

УДК 539.376

## РАВНОНАПРЯЖЕННОЕ АРМИРОВАНИЕ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН ПРИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

Ю.В. Немировский, А.П. Янковский

*Новосибирск*

Сформулирована задача равнонапряженного армирования металлокомпозитных пластин, нагруженных в своей плоскости и работающих в условиях установившейся ползучести. Разработан метод решения поставленной задачи при смешанных граничных условиях. Подробно исследован случай прямолинейного равнонапряженного армирования плоской конструкции волокнами переменного поперечного сечения. Получено в квадратурах решение для кольцевой пластины, армированной по радиально-симметричным логарифмическим спиральям. Проанализированы результаты расчета радиально армированной кольцевой пластины.

При создании композитных тонкостенных конструкций целесообразно осуществлять их оптимизацию. Одним из наиболее естественных критериев рационального проектирования армированных конструкций является условие равнонапряженности силовых элементов – волокон (проволок) – вдоль их траекторий, так как при этом несущая способность арматуры используется наиболее полно.

При длительной эксплуатации изделия в случае статического термосилового нагружения подавляющую часть времени металлокомпозитная конструкция работает в условиях установившейся ползучести [1], поэтому актуальной является проблема равнонапряженного армирования тонкостенных конструкций при установившейся ползучести всех фаз композиции. Изучению этого вопроса применительно к пластинам, нагруженным в своей плоскости, посвящено настоящее исследование.

Рассмотрим металлокомпозитную пластину, работающую в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, армированную двумя семействами волокон (металлических проволок, возможно, изготовленных из разных материалов). Предполагается, что к рассматриваемому моменту времени деформации ползучести получили настолько значительное развитие, что по сравнению с ними можно пренебречь начальными упругими и пластическими деформациями [1]. Тогда задача равнонапряженного армирования такой конструкции в условиях установившейся ползучести описывается следующими уравнениями и соотношениями (используется теория течения и модель армированного слоя из [2]):

– уравнениями равновесия [1]

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{2i,2} = -X_i \equiv -X_i^0(x_1, x_2) \rho_0 \left( 1 - \sum_k \omega_k \right) - \sum_k X_i^{(k)}(x_1, x_2) \rho_k \omega_k, \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

– кинематическими соотношениями [1]

$$\xi_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \quad i, j = 1, 2; \quad (2)$$

– определяющими уравнениями [2]

$$\sigma_{ij} = a\sigma_{ij}^0 + \sum_k \sigma_k \omega_k l_{ki} l_{kj}, \quad i, j = 1, 2; \quad (3)$$

$$\sigma_{ii}^0 = 2g_0(H)(2\xi_{ii} + \xi_{jj}), \quad \sigma_{ij}^0 = 2g_0(H)\xi_{ij} \quad (j = 3 - i, \quad i = 1, 2),$$

$$H = 2\sqrt{\xi_{11}^2 + \xi_{11}\xi_{22} + \xi_{22}^2 + \xi_{12}^2}, \quad (4)$$

$$\sigma_k = g_k(\xi_k)\xi_k = \text{const}, \quad \xi_k = \xi_{11}l_{k1}^2 + \xi_{22}l_{k2}^2 + 2\xi_{12}l_{k1}l_{k2},$$

$$l_{k1} = \cos\psi_k, \quad l_{k2} = \sin\psi_k \quad (k = 1, 2), \quad 0 < a = \text{const} < 1,$$

где  $X_i, v_i$  – компоненты векторов приведенных массовых нагрузок и скорости движения точек пластины по направлениям  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) прямоугольной декартовой системы координат;  $\rho_0, \rho_k$  – объемные плотности материалов связующего и арматуры  $k$ -го семейства;  $X_i^0, X_i^{(k)}$  – компоненты удельных массовых нагрузок, действующих на связующее и арматуру  $k$ -го семейства;  $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^0, \xi_{ij}$  – компоненты тензоров осредненных напряжений, напряжений в связующем и скоростей деформаций ползучести соответственно;  $\sigma_k, \xi_k$  – напряжение и скорость деформации ползучести в  $k$ -м семействе арматуры, связанные коэффициентом пропорциональности  $g_k(\xi_k)$  (зависимость  $g_k \sim \xi_k$  известна);  $g_0(H)$  – заданная функция, являющаяся коэффициентом пропорциональности между интенсивностью касательных напряжений  $T$  и интенсивностью скоростей деформаций  $H$  в связующем:  $T = g_0(H)H$ ;  $a$  – интенсивность прослоек связующего;  $\omega_k, \psi_k$  – интенсивность и угол (отсчитываемый от направления  $x_1$ ) армирования волокнами  $k$ -го семейства, причем должны выполняться физические ограничения

$$\omega_k \geq 0 \quad (k = 1, 2), \quad 0 \leq \sum_k \omega_k \leq 1 - a; \quad (5)$$

суммирование производится по указанному индексу от 1 до 2; нижний индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $x_i$ .

