

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-4-403-420

О ТОЧНОСТИ УСЕЧЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПОЛЕЙ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛАХ*

© 2024 г.

Степанова Л.В., Фомченкова М.А.

*Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева, Самара, Российская Федерация*

stepanova.lv@ssau.ru, fomchenkova.ma@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.08.2024

Получены оценки точности усеченных асимптотических разложений, обобщающих представление М. Уильямса и широко используемых для представления механических полей вблизи вершин трещин в плоских анизотропных упругих средах. Рассмотрены усеченные на различном количестве слагаемых асимптотические решения в виде формальных бесконечных рядов, представляющие поля напряжений в окрестности вершины трещины в анизотропной среде. Даны количественные оценки влияния усечения на точность представления механических величин путем сравнения усеченных решений с точными аналитическими решениями в замкнутой форме, которые существуют для некоторых конфигураций тел с трещинами. Вычислены двумерные поля абсолютной погрешности с наличием областей, в которых появляются точки с численно нулевой погрешностью, что показывает существование зон, где усеченные ряды могут дать точные результаты. Эти точки точности сходятся на кривых, исходящих от вершины трещин и направленных к внешней стороне кругов сходимости рядов.

Предложен и усовершенствован численный метод реконструкции коэффициентов рядов полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи кончика дефекта в линейно упругих анизотропных (ортотропных) материалах. Предлагаемый и развиваемый существенно переопределенный метод базируется на конечно-элементных расчетах образцов с разрезами для анизотропных сред в условиях смешанного нагружения и извлечении полей напряжений из конечно-элементных решений. С помощью полученного конечно-элементного поля напряжений в узлах конечно-элементной сетки формируется существенно переопределенная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов асимптотических разложений полей, ассоциированных с разрезом. Исследованы численные примеры трещин в конечных и бесконечных пластинах, где результаты предлагаемого подхода демонстрируют хорошее соответствие с точными или альтернативными численными решениями. Проведено исследование сходимости методики для проверки надежности методологии и достоверности результатов. Вычислена соответствующая ошибка при аппроксимации поля напряжений. Низкие значения погрешностей демонстрируют высокую точность развитого метода.

* Выполнено при поддержке РНФ (проект №21-11-00346).

Ключевые слова: анизотропные упругие материалы, ортотропия, кубическая сингония, трещина, обобщенное решение в рядах, обобщение переопределенного метода.

Введение

Аналитическое представление механических полей в области, окружающей вершину трещины, для плоской анизотропной линейной упругой среды может быть выполнено с помощью асимптотических решений, обобщающих решение М. Уильямса [1–5]. Первоначальный вывод решений Уильямса [6, 7] основан на разложении решения бигармонического уравнения по собственным функциям, что предполагает разделение функций угловой и радиальной переменных. В этих решениях используются разложения по радиальной координате (с суммированием, с коэффициентом $r^{\pm 1/2}$, где r – расстояние от кончика математического разреза) для представления полей напряжений и перемещений. Этот подход оказался чрезвычайно популярным, способствуя решению широкого спектра аналитических, экспериментальных и вычислительных задач в механике разрушения [7–12]. Значительная часть популярности объясняется его относительной математической простотой по сравнению, например, с решениями, основанными на комплексном анализе или интегральных преобразованиях уравнений задачи. Каждое слагаемое ряда является результатом действия трех сомножителей: двух общих, зависящих от угловой и радиальной переменных соответственно, и третьего, специфичного для конкретной задачи, который включает в себя нагрузку и влияние геометрических особенностей. Среди этого бесконечного множества амплитудных множителей, связанных с конкретной краевой задачей, первым двум факторам (связанным, соответственно, с понятиями коэффициента интенсивности напряжений [13] и T-напряжения [14]) уделяется наибольшее внимание из-за их преобладающего влияния на механические явления. Для этих двух первых проблемных факторов были приведены выражения в замкнутой форме для различных конфигураций трещин [15]. Однако выражения в замкнутой форме для коэффициентов более высокого порядка как для конечного их числа, так и для целых наборов, встречаются гораздо реже. В частности, насколько известно авторам, полные наборы коэффициентов были получены только для нескольких конфигураций трещин с использованием полярных разложений сложных решений [1, 2]. Особенно для анизотропных сред такие решения являются редкостью [1, 2]. Анизотропию своих механических характеристик (упругость, пластичность, прочность) демонстрируют природные (монокристаллы, горные породы) и рукотворные (композитные) материалы [1–5]. Анизотропные материалы, находящие широкое практическое применение, нередко подвержены образованию и развитию трещин, дефектов и расслоений, когда такие материалы подвергаются механическим нагрузкам, что играет первостепенную роль в характеристиках прочности, живучести и разрушения анизотропных сред [1, 2]. Определение полей вблизи кончика дефекта с целью описания напряжения и деформации в зоне, непосредственно примыкающей к кончику острой трещины, является отправной точкой изучения и анализа любого процесса разрушения, для чего необходимо надежными методами определить искомые коэффициенты рядов механических полей у кончика разреза. В настоящей статье развит переопределенный метод, позволяющий с высокой точностью найти коэффициенты ряда, представляющего поля вблизи кончика трещины.

Бесконечная анизотропная пластина с центральной трещиной, находящаяся под действием растягивающей (типа I) и сдвиговой (типа II) нагрузок, является примером конфигурации тела с трещиной, для которого имеются: 1) точное аналитическое решение, построенное с помощью канонического формализма комплексных потенциалов, 2) аппроксимационное решение в виде формального бесконечного степенного ряда с выведенными амплитудными коэффициентами для любого числа удерживаемых слагаемых (для n -го члена ряда) [1, 2]. В силу этих причин избранная конфигурация особенно удобна для анализа характерных черт приближенных решений в виде степенного ряда и тестирования алгоритма переопределенного метода вычисления коэффициентов ряда. С целью построения и анализа асимптотического решения для полей напряжений вблизи вершины трещины на примере бесконечной анизотропной пластины с центральным дефектом получены двумерные поля абсолютной погрешности и разработан численный метод нахождения коэффициентов усеченных разложений механических полей, опирающийся на конечно-элементный расчет механических величин в двумерных образцах с концентраторами напряжений.

1. Точное аналитическое решение задачи о растяжении бесконечной анизотропной плоскости с разрезом и обобщенные ряды для полей вблизи кончика дефекта в анизотропных пластинах

Комплексные потенциальные функции в терминах комплексных переменных $z_j = x_1 + \mu_j x_2$ (где $\mu_j, j = 1, 2$, – корни характеристического уравнения [16]), описывающие решение задачи о растяжении напряжением σ^∞ анизотропной плоскости с разрезом длиной $2a$, образующим угол α с вертикальной осью (рис. 1), приведены в [16] и имеют вид:

$$\Phi_1(z_1) = \sigma^\infty (\mu_2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - a^2}}{2(\mu_1 - \mu_2)} + \Gamma_1 z_1, \quad (1)$$

$$\Phi_2(z_2) = -\sigma^\infty (\mu_1 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha) \frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 - a^2}}{2(\mu_1 - \mu_2)} + \Gamma_2 z_2, \quad (2)$$

