод расчета коэффициента интенсивности напряжений для неподвижной трещины нормального разрыва при динамическом нагружении. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2018. №54. С. 88–102. <https://doi.org/10.17223/19988621/54/8>.
13. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*. 1976. Vol. 8. Iss. 4. P. 643–655. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(76\)90038-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(76)90038-2).
14. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility. *International Journal of Fracture*. 2017. Vol. 207. Iss. 1. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>.
15. Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T. FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2013. Vol. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>.
16. Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M. Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the

simulations. *The Journal of Adhesion*. 2012. Vol. 88. Iss. 4–6. P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>.

17. De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. P. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009.

18. Borg R., Nilsson L., Simonsson K. Simulating DCB, ENF and MMB experiments using shell elements and a cohesive zone model. *Composites Science and Technology*. 2004. Vol. 64. Iss. 2. P. 269–278. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(03\)00255-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(03)00255-0).

19. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements. *Journal of Aircraft*. 2008. Vol. 42. Iss. 2. P. 663–672. <https://doi.org/10.2514/1.32832>.

20. Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics*. 1944. Vol. 66. Iss. 1. P. A17–A27.

21. Adams R.D., Peppiatt N.A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. *Journal of Strain Analysis*. 1974. Vol. 9. Iss. 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>.

22. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2009. Vol. 29. Iss. 3. P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>.

23. Hart-Smith L.J. Adhesive-bonded single-lap joints. *NASA Technical Report CR-112236*. 1973.

24. Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*. 1938. Bd. 15. S. 41–47 (Auf Deutsch).

25. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>.

26. Глаголев В.В., Маркин А.А. Модель сдвигового упругопластического деформирования тонкого адгезионного слоя. *Изв. РАН. МТТ*. 2020. № 6. С. 93–100. <https://doi.org/10.31857/S0572329920060070>.

27. Абдурахманов А.А., Глаголев В.В., Инченко О.В. Упругопластическое деформирование адгезива при сдвиге. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния*. 2019. №4(42). С. 34–44. DOI: 10.26293/chgpru.2019.42.4.004.

28. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.

29. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between JC and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *International Journal of Fracture*. 2020. Vol. 224. Iss. 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>.

30. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. О влиянии механических характеристик тонкого адгезионного слоя на прочность композита. Ч. 2. Упругопластическое деформирование. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2023. №3. С. 30–42. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.3.03>.

31. Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints. *International Journal of Fracture*. 2021. Vol. 232. Iss. 1. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>.

References

1. Broberg K.B. *Cracks and Fracture*. San Diego. Academic Press. 1999. 752 p.
2. Cherepanov G.P. *Mekhanika khрупkogo razrusheniya [Mechanics of Brittle Failure]*. Moscow. Nauka Publ. 1974. 640 p. (In Russian).
3. Kanninen M.F., Popelar C.H. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford. Oxford University Press. 1985. 563 p.
4. Bolotin V.V., Novichkov Yu.N. *Mekhanika mnogosloynnykh konstruksiy [Mechanics of Laminated Constructions]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1980. 375 p. (In Russian).
5. Cherepanov G.P. *Mekhanika razrusheniya kompozitsionnykh materialov [Fracture Mechanics of Composite Materials]*. Moscow. Nauka Publ. 1983. 296 p. (In Russian).

6. Suo Z., Hutchinson J.W. Interface crack between two elastic layers. *Int. J. Fract.* 1990. Vol. 43. Iss. 1. P. 1–18. <https://doi.org/10.1007/BF00018123>.
7. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 519–536. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014>.
8. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35. Iss. 2. P. 379–386. <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.
9. Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F.D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials. *Int. J. Fracture.* 2014. Vol. 187. Iss. 1. P. 77–107. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9920-6>.
10. Barker D.B., Sanford R.J., Chona R. Determining K and related stress-field parameters from displacement fields. *Exp. Mech.* 1985. Vol. 25. Iss. 4. P. 399–407. <https://doi.org/10.1007/BF02321339>.
11. Zanganeh M., Lopez-Crespo P., Tai Y.H., Yates J.R. Locating the crack tip using displacement field data: a comparative study. *Strain.* 2013. Vol. 49. Iss. 2. P. 102–115. <https://doi.org/10.1111/str.12017>.
12. Malik A.V., Lavit I.M. Metod rascheta koeffitsienta intensivnosti napryazheniy dlya nepodvizhnoy treshchiny normalnogo razryva pri dinamicheskom nagruzhenii [On the computation method for the stress intensity factor of a stationary crack in mode I under dynamic loading]. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i mekhanika.* 2018. No 54. P. 88–102 (In Russian).
13. Murakami Y. A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Eng. Fract. Mech.* 1976. Vol. 8. Iss. 4. P. 643–655. [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(76\)90038-2](https://doi.org/10.1016/0013-7944(76)90038-2).
14. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility. *Int. J. Fracture.* 2017. Vol. 207. Iss. 1. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>
15. Nakano N., Sekiguchi Y., Sawa T. FEM stress analysis and strength prediction of scarf adhesive joints under static bending moments. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2013. Vol. 44. P. 166–173. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.02.010>.
16. Campilho R.D.S.G., Banea M.D., Neto J.A.B.P., da Silva L.F.M. Modelling of single-lap joints using cohesive zone models: Effect of the cohesive parameters on the output of the simulations. *J. Adhesion.* 2012. Vol. 88. Iss. 4–6. P. 513–533. <https://doi.org/10.1080/00218464.2012.660834>.
17. De Moura M.F.S.F., Goncalves J.P.M. Cohesive zone model for high-cycle fatigue of adhesively bonded joints under mode I loading. *Int. J. Solids Struct.* 2014. Vol. 51. P. 1123–1131. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.12.009
18. Borg R., Nilsson L., Simonsson K. Simulating DCB, ENF and MMB experiments using shell elements and a cohesive zone model. *Compos. Sci. Technol.* 2004. Vol. 64. Iss. 2. P. 269–278. [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(03\)00255-0](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(03)00255-0).
19. Dávila C.G., Camanho P.P., Turon A. Effective Simulation of delamination in aeronautical structures using shells and cohesive elements. *J. Aircr.* 2008. Vol. 42. Iss. 2. P. 663–672. <https://doi.org/10.2514/1.32832>
20. Goland M., Reissner E. The stresses in cemented joints. *J. Appl. Mech.* 1944. Vol. 66. Iss. 1. P. A17–A27.
21. Adams R.D., Peppiatt N.A. Stress analysis of adhesive-bonded lap joints. *Journal of Strain Analysis.* 1974. Vol. 9. Iss. 3. P. 185–196. <https://doi.org/10.1243/03093247V093185>.
22. da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Wang A., Spelt J.K. Analytical models of adhesively bonded joints – Part II: Comparative study. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2009. Vol. 29. Iss. 3. P. 331–341. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2008.06.007>.
23. Hart-Smith L.J. Adhesive-bonded single-lap joints. *NASA Technical Report CR-112236.* 1973.
24. Volkersen O. Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit Konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung.* 1938. Bd. 15. S. 41–47 (Auf Deutsch).

25. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *Int. J. Solids Struct.* 2019. Vol. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>
26. Glagolev V.V., Markin A.A. Model of shear elastic-plastic deformation of a thin adhesive layer. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 6. P. 837–843. DOI: 10.3103/S0025654420060072.
27. Abdurakhmanov A.A., Glagolev V.V., Inchenko O.V. Uprugoplasticheskoe deformirovanie adheziva pri sdvige [Elastoplastic shear adhesive deformation]. *Vestnik Chuvashskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni I.Ya. Yakovleva. Seriya: Mekhanika predelnogo sostoyaniya [Bulletin of the Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series: Mechanics of Limit State]*. 2019. No 4(42). P. 34–44 (In Russian).
28. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti [Mathematical Theory of Plasticity]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 704 p. (In Russian).
29. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between JC and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *Int. J. Fract.* 2020. Vol. 224. Iss. 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>.
30. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. O vliyaniy mekhanicheskikh kharakteristik tonkogo adgezionnogo sloya na prochnost kompozita. Chast 2. Uprugoplasticheskoe deformirovanie [On the influence of the mechanical characteristics of a thin adhesion layer on the composite strength. Pt 2. Elastic-plastic deformation]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2023. No 3. P. 30–42 (In Russian).
31. Dionisio J.M.M., Ramalho L.D.C., Sanchez-Arce I.J., Campilho R.D.S.G., Belinha J. Fracture mechanics approach to stress singularity in adhesive joints. *Int. J. Fract.* 2021. Vol. 232. Iss. 1. P. 77–91. <https://doi.org/10.1007/s10704-021-00594-z>.

INFLUENCE OF THE THIN ADHESION LAYER BEHAVIOR MODEL IN AN OVERLAP JOINT ON THE VALUE OF THE J-INTEGRAL*

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V.

Tula State University, Tula, Russian Federation

v.boga4eva2014@yandex.ru, vadim@tsu.tula.ru, len4ic92@gmail.com

Received by the Editor 2024/09/02

A characteristic of the J -integral type is obtained in the case of deformation of an elastic-plastic adhesive layer that connects linearly elastic bodies with an overlap. The integration contour of the integral under consideration covers the region of the assumed irreversible deformation. It is believed that the solution of the problem can lead to the presence of a nonzero stress vector on the free surface of the adhesive layer with a uniform distribution of stress and strain fields over the layer thickness. If the free surface conditions are met on the end surface of the adhesive layer, the J -integral value determines the product of the adhesive layer thickness by the sum of the specific elastic energy and dissipation. For joining load-bearing bodies with an adhesive layer with an overlap, a closed statement of the problem is obtained from the coupled system of equations within the framework of known assumptions for the displacement field in the load-bearing linearly elastic bodies of the sample and the Huber – Mises yield condition for the adhesive layer. Taking into account the elastic and elastic-plastic behavior of the adhesive layer, solutions of the problem are obtained for the known experimental data for the critical external load. In the elastic-plastic solution, the regions

*The research was carried out at the expense of the grant of the Russian Science Foundation No 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> at Tula State University.

of irreversible deformation are found. A significant difference in the behavior of tangential stresses in elastic-plastic deformation zones and the coincidence of the diagonal components of the stress tensor in the adhesive layer for the considered models of its behavior are shown. In the case of a critical external load, the values of the J -integral are found for relatively small values of the adhesive layer thickness. It is shown that within the framework of the considered models of the adhesive layer behavior, the limiting value of the J -integral has one asymptotic value as the layer thickness tends to zero.

Keywords: adhesive layer, elastic-plastic deformation, J -integral.