В случае степенного закона  $\xi = B\sigma^m$ , связывающего скорость деформации  $\xi$  и напряжение  $\sigma$  в материале каждой фазы композиции, имеем зависимости [1]:

$$g_0(H) = \bar{B}_0 H^{\mu_0 - 1}, \quad g_k(\xi_k) = \bar{B}_k \xi_k^{\mu_k - 1}, \quad \bar{B}_0 = B_0^{-\mu_0}, \quad \bar{B}_k = B_k^{-\mu_k}, \quad (6)$$

$$\mu_0 = 1/m_0, \quad \mu_k = 1/m_k, \quad k = 1, 2,$$

где  $B_0, m_0, B_k, m_k$  – известные характеристики материалов связующего и арматуры  $k$ -го семейства, зависящие от температуры, которая предполагается однородной в пластине (в противном случае пришлось бы решать связанную задачу теплопроводности и рационального армирования с заранее неизвестными эффективными коэффициентами теплопроводности, что выходит за рамки настоящего исследования).

На одной части контура пластины (обозначим ее  $\Gamma_p$ ) могут быть заданы статические

$$\sigma_{1i}n_1 + \sigma_{2i}n_2 = p_i \quad (i=1,2), \quad n_1 = \cos\beta, \quad n_2 = \sin\beta, \quad (7)$$

а на другой части контура (обозначим ее  $\Gamma_v$ ) – кинематические

$$v_i(\Gamma_v) = v_i^0(\Gamma_v), \quad i=1,2, \quad (8)$$

граничные условия. Здесь  $p_i, v_i^0$  – заданные компоненты контурной нагрузки и скорости перемещения точек контура  $\Gamma_v$  соответственно;  $\beta$  – угол внешней нормали к контуру.

Зададим траектории армирования (то есть углы  $\psi_k$ ) таким образом, чтобы волокна "входили" в конструкцию на части контура  $\Gamma_v$ , а "выходили" на части контура  $\Gamma_p$  и в каждой точке пластины реализовалось перекрестное армирование:

$$\begin{aligned} \psi_1 \neq \psi_2, \quad \psi_1 \neq \psi_2 \pm \pi, \quad (x_1, x_2) \in G; \\ \psi_k \neq \beta \pm \pi/2, \quad k=1,2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p \cup \Gamma_v, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане.

Подставим кинематические соотношения (2) в выражения для скоростей деформаций арматуры  $k$ -го семейства  $\xi_k$  из (4), тогда с учетом условия равнонапряженности армирования получим

$$\begin{aligned} v_{1,1} \cos^2 \psi_k + v_{2,2} \sin^2 \psi_k + (v_{1,2} + v_{2,1}) \cos \psi_k \sin \psi_k = \xi_k = \text{const}, \\ \xi_k = f_k(\sigma_k) = \text{const}, \quad k=1,2, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\xi_k$  – известные константы,  $f_k$  – функции, обратные  $g_k(\xi_k)\xi_k$  (в случае степенного закона определяющих уравнений для арматуры из (6) имеем  $f_k(\sigma_k) = B_k \sigma_k^{m_k}$ ).

Так как углы армирования  $\psi_k$  заданы и выполняются неравенства (9), то система (10) является линейной системой гиперболических уравнений первого порядка, характеристики которой совпадают с траекториями армирования, а в качестве "начальных" условий для нее выступают кинематические граничные условия (8). Методы интегрирования задачи Коши (8), (10) хорошо разработаны [3, 4], поэтому не будем останавливаться на этом вопросе подробно. Далее предполагаем, что система (10) уже проинтегрирована (интегрирование при этом ведется от контура  $\Gamma_v$  к контуру  $\Gamma_p$ ) и скорости  $v_i$  известны во всей области  $G$ .

