

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-342-357

**МАТЕРИАЛЬНЫЕ КОНСТАНТЫ  
ПИРОПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ ТРИГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ  
В УСЛОВИЯХ ВОЗДЕЙСТВИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ  
РАЗЛИЧНОЙ ПРИРОДЫ\***

© 2024 г. **Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В.**

*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

ssc-ssc-ras.ru

*Поступила в редакцию 01.08.2024*

Исследуется предложенная ранее модель предварительно напряженной термоэлектроупругой среды класса 3m тригональной сингонии, находящейся в условиях воздействия начальных механических напряжений, электростатического поля при заданной температуре. Предполагается, что наведенное в материале начально-деформированное состояние однородно, начальные тепловые воздействия не превышают температуры фазовых переходов, начальное электростатическое поле однородно и задано вектором напряженности. Используются линеаризованные в лагранжевой системе координат определяющие соотношения, уравнения движения термоэлектроупругих сред, уравнения электростатики и уравнения распространения тепла. Линеаризация проведена в рамках наложения малых деформаций на конечные деформации с сохранением в уравнении состояния членов высокого порядка. В рамках модели на примере  $\text{LiNbO}_3$  исследовано раздельное и совместное влияние вида и величины начальных воздействий на изменение свойств материала. Показано, что начальные механические, электростатические или температурные воздействия нарушают симметрию пиропьезоэлектрического материала: совпадающие в естественном состоянии константы разделяются, их поведение различно и зависит от характера и величины наведенных деформаций. Под действием одноосного механического напряжения показана трансформация упругих и пьезоэлектрических модулей материала в зависимости от наведенных деформаций, температуры, величины и направленности вектора напряженности начального электростатического поля. Показано, что наличие температурного фактора позволяет либо ослаблять, либо усиливать влияние начальных механических и электростатических воздействий. Установлены закономерности влияния начального электростатического поля большой напряженности на упругие и пьезоэлектрические свойства материала. Результаты оформлены в виде графиков и могут представлять интерес при разработке, проектировании и оптимизации пиропьезоэлектрических материалов, используемых при создании микро- и наноразмерных приборов и устройств.

---

\* Выполнено в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН (№ гос-регистрации 122020100343-4).

*Ключевые слова:* термоэлектростатическое поле, преднапряженная термоэлектростатическая среда, начальные механические напряжения, начальное электростатическое поле, предварительный нагрев, класс симметрии  $3m$  тригональной сингонии, ниобат лития.

## **Введение**

Основные положения механики термопьезоэлектрических (ТПЭ) материалов сформулированы в [1–7], там же приведены определяющие соотношения и уравнения движения. В [8, 9] построена обобщенная линейная теория ТПЭ сред. В [10, 11] исследован процесс распространения поверхностных волн в полуограниченных термоэлектростатических (ТЭУ) средах. В [12, 13] приведены результаты исследования процессов распространения и отражения волн в пироэлектрической и пьезоэлектрической средах. В [14–16] рассмотрены смешанные задачи для анизотропных слоистых ТЭУ сред, приведена их строгая постановка, предложены методы исследования. Специфика технологии создания приборов и устройств современной микро- и нанoeлектроники приводит к необходимости создания новых искусственных пиропьезоэлектрических материалов с заранее заданными свойствами, разработки адекватных верифицируемых моделей, эффективных подходов и прецизионных методов изучения процессов распространения поверхностных акустических волн (ПАВ) и объемных волн (ОВ) в предварительно напряженных средах. В статьях [17–19] исследовано влияние начальных механических напряжений на распространение ОВ и ПАВ в составных структурах из пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов. Роль начальных напряжений играли аддитивные члены в уравнениях движения, начально-деформированное состояние (НДС) материала не учитывалось. В статьях [20, 21] представлены одни из первых результатов исследования процессов распространения волн в упругих средах, показано существенное влияние начальных напряжений на физические свойства материала. В [22–24] представлены результаты исследования особенностей распространения волн Лэмба и Рэлея в электроупругих средах в условиях воздействия внешних электростатических полей. Влияние электростатического поля (ЭП) учитывалось за счет добавления в уравнения движения аддитивного члена с компонентой вектора напряженности. В [25–27] в рамках наложения малых деформаций на конечные деформации [28] проведена последовательная линеаризация уравнений нелинейной электродинамики сплошной среды, построены определяющие соотношения и уравнения движения электроупругой в отсутствие [25] и при наличии [26] внешнего ЭП, а также ТЭУ среды [27]. В [29, 30] на основе полученных линеаризованных соотношений развит метод исследования особенностей распространения ПАВ в зависимости от начальных механических напряжений и внешнего ЭП. В [31, 32] построены трехмерные функции Грина полупространства с преднапряженным неоднородным покрытием, выполненным из ТЭУ функционально-градиентного материала. В [33] на примере CdSe исследованы нелинейные эффекты влияния начальных напряжений, электростатического поля и температуры на НДС и свойства пиропьезоэлектриков класса  $6mm$  гексагональной сингонии. Исследованию свойств пиропьезоэлектриков класса  $3m$  тригональной сингонии на примере  $\text{LiNbO}_3$  и различных пьезокерамик на его основе посвящены статьи [34–37]. Для пьезоэлектрической структуры с преднапряженным функционально-градиентным покрытием из пьезокерамики на основе  $\text{LiNbO}_3$  в [38] исследовано влияние неоднородности покрытия, характера и величины начальных механических

и электростатических воздействий на изменение физических свойств структуры и особенности трансформации скоростей ШН-ПАВ. В [39] предложена модель предварительно напряженной ТЭУ среды класса 3m тригональной сингонии, находящейся в условиях воздействия начальных механических напряжений, электростатического поля и температуры; приведена трехмерная постановка динамических задач для преднапряженных полуграниченных сред, получена система уравнений, позволяющая определять все параметры НДС материала при различных начальных воздействиях, детально исследовано влияние их характера и величины на изменение НДС материала. Показано качественное изменение наведенных в материале деформаций при совместных начальных механических и электростатических воздействиях. В настоящей статье в рамках предложенной в [39] модели детально исследуется влияние как раздельных, так и совместных начальных механических, электростатических и температурных воздействий на изменение свойств материалов класса 3m тригональной сингонии.

### Материальные константы ТЭУ среды в условиях воздействия физических полей различной природы

Рассматривается предложенная в [39] модель предварительно напряженной ТЭУ среды. Используем представление линеаризованных соотношений в декартовой системе координат:  $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$  – ортонормированный векторный базис декартовых координат;  $x_1, x_2, x_3$  – лагранжевы декартовы координаты, связанные с отсчетной конфигурацией и естественным состоянием (ЕС) материала;  $X_1, X_2, X_3$  – эйлеровы декартовы координаты, связанные с НДС материала;  $\mathbf{R}, \mathbf{r}$  – радиусы-векторы точки среды в НДС и ЕС соответственно ( $\mathbf{R} = X_k \mathbf{i}_k, \mathbf{r} = x_k \mathbf{i}_k, k = 1, 2, 3$ ). Полагаем, что в ТЭУ материале среды за счет действия механических напряжений, ЭП и температуры наводится однородное НДС вида [5, 25–33, 38, 39] ( $k, p = 1, 2, 3$ ):