где приняты обозначения

$$\Gamma_1 = \frac{-\sigma^\infty}{2(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ \mu_2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + i \mu_2 \frac{\operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{\operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2)} (\sin \alpha \cos \alpha - \lambda) \right\} -$$

$$- i \sigma^\infty \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 \mu_2) + \lambda \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2) \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2)},$$

$$\Gamma_2 = \frac{-\sigma^\infty}{2(\mu_1 - \mu_2)} \left\{ \mu_1 \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + i \mu_1 \frac{\operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{\operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2)} (\sin \alpha \cos \alpha - \lambda) \right\} +$$

$$+ i \sigma^\infty \frac{\cos^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 \mu_2) + \lambda \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1 - \mu_2) \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2)},$$

λ – постоянная, отвечающая за вращение тела как абсолютно твердого (ниже рассматривается случай $\lambda = 0$). Комплексные потенциалы (1) и (2) приводят к распределению напряжений в растягиваемой анизотропной плоскости с разрезом

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} = \sigma^\infty \operatorname{Re} & \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\left(\mu_1 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{\mu_2^2 z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\mu_2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{\mu_1^2 z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right] \right\} + \\
& + \sigma^\infty [\cos^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2) \sin \alpha \cos \alpha], \\
\sigma_{22} = \sigma^\infty \operatorname{Re} & \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\left(\mu_1 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\mu_2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right] \right\}, \\
\sigma_{12} = \sigma^\infty \operatorname{Re} & \left\{ \frac{-1}{\mu_1 - \mu_2} \left[\left(\mu_1 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{\mu_2 z_2}{\sqrt{z_2^2 - a^2}} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\mu_2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) \frac{\mu_1 z_1}{\sqrt{z_1^2 - a^2}} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

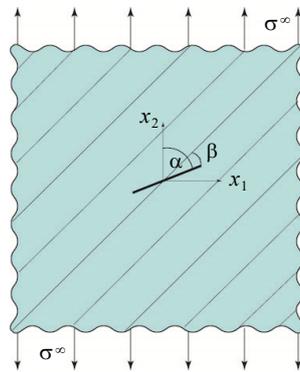


Рис. 1. Геометрия анизотропной плоскости с трещиной и схема приложенной нагрузки, β – угол между трещиной и главной осью анизотропии упругих свойств среды

Аналитическое приближенное представление компонент тензора напряжений для ортотропного материала (в частном случае – для материала с кубической симметрией), полученное путем разложения аналитического решения (3) в ряд Тейлора в окрестности вершины разреза, имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = 2\operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\begin{array}{l} \mu_2^2 \mu_1^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_2^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ - (\mu_2 \mu_1^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1 \mu_2^{((-1)^{n+1}+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1}) \end{array} \right] + \\
& + 2 \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{i^{(n+1)^2}}{\mu_1 - \mu_2} r^{n/2-1} \times \right. \\
& \left. \times \left[\begin{array}{l} \mu_2^2 \mu_1^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1^2 \mu_2^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ \mu_1^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_2^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1} \\ - (\mu_2 \mu_1^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_2 \sin \theta)^{n/2-1} - \mu_1 \mu_2^{((-1)^n+1)/2} (\cos \theta + \mu_1 \sin \theta)^{n/2-1}) \end{array} \right] \right], \quad (4)
\end{aligned}$$

где μ_1, μ_2 – корни характеристического уравнения, полученного путем решения уравнения совместности через общее решение в виде комплексного потенциала; r, θ – полярные координаты с полюсом в вершине трещины; A_n, B_n – амплитудные коэффициенты асимптотических полей трещины анизотропного материала. Амплитудные множители полей напряжений в бесконечной анизотропной пластине с центральной трещиной длиной $2a$, находящейся под углом α , подвергнутой одноосному нагружению, представляются соотношениями:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma^\infty \sin^2 \alpha, \quad B_1 = \frac{\sqrt{2a}}{4} \sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha, \\
A_2 &= \frac{\sigma^\infty}{2 \operatorname{Im}(\mu_1 + \mu_2)} [\cos^2 \alpha + \operatorname{Re}(\mu_1 \mu_2) \sin^2 \alpha + \lambda \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)], \quad A_{2n+2} = B_{2n+2} = 0, \\
B_2 &= \frac{\sigma^\infty \operatorname{Re}(\mu_1 + \mu_2)}{2 \operatorname{Im}(\mu_1 \mu_2)} [\sin \alpha \cos \alpha - \lambda], \quad A_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma^\infty \sin^2 \alpha, \quad B_3 = \frac{3}{8\sqrt{2a}} \sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha, \\
A_{2n+3} &= \frac{(-1)^{n+1} \sigma^\infty \sin^2 \alpha}{8(2a)^{n+1/2}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n+2)} \right], \quad (5) \\
B_{2n+3} &= \frac{(-1)^{n+1} \sigma^\infty \sin \alpha \cos \alpha}{8(2a)^{n+1/2}} \left[-4 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n+1)}{4 \times 6 \times 8 \times \dots \times (2n+2)} \right], \\
& n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned}$$

Соотношения (5) определяют коэффициенты, которые позволяют найти радиус сходимости рядов (4) $R = 3a/8$.

Для практических приложений прибегают к усеченным рядам (4), в которых сохраняют высшие приближения [12,17–25], поскольку высшие слагаемые играют существенную роль в целостном описании полей у вершины разреза. В связи с этим возникает вопрос, сколько слагаемых следует удерживать в асимптотических представлениях (4). Для ответа на этот вопрос строятся двумерные поля абсолютной погрешности между точным решением задачи (3), полученным на основе теории функции комплексного переменного, и приближенным решением задачи в виде рядов (4), в которых ряд отсекается на различном количестве слагаемых. Все вычисления были выполнены для перовскита CsSnI_3 , перспективного материала для оптоэлектрон-

ных приложений. Кристаллическая структура перовскита представлена на рис. 2 [26].

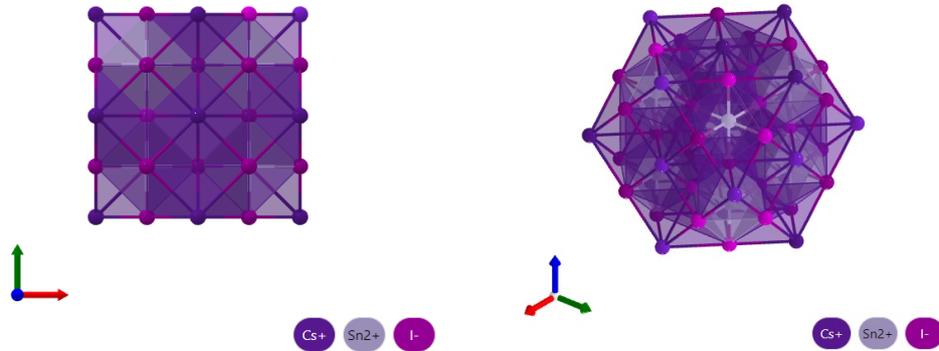


Рис. 2. Кристаллическая структура перовскита CsSnI₃

Тензоры упругих модулей (в ГПа) и податливости перовскита (в 1/ГПа) имеют вид [26]:

$$\begin{pmatrix} 36 & 5 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 36 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 29 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 29 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 29 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 228 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 228 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 228 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Пространственная визуализация упругих свойств представлена на рис. 3.