Зная  $v_p$  из соотношений (2) определим скорости деформаций ползучести  $\xi_{ij}$ , а затем из (4) – компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}^0$  в связующем. Неизвестными остаются лишь интенсивности армирования  $\omega_k$ , которые определим из уравнений равновесия и статических граничных условий. С этой целью подставим определяющие соотношения (3) в уравнения (1) и граничные условия (7), тогда после элементарных преобразований с учетом (4) получим

$$\begin{aligned} \sum_k \sigma_k \{l_{ki} \partial_{sk}(\omega_k) + \omega_k [l_{ki} \partial_{nk}(\psi_k) + (-1)^i l_{kj} \partial_{sk}(\psi_k)]\} = \\ = -X_i - a(\sigma_{1i,1}^0 + \sigma_{2i,2}^0), \quad j=3-i, \quad i=1,2, \quad (x_1, x_2) \in G; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\sum_k [\sigma_k l_{ki} (l_{k1} n_1 + l_{k2} n_2)] \omega_k = p_i - a(\sigma_{1i}^0 n_1 + \sigma_{2i}^0 n_2), \quad i=1,2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_p, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned}\partial_{sk}(\bullet) &= \cos \psi_k(\bullet)_{,1} + \sin \psi_k(\bullet)_{,2}, \\ \partial_{nk}(\bullet) &= -\sin \psi_k(\bullet)_{,1} + \cos \psi_k(\bullet)_{,2}, \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (13)$$

Правые части в (12) – известные функции, а в (11) правые части известны при  $X_i = 0$ . Система (12) является замкнутой системой линейных алгебраических уравнений относительно контурных значений  $\omega_k$ , определитель которой в силу (9) отличен от нуля, поэтому из (12) можно однозначно определить контурные значения интенсивностей армирования

$$\omega_k(\Gamma_p) = \omega_k^0(\Gamma_p), \quad k = 1, 2. \quad (14)$$

Система (11) в силу заданных углов  $\psi_k$  с учетом (9), (13) является линейной системой гиперболических уравнений первого порядка относительно функций  $\omega_k$ , характеристики которой совпадают с траекториями армирования, а в качестве "начальных" условий для нее выступают соотношения (14), где  $\omega_k^0$  известны из решения системы (12). Интегрируя задачу Коши (11), (14) ("двигаясь" при этом от контура  $\Gamma_p$  к контуру  $\Gamma_v$ ), определим плотности армирования  $\omega_k$  во всей пластине, которые должны удовлетворять физическим ограничениям (5). Если неравенства (5) нарушаются, то добиться их выполнения можно путем варьирования траекторий армирования (углов  $\psi_k(x_1, x_2)$ ,  $k = 1, 2$ ) при выполнении ограничений (9). Кроме того, варьируя углы  $\psi_k$ , получим совокупность различных проектов равнонапряженного армирования.

Так как в процессе построения решения не использовалось условие постоянства поперечных сечений арматуры, то непрерывные равнонапряженные волокна должны иметь по длине  $l_k$  переменные площади поперечных сечений  $F_k(l_k)$ . Для определения зависимостей  $F_k(l_k)$  (что важно с точки зрения технологии изготовления арматуры для рационального проекта) поступим следующим образом [5]. Условно внедрим в пластину волокна постоянного поперечного сечения с площадями  $F_k^0 = \text{const}$  по заданным траекториям с интенсивностями армирования  $\bar{\omega}_k$ , которые связаны с углами  $\psi_k$  равенствами [5]:

$$\partial_{sk}(\bar{\omega}_k) + \bar{\omega}_k \partial_{nk}(\psi_k) = 0, \quad k = 1, 2. \quad (15)$$

Проинтегрировав эти уравнения при "начальном" условии

$$\bar{\omega}_k(\Gamma_p) = \omega_k^0(\Gamma_p), \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

( $\omega_k^0$  имеет тот же смысл, что и в (14)), получим значения функций  $\bar{\omega}_k(x_1, x_2)$  во всей пластине. Тогда относительное изменение площади поперечных сечений реальных равнонапряженных волокон будет определяться равенством [5]:

$$F_k(l_k)/F_k^0 = \omega_k(x_1, x_2)/\bar{\omega}_k(x_1, x_2), \quad k = 1, 2, \quad (17)$$

где  $x_i = x_i(l_k)$  ( $i = 1, 2$ ) – координаты точек пластины вдоль выделенной траектории армирования  $k$ -го семейства с естественной координатой  $l_k$  ( $k = 1, 2$ ) вдоль нее.