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{kp} v_k \mathbf{i}_k \mathbf{i}_p, \quad \varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}, \quad \theta = T_1, \quad v_k = \text{const.} \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{\Lambda}$  – тензор преобразования радиус-вектора из отсчетной конфигурации (совпадающей с ЕС) в НДС;  $v_k = 1 + \delta_k, \delta_k$  – главные относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей  $x_k$ ;  $\delta_{kp}$  – символ Кронекера;  $\varphi_0$  – электрический потенциал;  $\mathbf{E}_0$  – напряженность начального внешнего ЭП в НДС;  $T_1$  – температура тела в НДС. Полагаем, что состояние

$$\mathbf{S} = 0, \quad \mathbf{W} = 0, \quad \theta = T_0 \quad (2)$$

является состоянием с минимальной свободной энергией;  $\mathbf{S}, \mathbf{W}, \theta$  – тензор деформации Коши – Грина, «материальный» вектор напряженности внешнего ЭП и температура. В рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечные деформации динамика преднапряженной ТЭУ среды в лагранжевой системе координат описывается линеаризованными уравнения движения, вынужденной электростатики и теплопроводности [2–7, 25–27, 31–33, 39]:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \nabla_0 \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{m}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{h} + T_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $\nabla_0$  – набла-оператор, определенный в отсчетной конфигурации;  $\mathbf{\Theta}$  – линеаризованный тензор напряжений преднапряженной среды;  $\mathbf{\Pi}, \mathbf{m}, \mathbf{d}, \mathbf{h}$  и  $\eta$  – линеаризованные тензор напряжений Пиолы, тензор напряжений Пиолы – Максвелла, «матери-

альный» вектор индукции, вектор потока тепла и энтропия;  $\rho_0$  – плотность материала в ЕС;  $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$  – вектор смещений. Постановки краевых задач и вид граничных условий для ТЭУ сред приведен в [5, 7, 10, 27, 31–33]. Участвующие в (3) линеаризованные тензоры  $\mathbf{\Pi}$  и  $\mathbf{m}$ , векторы  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{h}$ , а также энтропия  $\eta$  определяются соотношениями (здесь и далее индексами после запятой отмечено дифференцирование по соответствующим координатам;  $l, k, s, p, m = 1, 2, 3$ ) [27, 29–33, 39]:

$$\begin{aligned} \Pi_{lk} &= c_{lksp}^* u_{s,p} + e_{lkp}^* \varphi_{,p} - q_{lk}^* T, \quad m_{lk} = \zeta_{lksp}^* u_{s,p} + \psi_{lkp}^* \varphi_{,p}, \quad d_l = d_l^{\Pi} + d_l^m, \\ d_l^{\Pi} &= e_{lsp}^* u_{s,p} - \eta_{lp}^* \varphi_{,p} + p_l T, \quad d_l^m = \psi_{lsp}^* u_{s,p}, \quad h_l = -\lambda_{ll} T_{,l}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \eta &= q_{sp}^* u_{s,p} - p_m \varphi_{,m} + \frac{\rho_0 c_\varepsilon}{T_0} T; \\ c_{lksp}^* &= P_{lk} \delta_{ks} + v_k v_s c_{lksp}, \quad e_{lsp}^* = v_s e_{lsp}, \quad \eta_{lp}^* = \varepsilon^{(0)} J v_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}, \quad q_{lk}^* = v_k q_{lk}, \\ g_{lsp}^* &= e_{lsp}^* + \psi_{lsp}^*, \quad \psi_{ijk}^* = \varepsilon^{(0)} J v_i^{-1} v_k^{-1} [\delta_{ij} W_k v_k^{-1} - \delta_{jk} W_i v_i^{-1} - \delta_{ik} W_j v_j^{-1}], \\ \zeta_{lksp}^* &= \varepsilon^{(0)} J v_l^{-1} \left[ \frac{1}{2} W_m^2 v_m^{-2} (v_k^{-1} \delta_{kp} \delta_{ls} - v_s^{-1} \delta_{lk} \delta_{sp}) + \right. \\ &\left. + v_p^{-1} (W_k v_k^{-1} (W_l v_l^{-1} \delta_{sp} - W_p v_p^{-1} \delta_{ls} - W_s v_s^{-1} \delta_{lp})) + W_s v_s^{-1} (W_p v_p^{-1} \delta_{lk} - W_l v_l^{-1} \delta_{kp}) \right], \\ P_{ii} &= c_{ijkk} S_k - e_{ijk} W_k - T q_{ii}, \quad S_k = \frac{v_k^2 - 1}{2}, \quad J = v_1 v_2 v_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $c_{lksp}$  – компоненты тензора IV ранга упругих констант II порядка, характеризующие линейную деформацию при постоянных температуре и электрическом поле;  $e_{ijk}$  – компоненты тензора III ранга – тензорные пьезоэлектрические константы II порядка, связанные с электроакустическими эффектами;  $\beta_{ij}$  – компоненты тензора II ранга констант диэлектрической восприимчивости, для которых справедливо  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ij} + \beta_{ij}$  ( $\varepsilon_{ij}$  – компоненты тензора диэлектрической проницаемости,  $\varepsilon^{(0)}$  – диэлектрическая проницаемость вакуума);  $T = T_1 - T_0$  – приращение температуры;  $q_{ij}$  – коэффициенты термоупругости;  $\lambda_{ii}$  – компоненты тензора коэффициентов удельной теплопроводности;  $p_k$  – компоненты вектора пирозлектричества;  $c_\varepsilon$  – удельная теплоемкость;  $P_{ii}$  – компоненты тензора Кирхгофа, которые в рамках условий (1) и (2) наряду с электростатическим и тепловым воздействием определяют НДС среды.

С учетом свойств материала и выражений (5) приведем более наглядное матричное представление для участвующих в (4) коэффициентов  $c_{lksp}^*$ :

$$\mathbf{c}^{\Pi*} = \begin{pmatrix} c_{11}v_1^2 + P_{11} & c_{12}v_1v_2 & c_{13}v_1v_3 & c_{14}v_1v_2 & c_{14}v_1v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{12}v_1v_2 & c_{11}v_2^2 + P_{22} & c_{13}v_2v_3 & -c_{14}v_2^2 & -c_{14}v_2v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{13}v_1v_3 & c_{13}v_2v_3 & c_{33}v_3^2 + P_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14}v_1v_3 & -c_{14}v_2v_3 & 0 & c_{44}v_2v_3 & c_{44}v_3^2 + P_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{14}v_1v_2 & -c_{14}v_2^2 & 0 & c_{44}v_2^2 + P_{33} & c_{44}v_2v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}v_1v_3 & c_{44}v_3^2 + P_{11} & c_{14}v_1v_3 & c_{14}v_2v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}v_1^2 + P_{33} & c_{44}v_1v_3 & c_{14}v_1^2 & c_{14}v_1v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14}v_1v_2 & c_{14}v_2v_3 & c_{66}v_1v_2 & c_{66}v_2^2 + P_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14}v_1^2 & c_{14}v_1v_3 & c_{66}v_1^2 + P_{22} & c_{66}v_1v_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$e_{lkp}^*$  и  $e_{lsp}^*$ :

$$\mathbf{e}^{\Pi^*} = \begin{pmatrix} 0 & -v_1 e_{22} & v_1 e_{31} \\ 0 & e_{22} v_2 & e_{31} v_2 \\ 0 & 0 & e_{33} v_3 \\ 0 & e_{15} v_3 & 0 \\ 0 & e_{15} v_2 & 0 \\ e_{15} v_3 & 0 & 0 \\ e_{15} v_1 & 0 & 0 \\ -e_{22} v_2 & 0 & 0 \\ -e_{22} v_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\mathbf{e}^{d^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} v_1 & e_{15} v_3 & -e_{22} v_1 & -e_{22} v_2 \\ -v_1 e_{22} & e_{22} v_2 & 0 & e_{15} v_2 & e_{15} v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 e_{31} & e_{31} v_2 & e_{33} v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{c}^{\Pi^*}$ ,  $\mathbf{e}^{\Pi^*}$  и  $\mathbf{e}^{d^*}$  записаны в форме матричного представления закона состояния преднапряженного ТЭУ материала [31, 32].