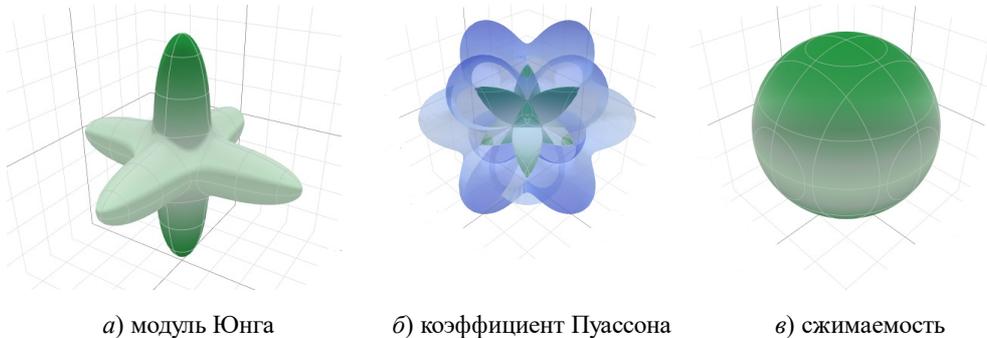


Рис. 3. Пространственная визуализация свойств перовскита [27]

Для упругих свойств, определяемых тензорами (6), корни характеристического уравнения имеют вид $\mu_1 = 0,34645i$, $\mu_2 = 2,88637i$. Следует отметить дополнительно, что характеристические корни найдены без упрощений Сен-Венана [16].

2. Двумерные поля абсолютной погрешности между точным и приближенным решениями

С целью выявления областей нулевой погрешности, допускаемой приближенным решением (4), построены двумерные поля абсолютной погрешности при-

ближенных распределений компоненты тензора напряжений, определяемых рядами с различным числом удерживаемых слагаемых. Результаты вычислений представлены на рис. 4–9. Все компоненты тензора напряжений, используемые для вычислений и показанные на рис. 4–10, отнесены к приложенному напряжению σ^∞ . Для анализа пространственной точности асимптотического решения вычислены поля абсолютных ошибок для усеченных рядов компонент тензора напряжений с удержанием 8 и 12 слагаемых в суммировании для различных значений угла между трещиной и вертикальной осью. Рассматриваемая величина погрешности представляет собой абсолютную погрешность между решением, представляемым в виде ряда (4), и решением, найденным с помощью теории функций комплексного переменного (3). Поля абсолютных погрешностей преобразуются с помощью оператора \log_{10} таким образом, чтобы выделить зоны, где погрешности близки к числовой точности 10^{-12} . Все поля абсолютных ошибок, приведенные на рис. 4–9, содержат геометрические места точек (кривые), в которых усеченные ряды дают результаты с логарифмической величиной абсолютной ошибки от -12 до -20 . Это численное наблюдение позволяет предположить, что усеченные ряды, обобщающие на случай анизотропных материалов ряды Уильямса, могут дать результаты, сопоставимые с результатами, предложенными эталонными комплексными решениями (с погрешностью 10^{-12}). Это свойство кажется удивительным, поскольку обычно предполагается, что усеченный ряд не может дать точных результатов. Точки, в которых ошибка составляет численно нуль (с точностью 10^{-12}), называются точками точности решения. Эти точки обладают следующими свойствами: количество кривых точности увеличивается с возрастанием числа слагаемых ряда, сохраняемых для данной конфигурации трещины и заданной составляющей напряжения; для фиксированной конфигурации и фиксированного количества слагаемых кривые различаются по количеству в зависимости от различных компонент напряжения. Таким образом, на основе проведенного вычислительного эксперимента было обнаружено существование кривых точности для усеченных рядов. Определенная закономерность в свойствах, отображаемых полученными кривыми (см. рис. 4–9), предполагает возможность получения дополнительной информации посредством дальнейшего специального аналитического исследования.

На рис. 4–9 представлены двумерные поля абсолютной погрешности асимптотического разложения для компоненты тензора напряжений σ_{11} (слева), σ_{22} (в центре), σ_{12} (справа) относительно точного аналитического решения для различного числа членов асимптотического разложения при различных углах α .