В [5] показано, что если на всем контуре  $\omega_k^0(\Gamma_p) > 0$ , то и во всей пластине  $\bar{\omega}_k(x_1, x_2) > 0$  ( $k = 1, 2$ ), следовательно, отношение в (17) будет определяться однозначно. (Решение "начальной" задачи (15), (16) для каждого  $k$  по отдельности не вызывает затруднений [6], так как это задача Коши для уравнения в частных производных первого порядка с характеристиками, совпадающими с траекториями армирования.)

С технологической точки зрения наиболее удобно армирование осуществлять по прямолинейным траекториям. В этом случае имеем

$$\partial_{sk}(\Psi_k) = \Psi_{k,1} \cos \Psi_k + \Psi_{k,2} \sin \Psi_k = 0, \quad k = 1, 2. \quad (18)$$

При выполнении неравенств (9) система (18) является приводимой [3] и ее общий интеграл имеет вид

$$-x_2 \cos \Psi_k + x_1 \sin \Psi_k = -\eta_2(s) \cos \Psi_k^0(s) + \eta_1(s) \sin \Psi_k^0(s), \quad k = 1, 2, \quad (19)$$

где  $\Psi_k^0$  – значения функций  $\Psi_k$  на контуре  $\Gamma_v$ ;  $\eta_k$  – функции, задающие точки контура  $\Gamma_v$ ;  $x_k = \eta_k(s)$ ,  $k = 1, 2$ ;  $s$  – координата вдоль контура.

При прямолинейном армировании решение задачи Коши (8), (10) с учетом (9) можно построить в аналитической форме. Действительно, в силу постоянства правых частей уравнений (10) при выполнении равенств (18) систему (10) можно записать в форме инвариантов Римана [4] с нулевыми правыми частями, после чего легко построить решение задачи Коши (8), (10) в произвольной точке  $(x_1, x_2) \in G$ :

$$\begin{aligned} v_1 \cos \Psi_k + v_2 \sin \Psi_k - \xi_k(x_1 \cos \Psi_k + x_2 \sin \Psi_k) = \\ = v_1^0(s) \cos \Psi_k^0(s) + v_2^0(s) \sin \Psi_k^0(s) - \xi_k(\eta_1(s) \cos \Psi_k^0(s) + \eta_2(s) \sin \Psi_k^0(s)), \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (20)$$

где координаты  $x_1, x_2$  и  $\eta_1, \eta_2$  связаны равенствами (19). (В уравнениях (19), (20) следует учитывать, что в силу прямолинейного армирования в них  $\Psi_k \equiv \Psi_k^0$ .)

Система уравнений равновесия (11) с учетом (18) упрощается и принимает вид

$$\sum_k \sigma_k l_{ki} [\partial_{sk}(\omega_k) + \omega_k \partial_{nk}(\Psi_k)] = -X_i - a(\sigma_{1i,1}^0 + \sigma_{2i,2}^0), \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

откуда в силу выполнения неравенств (9) можно однозначно определить

$$\partial_{sk}(\omega_k) + \omega_k \partial_{nk}(\Psi_k) = \frac{\bar{X}_1 \sin \Psi_j + \bar{X}_2 \cos \Psi_j}{\sigma_k \sin(\Psi_j - \Psi_k)}, \quad (21)$$

$$j = 3 - k, \quad k = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

где

$$\bar{X}_i = -X_i - a(\sigma_{1i,1}^0 + \sigma_{2i,2}^0), \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (22)$$

Система (21) с учетом (22) записана в инвариантах Римана [4]. (Систему (11) также всегда можно записать в инвариантах Римана [4]. Не будем здесь этого делать.) Если же  $X_i = 0$ , то система (21) распадается на два независимых уравнения относительно  $\omega_k$ , которые являются уравнениями в частных производных первого порядка с характеристиками, совпадающими с траекториями армирования, и детально изучены [6]. Методы интегрирования задачи Коши (14), (21) хорошо разработаны [3, 4, 6], поэтому не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

В случае, когда правые части в уравнениях (21) тождественно равны нулю, из сравнения с (15) получаем, что в равнонапряженно-армированной пластине прямолинейные волокна имеют постоянные поперечные сечения.