Из (7) видно, что в отличие от ЕС матрица  $\mathbf{e}^{\Pi^*}$  в НДС уже не является транспонированной матрицей  $\mathbf{e}^{d^*}$ . Из представлений (4)–(7) следует, что свойства среды учитываются в коэффициентах компонент  $\Pi_{lk}$ ,  $d_l^{\Pi}$ ,  $h_l$  и энтропии  $\eta$ . Коэффициенты  $\zeta_{lksp}^*$  и  $\psi_{lsp}^*$  компонент  $m_{lk}$  и  $d_l^m$  [30, 33, 39] в силу (5) не зависят от свойств материала, определены направлением и величиной вектора напряженности начального ЭП. При этом все коэффициенты зависят от характера и величины начальных деформаций, определяемых условиями (1) и (2). Следует отметить, что учет электростатического поля приводит не только к изменению значения материальных констант, но и к появлению новых, отличных от нуля, модулей в матрице закона состояния. Как правило, значения этих модулей не велики и определены величиной наведенных ЭП деформаций, характером и величиной заданного вектора напряженности. Вид матриц коэффициентов  $\zeta_{lksp}^*$  и  $\psi_{lsp}^*$  приведен в [33].

Следуя [33, 39], введем обозначения:

$$\begin{aligned} \theta_{lksp} &= c_{lksp}^* + \zeta_{lksp}^*, & \theta_{lk4p} &= e_{lkp}^* + \psi_{lkp}^*, & \theta_{l4sp} &= e_{lsp}^* + \psi_{lsp}^*, \\ \theta_{lk55} &= \theta_{55lk} = -q_{lk}^*, & \theta_{l44p} &= -\eta_{lp}^*, \\ \theta_{l555} &= p_l, & \theta_{5555} &= -c_\epsilon \rho_0 T_0^{-1}, & k, l, s, p &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (8)$$

В новых обозначениях участвующие в (3) компоненты линеаризованных тензора  $\Theta$ , вектора  $\mathbf{d}$  и энтропия  $\eta$  записываются в виде ( $\mathbf{u}^{\text{ET}} = \{u_1, u_2, u_3, u_4 = \varphi, u_5 = T\}$  – расширенный вектор смещений,  $l, k, s, p, m = 1, 2, 3$ ):

$$\begin{aligned} \Theta_{lk} &= \theta_{lksp} u_{s,p} + \theta_{lk4p} u_{4,p} + \theta_{lk55} u_5, & d_l &= \theta_{l4sp} u_{s,p} + \theta_{l44p} \varphi_{,p} + \theta_{l555} u_5, \\ -\eta &= \theta_{55sp} u_{s,p} - \theta_{m555} u_{4,m} + \theta_{5555} u_5. \end{aligned} \quad (9)$$

Далее при проведении исследований используем безразмерные параметры в соответствии с [39].

Коэффициенты (6) являются материальными коэффициентами преднапряженного ТЭУ материала, посредством которых записываются определяющие уравнения (4),

(9), граничные условия и уравнения движения (3) преднапряженной ТЭУ среды. Анализ их поведения позволяет проводить детальное исследование влияния начальных воздействий различной природы на динамику ТЭУ среды. В настоящей статье исследовано влияние незначительных тепловых воздействий. Учет больших значений начальных температур существенно меняет свойства материала, выходит за рамки линеаризованной теории и требует привлечения нелинейных соотношений.

Параметры НДС в силу условий (1), (2) и свойств материала определяются из решения системы [39]:

$$\begin{aligned}
 P_{11} &= c_{11}S_{11} + c_{12}S_{22} + c_{13}S_{33} + e_{22}W_2^0 - e_{31}W_3^0 - \Delta Tq_{11}, \\
 P_{22} &= c_{12}S_{11} + c_{11}S_{22} + c_{13}S_{33} - e_{22}W_2^0 - e_{31}W_3^0 - \Delta Tq_{11}, \\
 P_{33} &= c_{13}S_{11} + c_{13}S_{22} + c_{33}S_{33} - e_{33}W_3^0 - \Delta Tq_{33}, \\
 d_1 &= (\varepsilon_0 J v_1^{-2} + \beta_{11})W_1^0, \quad d_2 = -e_{22}S_{11} + e_{22}S_{22} + (\varepsilon_0 J v_2^{-2} + \beta_{11})W_2^0, \\
 d_3 &= e_{31}S_{11} + e_{31}S_{22} + e_{33}S_{33} + (\varepsilon_0 J v_3^{-2} + \beta_{33})W_3^0 + p_3 \Delta T.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь  $W_k^0$  – заданные компоненты вектора напряженности начального ЭП;  $\Delta T = T_1 - T_0$  определяет предварительный нагрев или охлаждение материала ( $T_0 = 298$  К).

Таким образом, 6 уравнений системы (10) связывают 6 компонент тензора напряжений и вектора электрической индукции с 6-ю компонентами тензора деформаций и вектора напряженности ЭП. Для задания НДС предусмотрены различные способы: через задание деформаций  $v_i$  вдоль осей и вектора напряженности  $\mathbf{W}$ ; через задание напряжений  $P_{kk}$ , действующих вдоль осей, и вектора индукции  $\mathbf{d}$  или напряженности  $\mathbf{W}$ ; комбинированное задание НДС через задание деформаций  $v_i$  вдоль одной оси и условий на напряжение, действующих вдоль остальных осей. В случае комбинированного задания НДС напряжение  $P_{ii} = P$ , действующее вдоль оси заданной деформации, как и остальные параметры, определяется из решения системы (10). Помимо компонент тензора напряжений и электростатического поля задается начальная температура  $\Delta T$ . Следуя [39], рассмотрим следующие виды НДС ( $P_{ii}, P_{jj}, P_{kk}; \mathbf{W} = \{W_1^0, W_2^0, W_3^0\}; \Delta T = \tau$ ):

$$\begin{aligned}
 \text{НДС } 1x_1: \mathbf{W} &= \{0, 0, 0\}, \quad \Delta T = 0, \quad P_{ii} = P, P_{jj} = P_{kk} = 0; \quad i \neq j \neq k; \\
 \text{НДС } 1x_1 T^\pm: \mathbf{W} &= \{0, 0, 0\}, \quad \Delta T = \pm\tau, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_3^\pm: \mathbf{W} &= \{0, 0, \pm W^0\}, \quad \Delta T = 0, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_2^\pm: \mathbf{W} &= \{0, \pm W^0, 0\}, \quad \Delta T = 0, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_{23}^{\pm\pm}: \mathbf{W} &= \{0, \pm W_2^0, \pm W_3^0\}, \quad \Delta T = 0, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_3^\pm T^\pm: \mathbf{W} &= \{0, 0, \pm W^0\}, \quad \Delta T = \pm\tau, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_2^\pm T^\pm: \mathbf{W} &= \{0, \pm W^0, 0\}, \quad \Delta T = \pm\tau, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0; \\
 \text{НДС } 1x_1 W_{23}^{\pm\pm} T^\pm: \mathbf{W} &= \{0, \pm W_2^0, \pm W_3^0\}, \quad \Delta T = \pm\tau, \quad P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Пирозлектрики класса 3m наряду с тепловым расширением и пьезоэффектом обладают пирозлектрическим эффектом, что позволяет изменением одних параметров в рамках определенного НДС ослаблять или усиливать действие других параметров, что, по сути, предоставляет возможность управлять параметрами НДС.