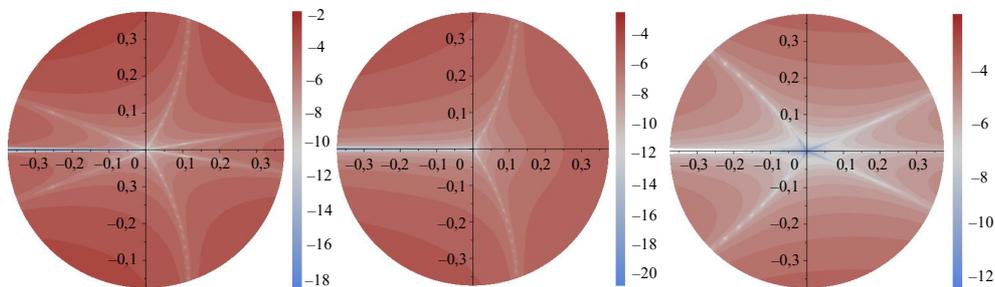


Рис. 4. Поля погрешности для 8 членов разложения, $\alpha = \pi/2$

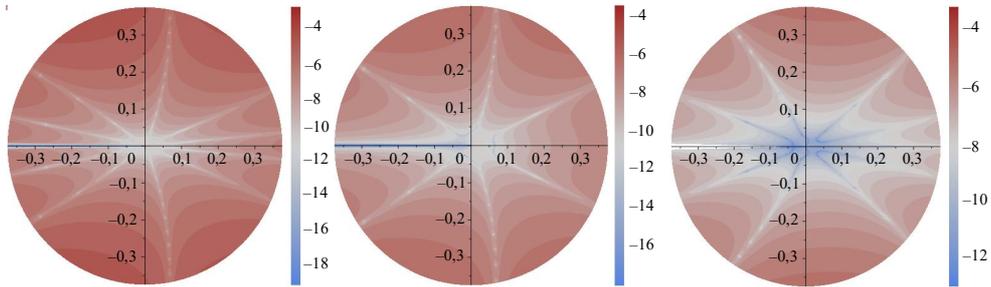


Рис. 5. Поля погрешности для 12 членов разложения, $\alpha = \pi/2$

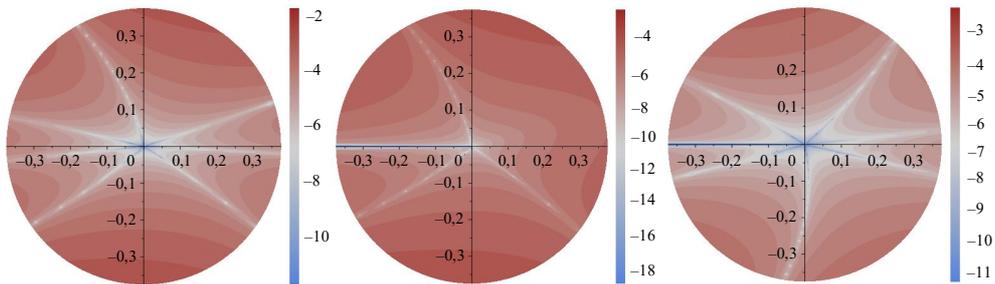


Рис. 6. Поля погрешности для 8 членов разложения, $\alpha = \pi/3$

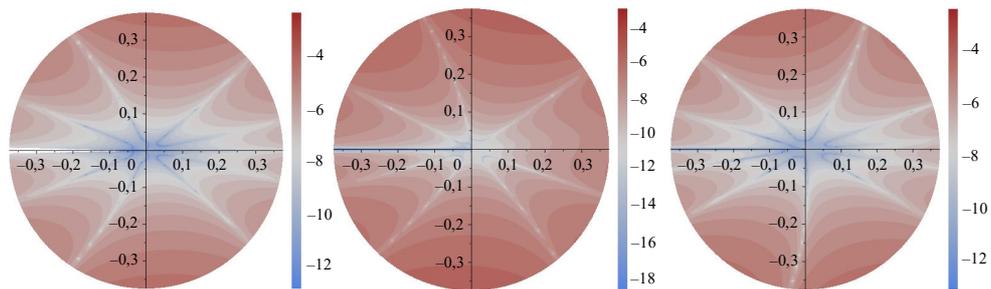


Рис. 7. Поля погрешности для 12 членов разложения, $\alpha = \pi/3$

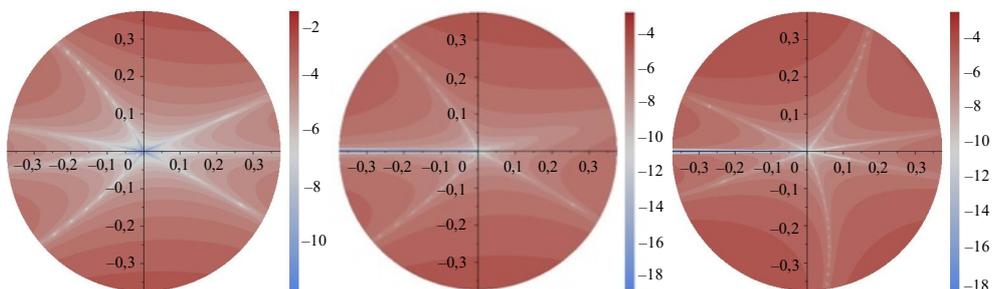


Рис. 8. Поля погрешности для 8 членов разложения, $\alpha = \pi/6$

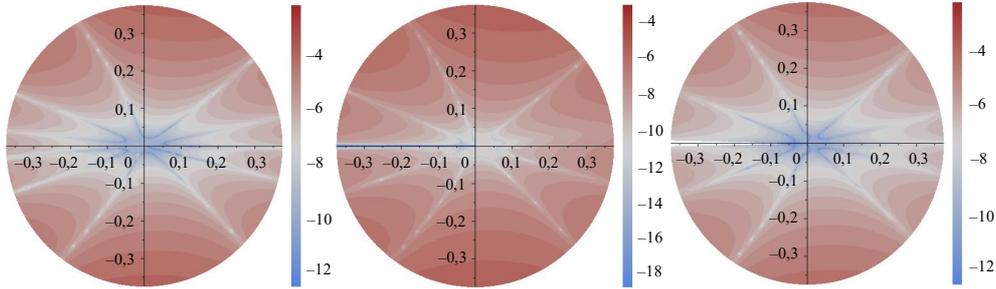


Рис. 9. Поля погрешности для 12 членов разложения, $\alpha = \pi/6$

Уравнения кривых, показанных на рис. 4–9, могут быть найдены аналитически посредством асимптотических разложений (4). Например, для трещины нормального отрыва ($\alpha = \pi/2$) ряд (4) представляется в виде

$$\sigma_{ij}^L(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+1} r^{k-1/2} f_{1,ij}^{(2k+1)}(\theta). \quad (7)$$

Пусть усечение ряда (7) на L -м слагаемом приводит к точному решению. Тогда уравнение для определения кривых точности решения может быть получено следующим образом. Из (7) следует, что

$$\sigma_{ij}^L(r, \theta) = \sum_{k=0}^L A_{2k+1} r^{k-1/2} f_{1,ij}^{(2k+1)}(\theta) + \sum_{k=L+1}^{\infty} A_{2k+1} r^{k-1/2} f_{1,ij}^{(2k+1)}(\theta) \quad (8)$$

и

$$\sum_{k=L+1}^{\infty} A_{2k+1} r^{k-1/2} f_{1,ij}^{(k)}(\theta) = 0. \quad (9)$$

Выделение в (9) первого слагаемого приводит к соотношению

$$A_{2L+3} f_{1,ij}^{(2L+3)}(\theta) r^{L-1/2} + \sum_{k=L+2}^{\infty} A_{2k+1} r^{k-1/2} f_{1,ij}^{(2k+1)}(\theta) = 0 \quad (10)$$

или

$$f_{1,ij}^{(2L+3)}(\theta) = -\frac{1}{A_{2L+3}} \sum_{k=L+2}^{\infty} A_{2k+1} r^{k-L-1} f_{1,ij}^{(2k+1)}(\theta) = 0. \quad (11)$$

При $r \rightarrow 0$ последняя сумма стремится к нулю и уравнение (11) позволяет найти количество линий

$$f_{1,ij}^{(2L+3)}(\theta) = 0, \quad (12)$$

вдоль которых ряд дает точное решение. Количество кривых, содержащих точки точности, наблюдаемые в полях ошибок на рис. 4–9, правильно предсказывается по количеству нулей соответствующих угловых функций.

Свойство возможной точности для усеченного ряда (4) может оказаться полезным для практических приложений, где требуются амплитудные коэффициенты, специфичные для конкретной задачи. Например, расположение точек измерения (либо на экспериментальных установках, либо в рамках конечно-элементных вычислений) вдоль линий точности, изображенных на рис. 4–9, позволило бы получить более точные данные для дальнейшего использования.

3. Обобщение переопределенного метода на случай ортотропных материалов

Проведенный вычислительный эксперимент показал, что с увеличением расстояния от вершины разреза влияние регулярных слагаемых становится более значимым. На рис. 10 изображены угловые распределения компонент тензора напряжений, построенные с помощью асимптотического решения с удержанием различного числа слагаемых ряда (4). Из представленных графиков видно, что чем больше расстояние от кончика разреза, тем больше слагаемых следует сохранять в (4).