Рассмотрим осесимметричную задачу о равнонапряженном армировании кольцевой пластины, ограниченной контурами радиусов  $r_0, r_1$  ( $0 < r_0 < r_1$ ), жестко закрепленную ( $v_i^0 = 0$ ) на внутреннем контуре  $\Gamma_v: r = r_0$  и статически нагруженную на внешнем контуре  $\Gamma_p: r = r_1$  нормальной нагрузкой  $p_n = \text{const}$ . Массовая  $X_\varphi$  и контурная касательная  $p_\tau$  нагрузки в окружном направлении отсутствуют, а радиальная массовая нагрузка  $X_r$ , как и в (1), линейно зависит от  $\omega_k$ :

$$X_\varphi = p_\tau = 0, \quad X_r = X_r^0(r) \rho_0 \left( 1 - \sum_k \omega_k \right) + \sum_k X_r^{(k)}(r) \rho_k \omega_k.$$

Так как нагружение в окружном направлении отсутствует, то в пластину целесообразно внедрять два семейства арматуры, выполненной из одного материала ( $\rho_1 = \rho_2, X_r^{(1)} = X_r^{(2)}, g_1(\xi) = g_2(\xi)$ , в частности,  $B_1 = B_2, m_1 = m_2$ , см. (6)) и уложенной по радиально-симметричным траекториям ( $\psi_1(r) = -\psi_2(r), \omega_1(r) = \omega_2(r)$ , где углы  $\psi_k(r)$  отсчитываются от направления полярного радиуса  $r$ ). В этом случае в полярной системе координат скорость деформации сдвига равна нулю ( $\xi_{r\varphi} = 0$ ) и одно из уравнений равновесия (а именно, в окружном направлении) выполняется тождественно.

Предположим, что пластина армирована по логарифмическим спиральям ( $\psi_1(r) = -\psi_2(r) = \text{const} \neq \pm\pi/2$ ). Используя кинематические соотношения в полярной системе координат [1]

$$\xi_{rr}(r) = \frac{dv_r(r)}{dr}, \quad \xi_{\varphi\varphi}(r) = \frac{v_r(r)}{r}, \quad (23)$$

где  $v_r$  – радиальная составляющая скорости перемещений точек пластины, вместо системы (10) из условия равнонапряженности арматуры (см. (4)) с учетом  $\xi_{r\varphi} = 0$  получим одно уравнение

$$\cos^2 \psi_1 \frac{dv_r}{dr} + \sin^2 \psi_1 \frac{v_r}{r} = \xi_1 = \text{const} \quad (\xi_2 = \xi_1 = \text{const}, \quad \psi_2 = -\psi_1 = \text{const}),$$

из которого с учетом кинематического граничного условия  $v_r(r_0) = v_r^0 = 0$  определяем

$$v_r(r) = \xi_1 r (1 - (r_0/r)^{1-\beta}), \quad \beta = -\text{tg}^2 \psi_1 = \text{const}. \quad (24)$$

Используя равенства (23), (24), вычислим скорости деформаций ползучести:

$$\xi_{rr} = \xi_1 (1 - \beta (r_0/r)^{1-\beta}), \quad \xi_{\varphi\varphi} = \xi_1 (1 - (r_0/r)^{1-\beta}). \quad (25)$$

Подставляя  $\xi_{rr}, \xi_{\varphi\varphi}$  из (25) и  $\xi_{r\varphi} = 0$  в выражения для  $H$  и  $\sigma_{rr}^0, \sigma_{\varphi\varphi}^0$ , аналогичные (4), будем иметь:

$$H(r) = 2|\xi_1| \sqrt{(1 - \beta (r_0/r)^{1-\beta})^2 + (1 - \beta (r_0/r)^{1-\beta})(1 - (r_0/r)^{1-\beta}) + (1 - (r_0/r)^{1-\beta})^2},$$

$$\sigma_{rr}^0(r) = 2\xi_1 g_0(H(r))(3 - (1 + 2\beta)(r_0/r)^{1-\beta}), \quad (26)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^0(r) = 2\xi_1 g_0(H(r))(3 - (2 + \beta)(r_0/r)^{1-\beta}), \quad r_0 \leq r \leq r_1.$$