### Численный анализ

Исследование влияния начальных воздействий на изменение свойств термоупругих материалов тригональной сингонии с классом симметрии  $3m$  в ЕС проводилось на примере пиропьезоэлектрика  $\text{LiNbO}_3$  с параметрами [34, 40]:  $\rho_0 = 4700 \text{ кг/м}^3$ ,  $c_{11} = 20,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{12} = 5,3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{13} = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{14} = 0,9 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{33} = 24,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{44} = 6,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $c_{66} = 7,5 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$ ,  $e_{15} = 3,7 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{22} = 2,5 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{31} = 0,2 \text{ Кл/м}^2$ ,  $e_{33} = 1,3 \text{ Кл/м}^2$ ,  $\varepsilon_{11}/\varepsilon^{(0)} = 44$ ,  $\varepsilon_{33}/\varepsilon^{(0)} = 29$ ,  $q_{11} = q_{22} = 4,57 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2/\text{К}$ ,  $q_{33} = 4,134 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2/\text{К}$ ,  $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 4,4 \text{ Вт/м/К}$ ,  $\lambda_{33} = 4,5 \text{ Вт/м/К}$ ,  $p_3 = -6,5 \cdot 10^{-5} \text{ Кл/м}^2/\text{К}$ ,  $c_\varepsilon = 619 \text{ Дж/кг/К}$ . Следует отметить, что  $\text{LiNbO}_3$  – один из самых распространенных материалов симметрии  $3m$ , который несмотря на свою привлекательность для использования в различных приложениях, относится к термонестабильным материалам, что делает необходимым детальное исследование поведения его свойств при различного рода начальных воздействиях с учетом изменения температуры.

При расчете параметров НДС (10) величину наведенных начальных деформаций определяют механические напряжения  $P_{ii}$ , действующие вдоль главных осей, изменение температуры относительно исходной  $T_0$  и компоненты вектора напряженности начального электростатического поля  $\mathbf{W}$ . Для исследования влияния начальных воздействий на изменение свойств материала использована лицензированная программа расчета параметров НДС для ТЭУ материалов  $3m$  [41], позволяющая рассчитывать в соответствии с (5)–(9) все константы компонент линеаризованных тензоров напряжений Пиолы и Пиолы – Максвелла, вектора индукции, потока тепла и энтропии в зависимости от вида, величины и способа задания НДС.

### Влияние механических напряжений и температуры на материальные константы

На рис. 1–3 приведено поведение упругих (рис. 1а–г, рис. 3а) и пьезоэлектрических (рис. 2а, б, рис. 3б) модулей в зависимости от величины начальных механических напряжений  $P_{11} = P$  в рамках НДС  $1x_1T^\pm$ .

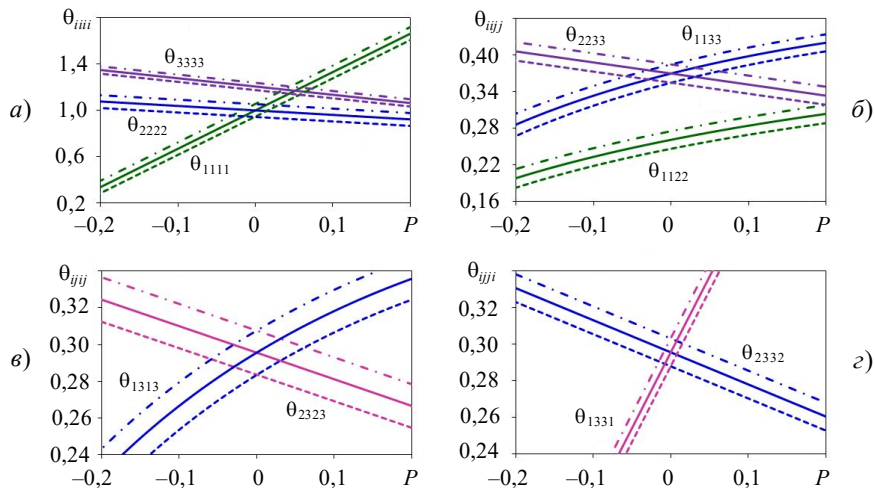


Рис. 1. Влияние механических напряжений и температуры на поведение упругих модулей  $\theta_{iiii}$ ,  $\theta_{ijj}$ ,  $\theta_{iji}$ ,  $\theta_{iji}$  преднапряженного ТЭУ материала

Сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии на рис. 1–3 отвечают значениям  $\tau = 0, 0,04, -0,04$  ( $\tau = 0,04$  соответствует изменению температуры на  $12^\circ$  вне зоны фазовых переходов). Компоненты  $\theta_{iksp}$ , приведенные на рис. 1–3, участвуют при расчете скоростей как ОБ, так и ПАВ в преднапряженном ТЭУ материале.

Из представлений (5), (6), (8) следует, что компоненты  $\theta_{1111}, \theta_{2223}, \theta_{3333}$  (см. рис. 1а) в ЕС соответствуют  $c_{11}, c_{22} = c_{11}, c_{33}$ ; компоненты  $\theta_{1122}, \theta_{1133}, \theta_{2233}$  (см. рис. 1б) –  $c_{12}, c_{13}, c_{23} = c_{13}$ ;  $\theta_{1313}, \theta_{2323}, \theta_{1331}, \theta_{2332}$  (см. рис. 1в, г) отвечают в ЕС одной константе  $c_{44}$ . Из рисунков следует, что определяющим фактором в изменении модулей являются механические напряжения, наличие температуры либо увеличивает (штрихпунктирные линии), либо уменьшает (штриховые линии) их значения. Максимальным изменениям в рамках НДС  $1x_1$  подвержены  $\theta_{1111}$  и  $\theta_{1331}$ , что в физическом плане повлечет изменение скоростей рэлеевской, распространяющейся в направлении  $x_1$ , волны и сдвиговой, поляризованной в плоскости  $x_1Ox_3$ , ПАВ.

На рис. 2 показано изменение пьезоэлектрических свойств материала  $\theta_{ii43}$  ( $\theta_{1143}, \theta_{2243}$  в ЕС  $e_{31}, e_{32}$ , рис. 2а) и  $\theta_{ij4j}$  ( $\theta_{3242}, \theta_{3141}$  в ЕС  $e_{15}$ , рис. 2б) в зависимости от напряжений и температуры.

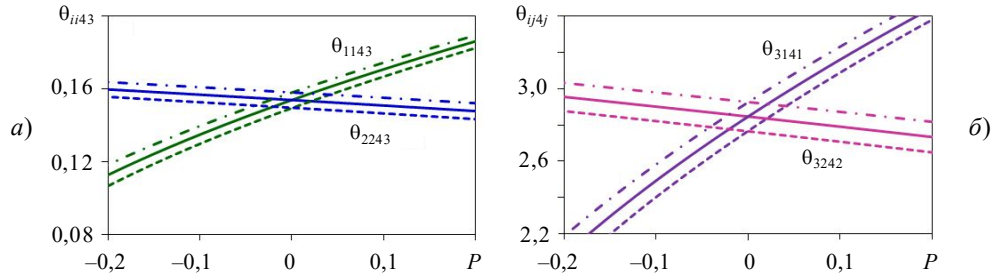


Рис. 2. Влияние механических напряжений и температуры на поведение пьезоэлектрических модулей преднапряженного ТЭУ материала

На рис. 3 приведена зависимость характерных для пиропьезоэлектриков тригональной сингонии с классом симметрии  $3m$  упругих  $\theta_{1123}, \theta_{1321}$  (в ЕС  $c_{14}$ , рис. 3а) и пьезоэлектрических  $\theta_{1241}, \theta_{2141}$  (в ЕС  $e_{22}$ , рис. 3б) модулей от напряжений и температуры.