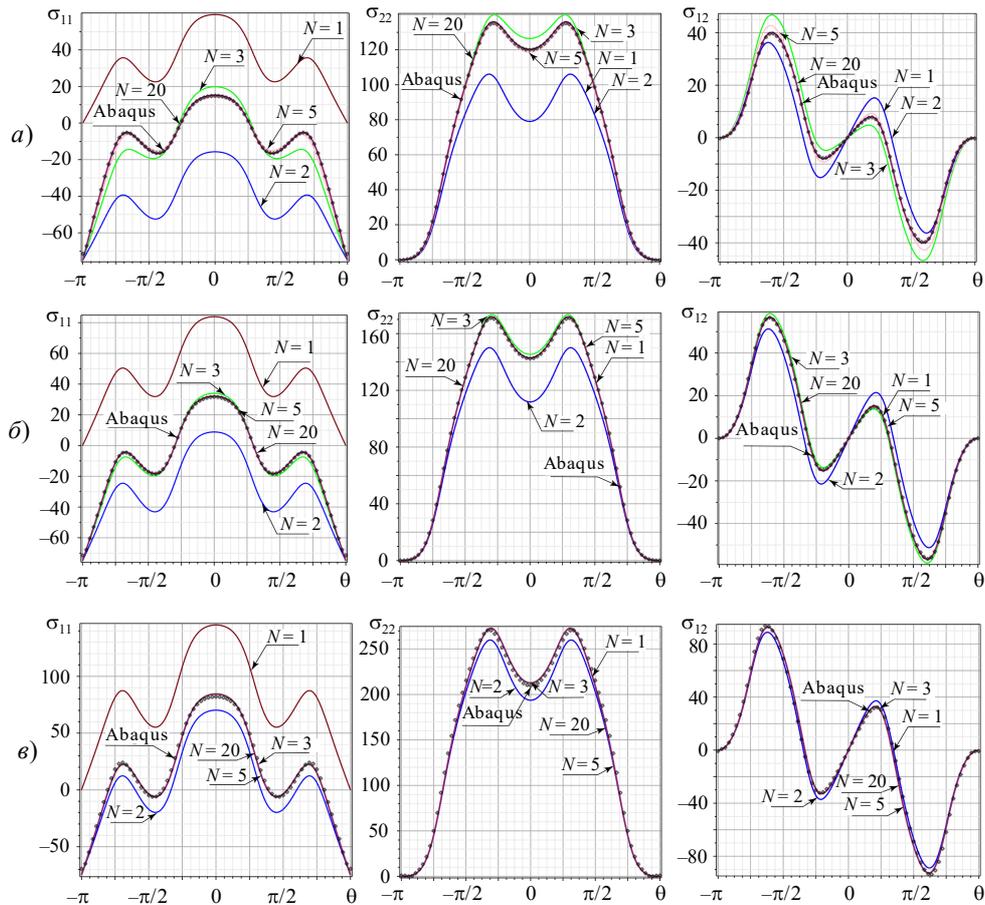


Рис. 10. Угловые распределения напряжений (в МПа) на различных расстояниях от вершины трещины для $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$; а) $r = 0,8$ см, б) $r = 0,4$ см, в) $r = 0,1$ см

В силу указанной причины необходимы надежные алгоритмы, позволяющие точно вычислять амплитудные коэффициенты рядов (4). Одним из них является переопределенный метод, широко применяемый для построения разложения Уильямса, описывающего аппроксимацию поля напряжений у вершины трещины в линейном изотропном теле, на основе имеющихся результатов экспериментальных и численных полей напряжений и перемещений [23–25, 28–32]. Однако подобные техники еще недостаточно апробированы для анизотропных материалов. В литературе, по-видимому, существует пробел в отношении численных методов, способных точно

оценить параметры более высокого порядка в анизотропных средах. В этой части статьи приводятся результаты работы техники переопределенного метода, обобщенного на анизотропные среды. С целью определения масштабных факторов был выполнен конечно-элементный расчет полей напряжений и перемещений в растягиваемой пластине с центральным разрезом в ортотропной пластине. Вычисления были проведены в пакете Simulia Abaqus. После получения численных значений компонент тензора напряжений применяется форма записи уравнений с усеченным количеством слагаемых в каждой сумме (4) (в общем случае число слагаемых, отвечающих нормальному отрыву N и поперечному сдвигу M , может быть различным):

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^N A_n r^{n/2-1} \begin{pmatrix} f_{1,11}^{(n)}(\theta) \\ f_{1,22}^{(n)}(\theta) \\ f_{1,12}^{(n)}(\theta) \end{pmatrix} + \sum_{n=1}^M B_n r^{n/2-1} \begin{pmatrix} f_{2,11}^{(n)}(\theta) \\ f_{2,22}^{(n)}(\theta) \\ f_{2,12}^{(n)}(\theta) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

С помощью уравнений (13) может быть получена система уравнений переопределенного метода в матричной форме

$$\Sigma = GA, \quad (14)$$

где приняты следующие обозначения

$$\Sigma = (\sigma_{11}^1 \ \sigma_{11}^2 \ \dots \ \sigma_{11}^K \ \sigma_{22}^1 \ \sigma_{22}^2 \ \dots \ \sigma_{22}^K \ \sigma_{12}^1 \ \sigma_{12}^2 \ \dots \ \sigma_{12}^K), \quad (15)$$

$$A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_N \ B_1 \ B_3 \ \dots \ B_M)^T, \quad (16)$$

$$G = \begin{pmatrix} r_1^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{N-1/2} f_{1,11}^{(N)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{M-1/2} f_{2,11}^{(M)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{N-1/2} f_{1,11}^{(N)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{M-1/2} f_{2,11}^{(M)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_K^{-1/2} f_{1,11}^{(1)}(\theta_K) & f_{1,11}^{(2)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{1,11}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{N-1/2} f_{1,11}^{(N)}(\theta_K) & r_K^{-1/2} f_{2,11}^{(1)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{2,11}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{M-1/2} f_{2,11}^{(M)}(\theta_K) \\ r_1^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{N-1/2} f_{1,22}^{(N)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{M-1/2} f_{2,22}^{(M)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{N-1/2} f_{1,22}^{(N)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{M-1/2} f_{2,22}^{(M)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_K^{-1/2} f_{1,22}^{(1)}(\theta_K) & f_{1,22}^{(2)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{1,22}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{N-1/2} f_{1,22}^{(N)}(\theta_K) & r_K^{-1/2} f_{2,22}^{(1)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{2,22}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{M-1/2} f_{2,22}^{(M)}(\theta_K) \\ r_1^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_1) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{N-1/2} f_{1,12}^{(N)}(\theta_1) & r_1^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_1) & r_1^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_1) & \dots & r_1^{M-1/2} f_{2,12}^{(M)}(\theta_1) \\ r_2^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_2) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{N-1/2} f_{1,12}^{(N)}(\theta_2) & r_2^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_2) & r_2^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_2) & \dots & r_2^{M-1/2} f_{2,12}^{(M)}(\theta_2) \\ \dots & \dots \\ r_K^{-1/2} f_{1,12}^{(1)}(\theta_K) & f_{1,12}^{(2)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{1,12}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{N-1/2} f_{1,12}^{(N)}(\theta_K) & r_K^{-1/2} f_{2,12}^{(1)}(\theta_K) & r_K^{1/2} f_{2,12}^{(3)}(\theta_K) & \dots & r_K^{M-1/2} f_{2,12}^{(M)}(\theta_K) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

В уравнениях (15) и (17) K – количество точек, взятых из конечно-элементного расчета. В рамках проведенных вычислений из конечно-элементных расчетов выбирались значения компонент тензора напряжений в узлах конечно-элементной сетки, лежащих на концентрических окружностях с центром в вершине разреза. Типичное конечно-элементное разбиение представлено на рис. 11.

Каждая окружность разделена на 72 равных сектора, представляющих собой сингулярные конечные элементы. Таким образом, появляются 219 значений компонент тензора напряжений. В самом простом случае вектор-строка (15) содержала 219 столбцов, в случае двух концентрических окружностей вектор-строка содержала 438 составляющих и т.д. В результате формировалась существенно переопределенная система алгебраических уравнений. Система уравнений (14) допускает точное решение $A = (G^T G)^{-1} G^T \Sigma$.