Из определяющих соотношений, аналогичных (3), с учетом (26) и  $\psi_1 = -\psi_2$ ,

$\omega_1 = \omega_2$ , получаем осредненные напряжения

$$\sigma_{rr}(r) = a\sigma_{rr}^0(r) + 2\sigma_1\omega_1(r)\cos^2\psi_1, \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r) = a\sigma_{\varphi\varphi}^0(r) + 2\sigma_1\omega_1(r)\sin^2\psi_1, \quad (27)$$

которые подставим в оставшееся уравнение равновесия [1] (в радиальном направлении)

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = -X_r^0(r)\rho_0(1 - 2\omega_1) - 2X_r^{(1)}(r)\rho_1\omega_1,$$

и после элементарных преобразований получим

$$\frac{d\omega_1}{dr} = -b(r)\omega_1(r) - c(r), \quad (28)$$

где

$$b(r) = \frac{1 + \beta}{r} + \frac{X_r^{(1)}(r)\rho_1 - X_r^{(0)}(r)\rho_0}{\sigma_1 \cos^2\psi_1},$$

$$c(r) = \frac{1}{2\sigma_1 \cos^2\psi_1} \left[ X_r^{(0)}(r)\rho_0 + a \left( \frac{d\sigma_{rr}^0}{dr} + \frac{\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\varphi\varphi}^0}{r} \right) \right],$$

$b(r)$ ,  $c(r)$  с учетом (26) – известные функции.

Из статического граничного условия на внешнем контуре пластины ( $r = r_1$ ) с учетом первого равенства (27) имеем

$$\omega_1^0 = \omega_1(r_1) = \frac{1}{2\sigma_1 \cos^2\psi_1} (p_n - a\sigma_{rr}^0(r_1)), \quad \omega_2^0 = \omega_1^0. \quad (29)$$

Интегрируя задачу Коши (28), (29) (см. [7]), определим интенсивность армирования во всей пластине:

$$\omega_1(r) = \omega_1^0 \exp \int_r^{r_1} b(\rho) d\rho + \int_r^{r_1} c(s) \exp \left[ \int_r^s b(\rho) d\rho \right] ds. \quad (30)$$

Таким образом, в исследуемом случае равнонапряженного армирования кольцевой пластины по логарифмическим спиральям решение задачи удается получить в квадратурах.

Из всех прямолинейных и спиральных структур армирования рассматриваемой кольцевой пластины особое место занимает радиальное армирование ( $\psi_1(r) = \psi_2(r) = 0$ ), так как при этом дополнительно выполняется еще одно условие рационального проектирования – армирование по направлениям главных напряжений. В этом случае остаются справедливыми равенства (23)–(30), в которых следует принять  $\psi_1 = \beta = 0$ , причем для  $H$  и  $\omega_1$  (при  $X_r = 0$ ) получаем существенно более простые выражения

$$H(r) = 2\sqrt{3}|\xi_1| \sqrt{1 - \frac{r_0}{r} + \frac{r_0^2}{3r^2}}, \quad r_0 \leq r \leq r_1;$$

$$\omega_1(r) = \frac{\eta_1 \omega_1^0}{r} + \frac{1}{2\sigma_1 r} \left[ a(\rho \sigma_{rr}^0(\rho)) \Big|_r^{r_1} - a \int_r^{r_1} \sigma_{\varphi\varphi}^0(\rho) d\rho \right], \quad \omega_2(r) = \omega_1(r), \quad X_r = 0. \quad (31)$$

В качестве примера рассмотрим радиально армированную кольцевую пластину с характеристиками:  $r_0 = 0,2$  м,  $r_1 = 0,5$  м,  $p_n = 50$  МПа,  $a = 0,3$ ,  $\rho_0 = 8940$  кг/м<sup>3</sup>,  $\rho_1 = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $m_0 = 2,16$ ,  $B_0 = 3,19 \cdot 10^{-8}$  (МПа)<sup>- $m_0$</sup> ·ч<sup>-1</sup>,  $m_1 = 6,24$ ,  $B_1 = 6,32 \cdot 10^{-21}$  (МПа)<sup>- $m_1$</sup> ·ч<sup>-1</sup> (характеристики материалов композиции соответствуют медной пластине, армированной стальной проволокой [8, 9]).