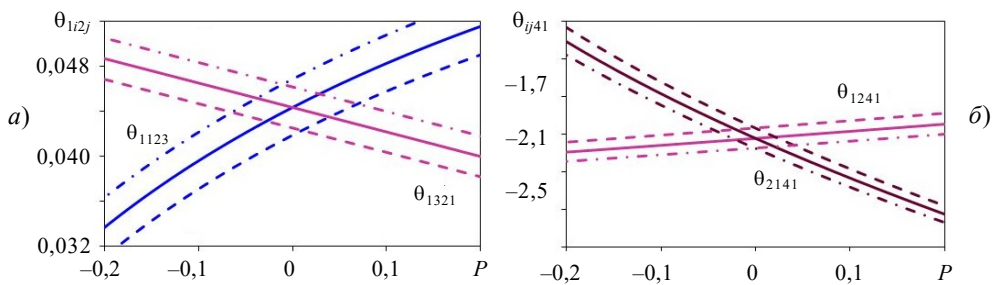


Рис. 3. Влияние механических напряжений и температуры на поведение упругих и пьезоэлектрических модулей

Из сравнения рис. 1–3 видно, что определяющим в изменении как упругих, так и пьезоэлектрических свойств преднапряженного ТЭУ материала является характер и величина механического воздействия. Влияние начальной температуры достаточно велико, но сказывается лишь на значениях модулей, сохраняя их качественное поведение.



### Влияние электростатического поля на материальные константы

Рисунок 4 иллюстрирует изменение упругих, а рис. 5 – изменение пьезоэлектрических свойств материала в зависимости от наведенной за счет ЭП в НДС  $1x_1$  деформации  $v_1 = v$ . Сплошными линиями на рис. 4 и 5 отмечены константы в отсутствие поля (кривые 1), штриховыми линиями – в  $1x_1W_3^-$  (кривые 2) и  $1x_1W_3^+$  (кривые 3), длинными штриховыми линиями – в  $1x_1W_2^-$  (кривые 4) и  $1x_1W_2^+$  (кривые 5), штрихпунктирными линиями – в разнополярных ЭП  $1x_1W_{23}^{+-}$  (кривые 6) и  $1x_1W_{23}^{-+}$  (кривые 7), пунктирными линиями – в однополярных ЭП  $1x_1W_{23}^{--}$  (кривые 8) и  $1x_1W_{23}^{++}$  (кривые 9). В представленных на рисунках НДС значения компонент вектора напряженности  $W_2^0 = W_3^0 = W^0 = 0,1$  соответствуют напряженности порядка  $1 \cdot 10^6$  В/м. На рис. 4 представлено поведение модулей  $\theta_{2222}$ ,  $\theta_{3333}$  (в ЕС  $c_{22} = c_{11}$ ,  $c_{33}$ , рис. 4а, б),  $\theta_{1122}$ ,  $\theta_{2332}$  (в ЕС  $c_{12}$ ,  $c_{44}$ , рис. 4в, г) и  $\theta_{2223}$ ,  $\theta_{3211}$  (в ЕС  $c_{14}$ , рис. 4д, е).

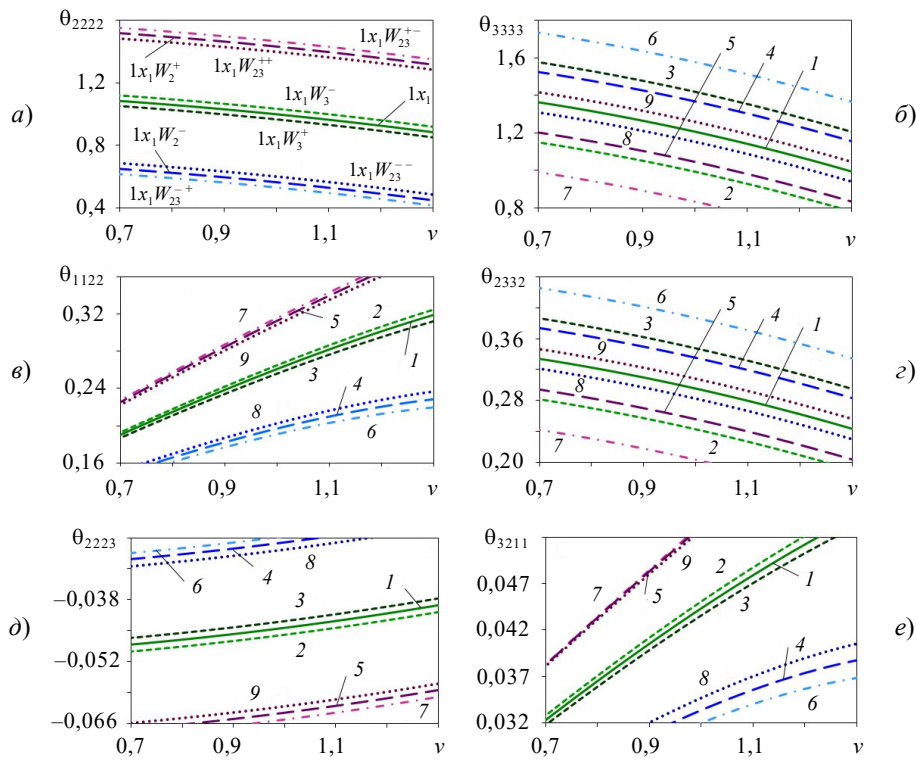


Рис. 4. Влияние электростатического поля на изменение упругих констант преднапряженного ТЭУ материала в рамках одноосного НДС  $1x_1$

Поведение представленных на рис. 4 модулей с учетом обозначений (8) определено свойствами материала в ЕС, формулами для  $c_{lksp}^*$ ,  $\zeta_{lksp}^*$  (5), (6), характером деформаций как вдоль  $x_1$ , так и вдоль  $x_2$  и  $x_3$  (рис. 4а–е [39]), наведенных в преднапряженном материале в рамках рассматриваемых НДС, и величиной напряжений, создающих эту деформацию при различных видах электростатических воздействий (рис. 2а в [39]). Следует отметить, что наличие преднагрева в некоторых случаях может привести к изменению допустимого диапазона деформаций, становится актуальным вопрос внутренней устойчивости материала.

На рис. 5 показано поведение пьезоэлектрических модулей  $\theta_{3343}$ ,  $\theta_{2242}$  (в ЕС  $e_{33}$ ,  $e_{32}$ , рис. 5а, б) и  $\theta_{2342}$ ,  $\theta_{3242}$  (в ЕС  $e_{15}$ , рис. 5в, г) в зависимости от наведенной вдоль  $x_1$  деформации.