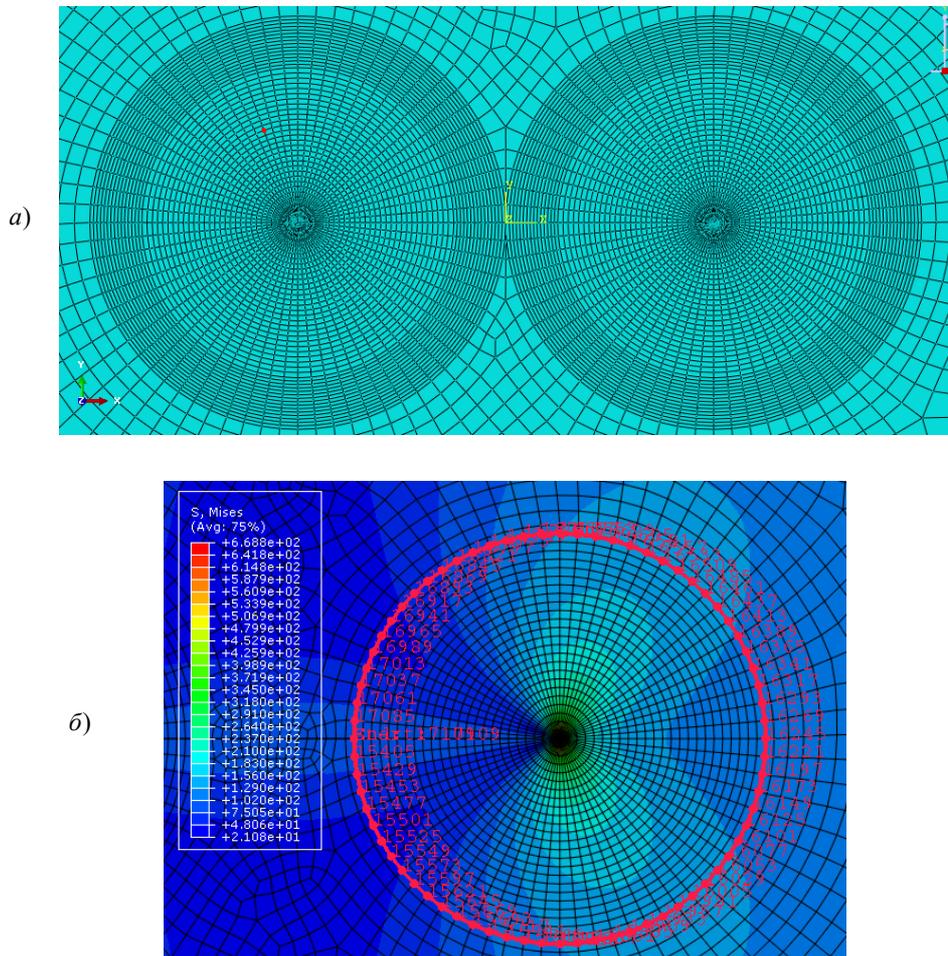


Рис. 11. Типичная сетка вблизи трещины в пластине и окружающие вершину сингулярные конечные элементы (а); контур, вдоль которого выбираются узлы сетки для алгоритма переопределенного метода (б)

Существует мнение [23–25, 28–32], согласно которому в асимптотическом представлении (в зависимости от расстояния от кончика разреза) достаточно удерживать 9–11 слагаемых. Поэтому если в каждой сумме сохранять 11 слагаемых, среди которых будет 13 ненулевых, содержащих коэффициенты $A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}$ и $B_1, B_3, B_5, B_7, B_9, B_{11}$, то формируется система 219 алгебраических уравнений относительно 13 неизвестных величин $A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}$ и $B_1, B_3, B_5, B_7, B_9, B_{11}$. Альтернативным подходом является применение целевой функции

$$J(A) = \frac{1}{2}(\Sigma - GA)^T(\Sigma - GA), \quad (18)$$

минимум которой будет давать искомые амплитудные факторы $A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11}$ и $B_1, B_3, B_5, B_7, B_9, B_{11}$. Вычисленные посредством разработанного алгоритма значения коэффициентов ряда собраны в таблице 1, где приведены безразмерные значения амплитудных факторов:

$$\hat{A}_{2n+1} = \frac{A_{2n+1} a^{(2n-1)/2}}{\sigma^\infty}, \quad \hat{A}_2 = \frac{A_2}{\sigma^\infty}, \quad \hat{B}_{2n+1} = \frac{B_{2n+1} a^{(2n-1)/2}}{\sigma^\infty}.$$

Таблица 1

**Вычисленные значения масштабных коэффициентов
для различных значений угла наклона разреза α при $\beta = 0$**

Амплитудные множители	$\alpha = \pi/2$	$\alpha = \pi/3$	$\alpha = \pi/6$	Амплитудные множители	$\alpha = \pi/3$	$\alpha = \pi/6$
A_1	0,35355	0,26516	0,08838	B_1	0,15309	0,15309
A_2	-0,15466	-0,07733	0,07731	B_2	0	0
A_3	0,26516	0,19887	0,06629	B_3	0,11481	0,11481
A_5	-0,05524	-0,04143	-0,01381	B_5	-0,02392	-0,02392
A_7	0,01933	0,01450	0,00483	B_7	0,00837	0,00837
A_9	-0,00768	-0,00582	-0,00194	B_9	-0,00336	-0,00336
A_{11}	0,00332	0,00249	0,00083	B_{11}	0,00143	0,00143

Полученные с помощью переопределенного метода амплитудные факторы были сопоставлены с теоретическим решением для бесконечной пластины. Вычисленные значения находятся в хорошем соответствии с теоретическими результатами (5). Погрешность не превышает 0,5% для последних приведенных в таблице 1 коэффициентов A_{11} , B_{11} ; коэффициенты A_1 , A_2 , B_1 определяются с точностью 10^{-9} .

Заключение

Исследовано свойство точности усеченных рядов, обобщающих представление М. Уильямса для компонент тензора напряжений в анизотропных плоских средах. Для ряда углов наклона трещины к горизонтальной оси построены двумерные поля абсолютной погрешности аппроксимационного решения в рядах с удержанием высших приближений относительно точного аналитического решения задачи о растяжении анизотропной плоскости с разрезом. Показано, что двумерные поля абсолютной погрешности имеют геометрические места точек с нулевой погрешностью. Показано, что на плоскости, представляющей двумерные поля абсолютной погрешности, имеются кривые, на которых аппроксимационное решение является точным.

Предложен и усовершенствован численный метод реконструкции коэффициентов рядов полей напряжений, деформаций и перемещений вблизи кончика дефекта в линейно упругих анизотропных (ортоотропных) материалах. Предлагаемый существенно переопределенный метод основан на конечно-элементных расчетах для определения коэффициентов рядов вблизи вершины трещины в анизотропных средах. С помощью полученного конечно-элементного поля напряжений в узлах конечно-элементной сетки формируется существенно переопределенная система алгебраических уравнений относительно коэффициентов асимптотических разложений полей. Исследованы численные примеры трещин в конечных и бесконечных пластинах, где результаты предлагаемого подхода демонстрируют хорошее соответствие с точными или альтернативными численными решениями. Приведено исследование сходимости методики для проверки надежности методологии и достоверности результатов. Вычислена соответствующая ошибка при аппроксимации поля напряжений. Низкие значения погрешностей демонстрируют высокую точность развитого метода.