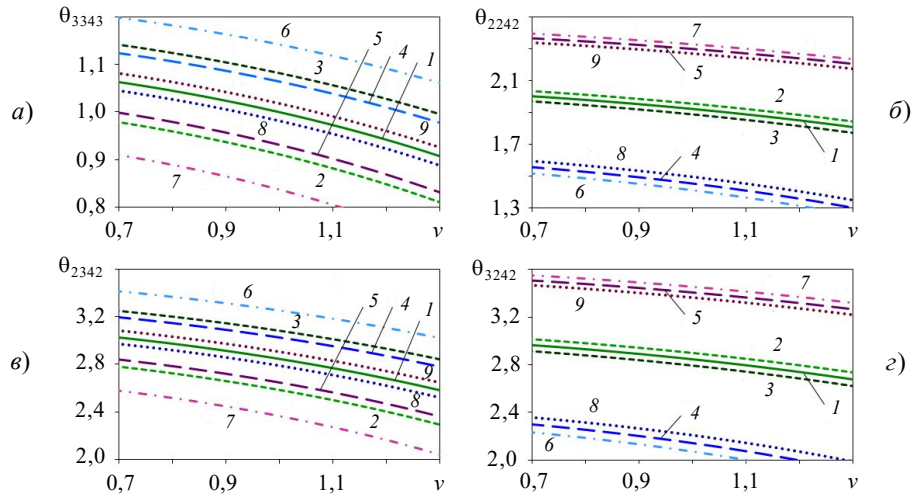


Рис. 5. Влияние внешнего электростатического поля на пьезоэлектрические модули преднапряженного материала в рамках одноосного НДС  $1x_1$

Как и в предыдущем случае, поведение пьезоэлектрических модулей с учетом обозначений (8) определено свойствами материала в ЕС, формулами для  $e_{isp}^*$ ,  $\Psi_{isp}^*$ , (5), (7), характером деформаций вдоль главных осей, наведенных в преднапряженном материале, и величиной напряжений, создающих эту деформацию при различных видах электростатических воздействий, в рамках рассматриваемых НДС. Как следует из рисунков, действие ЭП приводит к значительным изменениям величины как упругих, так и пьезоэлектрических констант, не меняя их качественного поведения, определяемого характером механических воздействий. В отличие от НДС  $1x_1W_3^\pm$ ,  $1x_1W_2^\pm$ ,  $1x_1W_{23}^{--}$ ,  $1x_1W_{23}^{++}$ , которые весьма существенно могут влиять на изменение значения одних модулей и в меньшей степени на значение других (см. рис. 4а–в, рис. 5а, б), НДС  $1x_1W_{23}^{+-}$ ,  $1x_1W_{23}^{-+}$  максимально влияют на изменение значений как упругих, так и пьезоэлектрических модулей преднапряженного материала.

### Заключение

Исследована линеаризованная модель пиропьезоэлектрика класса симметрии 3m тригональной сингонии, подверженной начальным механическим, тепловым и электростатическим воздействиям. Полагается, что наведенное в материале начально-деформированное состояние однородно, начальные тепловые воздействия не превышают температуры фазовых переходов, начальное электростатическое поле задано вектором напряженности. В рамках сделанных предположений исследовано раздельное и совместное влияние вида и величины начальных воздействий различной физической природы на упругие и пьезоэлектрические свойства материала. Показано, что определяющее влияние на изменение материальных констант оказывает характер механических воздействий, влияние которых на упругие и пьезоэлектрические константы является нелинейным и различным по величине. Тепловое воздействие при-

водит к количественным изменениям величины констант, не меняя их качественного характера, что способствует усилению или ослаблению влияния как механических, так и электростатических воздействий. Более сложно влияние ЭП: действие различных видов ЭП наводит в материале напряжения и деформации, определяемые величиной и направленностью вектора напряженности. При совместном механическом и электростатическом воздействии наличие начального электростатического поля большой напряженности приводит к качественным изменениям характера деформаций и, как следствие, к значительным изменениям свойств преднапряженного материала, что дает возможность управления ЭП свойствами ТЭУ материалов.

#### Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред*. М.: Гостехтеориздат, 1957. 530 с.
2. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*. Philadelphia: SIAM, 1961. P. 282–290.
3. Седов Л.И. *Введение в механику сплошной среды*. М.: Физматлит, 1962. 284 с.
4. Nowacki W. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 1965. Vol. 1. P. 3–12.
5. Tiersten H.F. On the non-linear equations of thermo-electroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 1971. Vol. 9. Iss. 7. P. 587–604. DOI: 10.1016/0020-7225(71)90062-0.
6. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermo-piezoelectric plate. *International Journal of Solids and Structures*. 1974. Vol. 10. Iss. 6. P. 625–637 DOI: 10.1016/0020-7683(74)90047-X.
7. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 1978. Vol. 1. Iss. 2. P. 171–182. DOI: 10.1080/01495737808926940.
8. Chandrasekharaiah D.S. A temperature rate dependent theory of piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 1984. Vol. 7. Iss. 3–4. P. 293–306. DOI: 10.1080/01495738408942213.
9. Chandrasekharaiah D.S. A generalized linear thermoelasticity theory of piezoelectric media. *Acta Mechanica*. 1988. Vol. Iss. 1–4. 71. P. 39–49.
10. Sharma M.D. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermo-elastic media. *Acta Mechanica*. 2010. Vol. 215. Iss. 1–4. P. 307–318. DOI: 10.1007/s00707-010-0336-3.
11. Biswas S. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 231. Iss. 1. P. 373–387. DOI: 10.1007/s00707-020-02848-8.
12. Kuang Z.-B., Yuan X.-G. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*. 2011. Vol. 330. Iss. 6. P. 1111–1120. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.026>.
13. Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30. Iss. 14. P. 2941–2952. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2066232>.
14. Калинин В.В., Белянкова Т.И. К проблеме исследования динамических смешанных задач электроупругости и термоупругости для слоисто-неоднородного полупространства. *Изв. Вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2000. №3. С. 72–74.
15. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями. *ДАН*. 2007. Т. 412. № 6. С. 753–758.
16. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для многослойных анизотропных композитов. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2006. Т. 2. №4. С. 5–11.
17. Othmani C., Khelifa T. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials. *Mechanics Research Communications*. 2023. Vol. 127. Article No 104037. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104037>.

18. Othmani C., Zhang H., Lü C. Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial expansion approach. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 78. P. 148–168. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.017>.
19. Kumar D., Kundu S. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media*. 2023. P. 1–15. DOI: 10.1080/17455030.2022.2164093.
20. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Об описании влияния конечных деформаций на скорости распространения упругих волн. *Докл. АН СССР*. 1971. Т. 198. №2. С. 316–318.
21. Гринфельд М.А., Мовчан А.А. Влияние предварительного деформирования на распространение упругих волн. *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*. 1975. Т. 8. С. 29–35.
22. Александров К.С., Бурков С.И., Сорокин Б.П. Влияние внешнего однородного электрического поля на свойства волн Рэлея в пьезоэлектрических кристаллах. *ФТТ*. 1990. Т. 3. Вып.1. С. 186–192.
23. Бурков С.И., Золотова О.П., Сорокин Б.П., Александров К.С. Влияние внешнего электрического поля на характеристики волны Лэмба в пьезоэлектрической пластине. *Акустический журнал*. 2010. Т. 56. №5. С. 606–612.
24. Liu H., Wang T.J., Wang Z.K., Kuang Z.B. Effect of a biasing electric field on the propagation of symmetric Lamb waves in piezoelectric plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. No 7. P. 2031–2049. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00014-8.
25. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Евдокимова О.В. Определяющие соотношения динамики преднапряженной пьезоактивной среды в отсутствие внешних электрических полей. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2006. Т. 2. №1. С. 16–23. DOI: 10.23885/1813-4289-2006-2-1-16-23.
26. Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинин В.В. Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2007. Т. 3. №4. P. 19–25.
27. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Шейдаков Д.Н. Уравнения динамики преднапряженной электротермоупругой среды. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2011. Т. 7. №2. С. 3–10.
28. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.
29. Белянкова Т.И., Калинин В.В. О влиянии электростатического поля на ПАВ в предварительно напряженных сегнетоэлектрических гетероструктурах. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2020. № 6. С. 101–110. DOI: 10.31857/S0572329920050037.
30. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Волны Рэлея в электроупругой среде с преднапряженным неоднородным покрытием. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10 (68). Вып. 4. С. 600–615.
31. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Функция Грина преднапряженного термоэлектроупругого функционально-градиентного слоя. *Наука юга России*. 2014. Т. 10. № 4. С. 5–15.
32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On the modeling of a prestressedthermoelastoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52(1). P. 95–110 DOI: 10.3103/S0025654417010113.
33. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В. Влияние начальных механических, электростатических и температурных воздействий на свойства пиропьезоэлектриков гексагональной сингонии. *Наука юга России*. 2023. Т. 19. № 4. С. 3–17. DOI: 10.7868/S25000640230401.
34. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*. 1967. Vol. 6. No 5. P. 151. DOI: 10.1143/JJAP.6.151.
35. Pluta M., Buttlar M., Habib A. et.al. Modeling of Coulomb coupling and acoustic wave propagation in LiNbO<sub>3</sub>. *Ultrasonics*. 2008. Vol. 48. Iss. 6-7. P. 583–586. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.07.008.
36. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Shilkina L.A., Razumovskaya O.N., Dudkina S.I., Gadzhiev G.G., Kallaev S.N., Omarov Z.M. Properties of Na<sub>0,875</sub>Li<sub>0,125</sub>NbO<sub>3</sub> ceramics. *Inorganic Materials*. 2008. Vol. 44(10). P. 1135–1150. DOI: 10.1134/S002016850810021X.
37. Peng Y., Shenghua H., Zhaoyong R., Jiantao L., Yijie L. Investigation on effects of thermo-

mechanical coupling on residual stress in lithium niobate in surface acoustic wave device. *Materials Science in Semiconductor Processing*. 2024. Vol. 172. Article No 108083. <https://doi.org/10.1016/j.mssp.2023.108083>.

38. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on  $\text{LiNbO}_3$ . *Journal of Advanced Dielectrics*. 2021. Vol. 11. No 5. Article No 2160007. <https://doi.org/10.1142/S2010135X21600079>.

39. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В. Особенности начально-деформированного состояния пиропьезоэлектриков тригональной сингонии. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №2. С. 235–250. DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-235-250.

40. Warner A.W., Onoe M., Coquin G.A. Determination of elastic and piezoelectric constants for crystals in class (3m). *Journal of the Acoustical Society of America*. 1967. Vol. 42. Iss. 6. P. 1223–1231. <https://doi.org/10.1121/1.1910709>.

41. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В. Расчет однородного начально-деформированного состояния, наведенного в термоэлектродупругих материалах тригональной системы класса 3m за счет механических, электрических и температурных воздействий. *Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ*. Номер свидетельства: RU 2023614530. Патентное ведомство: Россия, номер заявки 2023613291, дата регистрации: 21.02.2023; опублик. 02.03.2023.

#### References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Teoreticheskaya fizika. Elektrodinamika sploshnykh sred* [Course of Theoretical Physics. Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow. Gostekh-teorizdat Publ. 1957. 530 p. (In Russian).

2. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*. Philadelphia. SIAM. 1961. P. 282–290.

3. Sedov L.I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnoy sredy* [Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow. Fizmatlit Publ. 1962. 284 p. (In Russian).

4. Nowacki W. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 1965. Vol. 1. P. 3–12.

5. Tiersten H.F. On the non-linear equations of thermo-electroelasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 1971. Vol. 9. Iss. 7. P. 587–604. DOI: 10.1016/0020-7225(71)90062-0.

6. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermo-piezoelectric plate. *Int. J. Solids Struct.* 1974. Vol. 10. Iss. 6. P. 625–637 DOI: 10.1016/0020-7683(74)90047-X.

7. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *J. Therm. Stress*. 1978. Vol. 1. Iss. 2. P. 171–182. DOI: 10.1080/01495737808926940.

8. Chandrasekharaiah D.S. A temperature rate dependent theory of piezoelectricity. *J. Therm. Stress*. 1984. Vol. 7. Iss. 3-4. P. 293–306. DOI: 10.1080/01495738408942213.

9. Chandrasekharaiah D.S. A generalized linear thermoelasticity theory of piezoelectric media. *Acta Mech.* 1988. Vol. 71. Iss. 1–4. P. 39–49.

10. Sharma M.D. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermo-elastic media. *Acta Mech.* 2010. Vol. 215. Iss. 1–4. P. 307–318. DOI: 10.1007/s00707-010-0336-3.

11. Biswas S. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mech.* 2020. Vol. 231. Iss. 1. P. 373–387. DOI: 10.1007/s00707-020-02848-8.

12. Kuang Z.-B., Yuan X.-G. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *J. Sound Vib.* 2011. Vol. 330. Iss. 6. P. 1111–1120. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.026>.

13. Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30. Iss. 14. P. 2941–2952. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2066232>.

14. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. K probleme issledovaniya dinamicheskikh smeshannykh zadach elektroduprugosti i termouprugosti dlya sloisto-neodnorodnogo poluprostranstva [On

the problem of studying dynamic mixed problems of electroelasticity and thermoelasticity for a layered-inhomogeneous half-space]. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki* [News of Universities. North Caucasus Region. Natural Sciences]. 2000. No 3. P. 72–74 (In Russian).

15. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. O smeshannykh zadachakh dlya termoelektrouprugikh sred s razryvnymi granichnymi usloviyami [On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions]. *Doklady Akademii nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences]. 2007. Vol. 412. No 6. P. 753–758 (In Russian).

16. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. O smeshannykh zadachakh dlya mnogoslonykh anizotropnykh kompozitov [About combined boundary-value problems in anisotropic multilayered composites]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN* [Bulletin of the Southern Scientific Center of RAS]. 2006. Vol. 2. No 4. P. 5–11 (In Russian).

17. Othmani C., Khelfa T. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials. *Mech. Res. Commun.* 2023. Vol. 127. Article No 104037. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104037>.

18. Othmani C., Zhang H., Lü C. Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial expansion approach. *Appl. Math. Model.* 2020. Vol. 78. P. 148–168. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.017>.

19. Kumar D., Kundu S. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media.* 2023. P. 1–15. DOI: 10.1080/17455030.2022.2164093.

20. Guz A.N., Makhort F.G. Ob opisani vliyaniya konechnykh deformatsiy na skorosti rasprostraneniya uprugikh voln [Description of the effect of finite deformations on the velocity of propagation of elastic waves]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [Proceedings of the Academy of Sciences of USSR]. 1971. Vol. 198. No 2. P. 316–318 (In Russian).

21. Grinfeld M.A., Movchan A.A. Vliyanie predvaritelnogo deformirovaniya na rasprostraneniye uprugikh voln [The influence of preliminary deformation on the propagation of elastic waves]. *News of the USSR Academy of Sciences. Earth Physics Series.* 1975. Vol. 8. P. 29–35 (In Russian).

22. Aleksandrov K.S., Burkov S.I., Sorokin B.P. Vliyanie vneshnego odnorodnogo elektricheskogo polya na svoystva voln Releya v pyeoelektricheskikh kristallakh [Effect of external uniform electric field on Rayleigh waves in piezoelectric crystals]. *Fizika tverdogo tela* [Physics of the Solid State]. 1990. Vol. 3. Iss.1. P. 186–192 (In Russian).

23. Burkov S.I., Zolotova O.P., Sorokin B.P., Aleksandrov K.S. Effect of external electrical field on characteristics of a Lamb wave in a piezoelectric plate. *Acoustical Physics.* 2010. Vol. 56. No 5. P. 644–650.