Список литературы

1. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Engineering Fracture Mechanics*. 2020. Vol. 231. Article No 106982. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
2. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 91. P. 837–862. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
3. Rana A., Miller R.E., Wang X. Two parameter characterization of semi-circular cracks in anisotropic plastic materials. *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 299. Article No 109954. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109954>.
4. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. Crack tip fields in anisotropic planes: a review. *International Journal of Fracture*. 2022. Vol. 234. Iss. 1-2. P. 113–139. <https://doi.org/10.01007/s10704-021-00559-2>.
5. Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and continuum ascertainment of the crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 133. Part B. Article No 104613. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613>.
6. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *Journal of Applied Mechanics*. 1952. Vol. 19. P. 526–528. <https://doi.org/10.1115/1.4010553>.
7. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. Iss. 1. P. 109–114. <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.
8. Saimoto A., Sonobe Y., Kitamura T., Ambe Y. Analysis of mutual interference among line cracks in an orthotropic plate. *Procedia Structural Integrity*. 2024. Vol. 52. P. 323–339. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.12.032>.
9. Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2022. Vol. 119. Article No 103298. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.
10. Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 30. Iss. 19. P. 3862–3884. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.
11. Степанова Л.В., Белова О.Н. Идентификация коэффициентов интенсивности напряжений, T-напряжений и коэффициентов регулярных слагаемых высокого порядка в разложении М. Уильямса с помощью молекулярно-динамического моделирования. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2023. №2. С. 47–77. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2023.2.06>.
12. Melching D., Breitbarth E. Advanced crack tip characterization using conjugate work integral. *International Journal of Fatigue*. 2023. Vol. 169. Article No 107501. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2023.107501>.
13. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. Iss. 3. P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>.
14. Gupta M., Alderliesten R., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Engineering Fracture Mechanics*. 2015. Vol. 134. P. 218–241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>.
15. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. New York: ASME Press, 2000. 696 p.
16. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *International Journal of Fracture Mechanics*. 1965. Vol. 1 (3). P. 189–203. <https://doi.org/10.1007/BF00186854>.
17. Solyaev Yu. Higher-order asymptotic crack-tip fields in simplified strain gradient elasticity. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 130. Article No 104321. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104321>.
18. Wang J.-J., Liu C., Jiao G.-C. Crack-tip constraint analysis of bending specimens for considering higher order terms in asymptotic solution. *International Journal of Pressure*

- Vessels and Piping*. 2024. Vol. 210. Article No 105246. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2024.105246>.
19. Hello G. On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions. *International Journal of Fracture*. 2024. <https://doi.org/10.1007/s10704-024-00802-6>.
 20. Ramaswamy G., Ramesh K., Saravanan U. Influence of contact stresses on crack-tip stress field: A multiparameter approach using digital photoelasticity. *Experimental Mechanics*. 2024. Vol. 64. P. 785–804. <https://doi.org/10.1007/s11340-024-01053-1>.
 21. Zhang J., Enea M., Pagani A., Carrera E., Madenci E., Liu X., Yang Q. A computational approach to integrate three-dimensional peridynamics and two-dimensional higher-order classical elasticity theory for fracture analysis. *Engineering with Computers*. 2024. <https://doi.org/10.1007/s00366-024-02001-2>.
 22. Melching D., Paysan F., Strohmann T., Breitbarth E. An iterative crack tip correction algorithm discovered by physical deep symbolic regression. *International Journal of Fatigue*. 2024. Vol. 187. Article No 108432. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108432>.
 23. Shi L., Oyadiji S.O. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Engineering Fracture Mechanics*. 2024. Vol. 296. Article No 109852. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.
 24. Фомченкова М.А., Степанова Л.В. Процедура переопределенного метода нахождения коэффициентов разложения полей у вершины трещины, основанная на конечно-элементном решении для компонент тензора напряжения. *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.* 2024. Т. 30. №2. С. 54–66. DOI: 10.18287/2541-7525-2024-30-2-54-66.
 25. Мушанкова К.А., Степанова Л.В. Влияние слагаемых высокого порядка малости в решении, обобщающем подход М. Уильямса, учитывающем анизотропию материала. *Вестн. СамУ. Естественнонаучн. сер.* 2023. Т. 29. №2. С. 30–39. DOI: 10.18287/2541-7525-2023-29-2-30-39.
 26. *The Material Project*. <https://next-gen.materialsproject.org/materials/mp-614013?formula=CsSnI3#summary>.
 27. Gaillac R., Pullumbi P., Coudert F.-X. ELATE: An open-source online application for analysis and visualization of elastic tensors. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2016. Vol. 28. No 27. Article No 275201. DOI: 10.1088/0953-8984/28/27/275201.
 28. Malikova L., Mirka P., Kucharczykova B., Simonova H. Williams expansion utilized for assessment of crack behaviour under mixed-mode loading in alkali-activated fine-grained composite. *Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures*. 2021. Vol. 44. Iss. 5. P. 1151–1161. <https://doi.org/10.1111/ffe.13418>.
 29. Лихачев А.В., Табанюхова М.В. Новый алгоритм обработки данных метода фотоупругости. *Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. 2022. №79. С. 100–110. DOI: 10.17223/19988621/79/9.
 30. Anand C., Ramesh K., Natarajan S. Photoelastic verification of certain recommendations for numerical modelling of fracture using the phase field method. *Optics and Lasers in Engineering*. 2024. Vol. 180. Article No 108319. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2024.108319>.
 31. Anand C., Natarajan S., Ramesh K. Simulating isochromatic fringes from finite element results of FEniCS. *Experimental Techniques*. 2024. Vol. 48. P. 171–175. <https://doi.org/10.1007/s40799-023-00639-z>.
 32. Vivekanandan A., Ramesh K. Photoelastic analysis of crack terminating at an arbitrary angle to the bimaterial interface under four point bending. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*. 2023. Vol. 127. Article No 104075. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104075>.

References

1. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghouli S. The finite element over-deterministic method to calculate the coefficients of crack tip asymptotic fields in anisotropic planes. *Eng. Fract. Mech.* 2020. Vol. 231. Article No 106982. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2020.106982>.
2. Nejati M., Ghouli S., Ayatollahi M.R. Crack tip asymptotic fields in anisotropic planes: Importance of higher order terms. *Appl. Math. Model.* 2021. Vol. 91. P. 837–862. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.09.025>.
3. Rana A., Miller R.E., Wang X. Two parameter characterization of semi-circular cracks in

anisotropic plastic materials. *Eng. Frac. Mech.* 2024. Vol. 299. Article No 109954. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109954>.

4. Ayatollahi M.R., Nejati M., Ghoulai S. Crack tip fields in anisotropic planes: a review. *Int. J. Fract.* 2022. Vol. 234. Iss. 1-2. P. 113–139. <https://doi.org/10/01007/s10704-021-00559-2>.

5. Stepanova L.V., Mushankova K.A. Atomistic and continuum ascertainment of the crack tip stress fields in anisotropic elastic cubic media. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2024. Vol. 133. Part B. Article No 104613. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104613>.

6. Williams M.L. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. *J. Appl. Mech.* 1952. Vol. 19. P. 526–528. <https://doi.org/10.1115/1.4010553>.

7. Williams M.L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* 1957. Vol. 24. Iss. 1. P. 109–114. <https://doi.org/10.1115/1.4011454>.

8. Saimoto A., Sonobe Y., Kitamura T., Ambe Y. Analysis of mutual interference among line cracks in an orthotropic plate. *Procedia Structural Integrity.* 2024. Vol. 52. P. 323–339. <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2023.12.032>.

9. Stepanova L.V., Belova O.N. Coefficients of the Williams power expansion of the near crack tip stress field in continuum linear elastic fracture mechanics at the nanoscale. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2022. Vol. 119. Article No 103298. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2022.103298>.

10. Stepanova L.V., Belova O.N. Stress intensity factors, T-stresses and higher order coefficients of the Williams series expansion and their evaluation through molecular dynamics simulations. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2022. Vol. 30. Iss. 19. P. 3862–3884. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2084800>.

11. Stepanova L.V., Belova O.N. Identifikatsiya koeffitsientov intensivnosti napryazheniy, T-napryazheniy i koeffitsientov reguljarnykh slagaemykh vysokogo poryadka v razlozhenii M. Uilyamsa s pomoshchyu molekulyarno-dinamicheskogo modelirovaniya [Identification of stress intensity factors, T-stresses and higher-order coefficients of regular terms in the Williams series expansion through molecular dynamics simulations]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2023. Iss. 2. P. 47–77 (In Russian).