24. Liu H., Wang T. J., Wang Z. K., Kuang Z.B. Effect of a biasing electric field on the propagation of symmetric Lamb waves in piezoelectric plates. *Int. J. Solids Struct.* 2002. Vol. 39. No 7. P. 2031–2049. DOI: 10.1016/S0020-7683(02)00014-8.

25. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Evdokimova O.V. Opredeleyayushchie sootnosheniya dinamiki prednapryazhennoy pyezoaktivnoy sredy v otsutstvie vneshnikh elektricheskikh poley [Basic relations of the dynamics of a prestressed piezoactive medium in the absence of external electric fields]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN* [Bulletin of the Southern Scientific Center of RAS]. 2006. Vol. 2. No 1. P. 16–23 (In Russian).

26. Evdokimova O.V., Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Uravneniya dinamiki prednapryazhennoy pyezoaktivnoy sredy pri nalichii vneshnego elektrostaticheskogo polya [Dynamics equations for prestressed piezo-active medium in the presence of external electrostatic field]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN* [Bulletin of the Southern Scientific Center of RAS]. 2007. Vol. 3. No 4. P. 19–25 (In Russian).

27. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Sheydakov D.N. Uravneniya dinamiki prednapryazhennoy elektrotermouprugoy sredy [Equations of dynamics of a prestressed electro-thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo Nauchnogo tsentra RAN* [Bulletin of the Southern Scientific Center of RAS]. 2011. T. 7. No 2. P. 3–10 (In Russian).

28. Lurye A.I. *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 512 p. (In Russian).

29. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Influence of an electrostatic field on SAW in prestressed ferroelectric heterostructures. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 6. P. 844–851. DOI: 10.3103/S0025654420050039.
30. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Volny Releya v elektrouprugoy srede s prednapryazhenym neodnorodnym pokrytiem [Rayleigh waves in an electroelastic medium with prestressed inhomogeneous coating]. *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*. 2023. Vol. 10 (68). Iss. 4. P. 600–615 (In Russian).
31. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Funktsiya Grina prednapryazhennogo termoelektro- uprugogo funktsionalno-gradientnogo sloya [Green's function of a prestressed thermoelectric- elastic functional gradient layer]. *Nauka Yuga Rossii [Science in the South Russia]*. 2014. Vol. 10. No 4. P. 5–15 (In Russian).
32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52(1). P. 95–110 DOI: 10.3103/S0025654417010113.
33. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. Vliyanie nachalnykh mekhanicheskikh, elektrostatiicheskikh i temperaturnykh vozdeystviy na svoystva piropyezoelektrikov geksagonalnoy singonii [The influence of initial mechanical, electrostatic and temperature effects on the properties of pyropiezoelectrics of the hexagonal syngony]. *Nauka Yuga Rossii [Science in the South of Russia]*. 2023. Vol. 19. No 4. P. 3–17. DOI: 10.7868/S25000640230401 (In Russian).
34. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*. 1967. Vol. 6. No 5. P. 151. DOI: 10.1143/JJAP.6.151.
35. Pluta M., Buttlar M., Habib A. et.al. Modeling of Coulomb coupling and acoustic wave propagation in LiNbO<sub>3</sub>. *Ultrasonics*. 2008. Vol. 48. Iss. 6-7. P. 583–586. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.07.008.
36. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Shilkina L.A., Razumovskaya O.N., Dudkina S.I., Gadzhiev G.G., Kallaev S.N., Omarov Z.M. Properties of Na<sub>0.875</sub>Li<sub>0.125</sub>NbO<sub>3</sub> ceramics. *Inor. Mater.* 2008. Vol. 44(10). P. 1135–1150. DOI: 10.1134/S002016850810021X.
37. Peng Y., Shenghua H., Zhaoyong R., Jiantao L., Yijie L. Investigation on effects of thermo-mechanical coupling on residual stress in lithium niobate in surface acoustic wave device. *Mater. Sci. Semicond. Process.* 2024. Vol. 172. Article No 108083. <https://doi.org/10.1016/j.mssp.2023.108083>.
38. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on LiNbO<sub>3</sub>. *J. Adv. Dielectr.* 2021. Vol. 11. No 5. Article No 2160007. <https://doi.org/10.1142/S2010135X21600079>.
39. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. Osobennosti nachalno-deformirovannogo sostoyaniya piropyezoelektrikov trigonalnoy singonii [Features of the initial deformed state of pyropiezoelectrics of trigonal system]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 2. P. 235–250 (In Russian).
40. Warner A.W., Onoe M., Coquin G.A. Determination of elastic and piezoelectric constants for crystals in class (3m). *Journal of the Acoustical Society of America*. 1967. Vol. 42. Iss. 6. P. 1223–1231. <https://doi.org/10.1121/1.1910709>.
41. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. Raschet odnorodnogo nachalno-deformirovannogo sostoyaniya, navedennogo v termoelektrouprugikh materialakh trigonalnoy sistemy klassa 3m za schet mekhanicheskikh, elektricheskikh i temperaturnykh vozdeystviy [Calculation of a homogeneous initial deformed state induced in thermo-electroelastic materials of a class 3m trigonal system due to mechanical, electrical and temperature influences]. *Svidetelstvo o registratsii programmy dlya EVM*. Nomer svidetelstva: RU 2023614530. Patentnoe vedomstvo: Rossiya, nomer zayavki 2023613291, data registratsii: 21.02.2023; opubl. 02.03.2023 [Certificate of Registration of a Computer Program. Certificate number: RU 2023614530. Patent office: Russia, application number 2023613291, registration date: 2023/02/21; publ. 2023/03/02] (In Russian).

**MATERIAL CONSTANTS OF TRIGONAL  
SYNGONY PYROPIEZOELECTRICS UNDER THE INFLUENCE  
OF PHYSICAL FIELDS OF DIFFERENT NATURE\***

**Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V.**

*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
Rostov-on-Don, Russian Federation*

ssc-ssc-ras.ru

*Received by the Editor 2024/08/01*

The article studies the previously proposed model of a prestressed thermoelectroelastic medium of class 3m trigonal syngony under the action of initial mechanical stresses, an electrostatic field at a given temperature. The model is based on linearized constitutive relations constructed within the framework of sequential linearization of nonlinear equations of continuous medium electrodynamics. Linearization is carried out within the framework of superimposing small deformations on final ones with preservation of high-order terms in the equation of state. When constructing a model based on the use of linearized constitutive relations, it is taken into account that it is impossible to use the Voigt notation, which is usual for the natural state, in this case. Within the framework of this model, the behavior of the material constants of a thermoelectroelastic medium of class 3m trigonal syngony is studied. It is shown that, unlike electrical and mechanical effects, the thermal factor linearly affects the constants: preheating leads to an increase in the elastic constants, cooling – to their decrease. The effect on the piezoelectric constants is also linear, but more complex: some constants increase, others decrease. In this case, the possibility of using the Voigt notation, which is usual for the natural state, is preserved. Mechanical and electrical effects lead to the separation of constants coinciding in the natural state; in this case, the use of the Voigt notation, which is usual for the natural state, is impossible. The decomposed constants depend nonlinearly on mechanical stresses, but linearly on the electrostatic field. The nature and magnitude of the change in the constants depend both on the type of mechanical action and on the polarity of the electrostatic field. It should be noted that in this work, the effect of minor thermal effects was investigated. The effect of high initial temperatures significantly changes the properties of the material, but goes beyond the linearized theory and requires the use of nonlinear relationships.

*Keywords:* thermoelectroelasticity, prestressed thermoelectroelastic medium, initial mechanical stresses, initial electrostatic field, preheating, trigonal system, symmetry class 3m, lithium niobate.

---

\* This study was carried out within the state task implementation to Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (state registration No 122020100343-4).