12. Melching D., Breitbarth E. Advanced crack tip characterization using conjugate work integral. *Int. J. Fatigue.* 2023. Vol. 169. Article No 107501. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2023.107501>.

13. Irwin G.R. Analysis of stresses and strains near the end of crack traversing a plate. *J. Appl. Mech.* 1957. Vol. 24. Iss. 3. P. 361–364. <https://doi.org/10.1115/1.4011547>.

14. Gupta M., Alderliesten R., Benedictus R. A review of T-stress and its effects in fracture mechanics. *Eng. Frac. Mech.* 2015. Vol. 134. P. 218–241. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2014.10.013>.

15. Tada H., Paris P.C., Irwin G.R. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. New York. ASME Press. 2000. 696 p.

16. Sih G.C., Paris P.C., Irwin G.R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies. *Int. J. Fract. Mech.* 1965. Vol. 1 (3). P. 189–203. <https://doi.org/10.1007/BF00186854>.

17. Solyaev Yu. Higher-order asymptotic crack-tip fields in simplified strain gradient elasticity. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2024. Vol. 130. Article No 104321. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104321>.

18. Wang J.-J., Liu C., Jiao G.-C. Crack-tip constraint analysis of bending specimens for considering higher order terms in asymptotic solution. *Int. J. Press. Vessels Pip.* 2024. Vol. 210. Article No 105246. <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2024.105246>.

19. Hello G. On the loci of exactness for truncated Williams crack-tip stress expansions. *Int. J. Fract.* 2024. <https://doi.org/10.1007/s10704-024-00802-6>.

20. Ramaswamy G., Ramesh K., Saravanan U. Influence of contact stresses on crack-tip stress field: A multiparameter approach using digital photoelasticity. *Exp. Mech.* 2024. Vol. 64. P. 785–804. <https://doi.org/10.1007/s11340-024-01053-1>

21. Zhang J., Enea M., Pagani A., Carrera E., Madenci E., Liu X., Yang Q. A computational approach to integrate three-dimensional peridynamics and two-dimensional higher-order

classical elasticity theory for fracture analysis. *Engineering with Computers*. 2024. <https://doi.org/10.1007/s00366-024-02001-2>.

22. Melching D., Paysan F., Strohm T., Breitbarth E. An iterative crack tip correction algorithm discovered by physical deep symbolic regression. *Int. J. Fatigue*. 2024. Vol. 187. Article No 108432. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2024.108432>.

23. Shi L., Oyadiji S.O. Determination of notch stress intensity factors under mode I loading using the 3D-DIC and finite element over-deterministic methods. *Eng. Fract. Mech.* 2024. Vol. 296. Article No 109852. <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2024.109852>.

24. Fomchenkova M.A., Stepanova L.V. Protsedura pereopredelennoy metoda nakhozheniya koeffitsientov razlozheniya poley u vershiny treshchiny, osnovannaya na konechno-elementnom reshenii dlya komponent tenzora napryazheniya [Procedure of the overdeterministic method for finding the field expansion coefficients at the crack tip based on a finite element solution for the stress tensor components]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 2024. Vol. 30. No 2. P. 54–66 (In Russian).

25. Mushankova K.A., Stepanova L.V. Vliyaniye slagaemykh vysokogo poryadka malosti v reshenii, obobshchayushchem podkhod M. Uilyamsa, uchityvayushchem anizotropiyu materiala [Influence of high-order terms in the solution generalizing the approach of M. Williams, taking into account the anisotropy of the material]. *Vestnik Samarskogo universiteta. Estestvennonauchnaya seriya*. 2023. Vol. 29. No 2. P. 30–39 (In Russian).

26. *The Material Project*. <https://next-gen.materialsproject.org/materials/mp-614013?formula=CsSnI3#summary>.

27. Gaillac R., Pullumbi P., Coudert F.-X. ELATE: An open-source online application for analysis and visualization of elastic tensors. *Journal of Physics: Condensed Matter*. 2016. Vol. 28. No 27. Article No 275201. DOI: 10.1088/0953-8984/28/27/275201.

28. Malikova L., Mirka P., Kucharczykova B., Simonova H. Williams expansion utilized for assessment of crack behaviour under mixed-mode loading in alkali-activated fine-grained composite. *Fatigue & Fracture Engineering Materials & Structures*. 2021. Vol. 44. Iss. 5. P. 1151–1161. <https://doi.org/10.1111/ffe.13418>.

29. Likhachev A.V., Tabanyukhova M.V. Novyy algoritm obrabotki dannykh metoda foto-uprugosti [A new processing algorithm for photoelasticity method data]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika*. 2022. No 79. P. 100–110 (In Russian).

30. Anand C., Ramesh K., Natarajan S. Photoelastic verification of certain recommendations for numerical modelling of fracture using the phase field method. *Opt. Lasers Eng.* 2024. Vol. 180. Article No 108319. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2024.108319>.

31. Anand C., Natarajan S., Ramesh K. Simulating isochromatic fringes from finite element results of FEniCS. *Experimental Techniques*. 2024. Vol. 48. P. 171–175. <https://doi.org/10.1007/s40799-023-00639-z>.

32. Vivekanandan A., Ramesh K. Photoelastic analysis of crack terminating at an arbitrary angle to the bimaterial interface under four point bending. *Theor. Appl. Fract. Mech.* 2023. Vol. 127. Article No 104075. <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.104075>.

ON THE ACCURACY OF TRUNCATED EXPANSIONS AT THE CRACK TIP IN ANISOTROPIC MATERIALS*

Stepanova L.V., Fomchenkova M.A.

Samara National Research University, Samara, Russian Federation

stepanova.lv@ssau.ru, fomchenkova.ma@yandex.ru

Received by the Editor 2024/08/20

Asymptotic expansions generalizing the representation of M. Williams are widely used to represent mechanical fields near the tip of cracks in plane anisotropic elastic media. For practical applications, asymptotic solutions in the form of formal infinite series should be truncated, and

*The research was supported by Russian Science Foundation (grant No 21-11-00346).

there is a full understanding that higher accuracy can be achieved by preserving more terms in the series. The effect of truncation on accuracy can be quantified by comparing truncated solutions with exact analytical solutions (closed-form solutions) that exist for some crack configurations. The computation of two-dimensional absolute error fields reveals amazing patterns in which points with numerically zero error appear, which implies the existence of areas where truncated series can give accurate results. These points of precision converge on curves radiating from the crack tips and directed to the outside of the circles of convergence of the series. The paper also proposes and improves a numerical method for reconstructing the coefficients of the stress field series, strains and displacements near the tip of a defect in linearly elastic anisotropic (orthotropic) materials. The proposed substantially over-deterministic method is based on finite element (FE) analysis to determine the coefficients of series near the crack tip in anisotropic media. With the help of the obtained finite element stress field, a significantly over-deterministic system of algebraic equations is formed in the nodes of the finite element grid with respect to the coefficients of asymptotic field expansions. Numerical examples of cracks in finite and infinite plates are investigated, where the results of the proposed approach demonstrate good agreement with exact or alternative numerical solutions. A convergence study of the methodology is being conducted to verify the reliability of the methodology and the reliability of the results. The corresponding error in the approximation of the stress field is calculated. Low error values demonstrate the high accuracy of the developed method.

Keywords: linearly elastic materials, orthotropic materials, cubic symmetry of elastic properties, generalized series solution for fields near the tip of the crack, generalization of the overdeterministic method.