Относительное изменение площади поперечных сечений арматуры определяется по-прежнему равенствами (15)–(17), причем решение краевой задачи (15), (16) в осесимметричном случае при радиальном армировании имеет вид [5]:

$$\bar{\omega}_1(r) = r_1 \omega_1^0 / r, \quad \bar{\omega}_2(r) = \bar{\omega}_1(r), \quad r_0 \leq r \leq r_1. \quad (32)$$

Из сравнения (31), (32) видно, что функция  $\omega_1(r)$  отличается от  $\bar{\omega}_1(r)$  лишь вторым слагаемым в правой части (31). Если это слагаемое мало по сравнению с первым (например, в силу малости отношения  $B_1/B_0$ ), то  $\omega_1(r)$  мало отличается от  $\bar{\omega}_1(r)$  и в силу (17) площадь поперечных сечений волокон изменяется незначительно. Этот вывод справедлив и для более общего случая, описываемого уравнениями (21), (22), когда правые части в (21) – малые величины (например, в случае отсутствия или малости по модулю массовой нагрузки:  $|X_i| \approx O(|\sigma_{ij}^0|)$ ,  $i, j = 1, 2$ , ср. при этом (21) с уравнениями (15)).

На рис. 1 и 2 изображены зависимости  $2\omega_1(r)$  и  $f(r) = F_1(r)/F_1^0$  соответственно. Кривые 1, 1' рассчитаны при отсутствии массовой радиальной нагрузки ( $X_r = 0$ ), а линии 2, 2' – при  $X_r^0 = X_r^{(0)} = r\omega^2$ ,  $\omega = 100$  рад/с (вращение диска с угловой скоростью  $\omega$ ). Кроме того, кривые 1, 2 получены при значении напряжения в равнонапряженной арматуре  $\sigma_1 = 200$  МПа, а линии 1', 2' – при  $\sigma_1 = 300$  МПа.

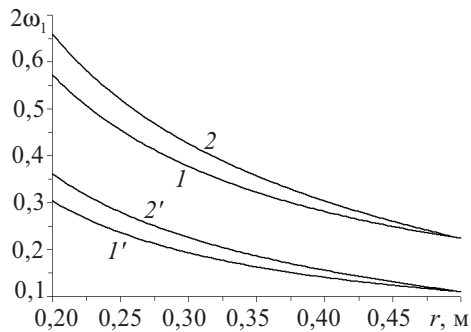


Рис. 1

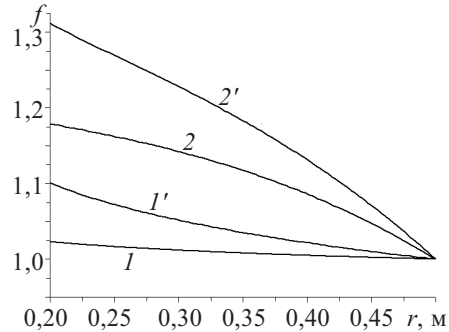


Рис. 2

Кривая 1 на рис. 2 показывает, что при отсутствии массовой нагрузки площадь поперечного сечения волокон по длине траектории армирования изменяется менее чем на 2,5% (линейный поперечный размер волокон изменяется менее чем на 1,3%). Это подтверждает сделанный выше теоретический вывод: при практической реализации такого проекта можно использовать волокна постоянного поперечного сечения. Линии же 2, 1', 2' на этом рисунке указывают на то, что при достаточно большом значении массовой нагрузки или при больших напряжениях в арматуре, вызывающих большие скорости деформаций ползучести



и напряжений в связующем, площадь поперечных сечений волокон может изменяться значительно (соответственно на 17,9, 10, 31,1% для этих кривых; линейный поперечный размер волокон в этих случаях изменяется максимально на 8,6, 4,9, 14,5%).

Сравнение кривых 1, 2 с 1', 2' на рис. 1 показывает, что увеличение значения напряжений в арматуре в 1,5 раза вызывает экономию расхода арматуры почти в 2 раза.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-08-00152-а).

#### *Литература*

1. Качанов, Л.М. Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
2. Немировский, Ю.В. Ползучесть однородных и композитных оболочек / Ю.В. Немировский // Актуальные проблемы механики оболочек: Тр. Междунар. конф., посвященной 100-летию проф. Х.М. Муштари, 90-летию проф. К.З. Галимова и 80-летию проф. М.С. Корнишина. – Казань, 26–30 июня 2000 г. – Казань: Новое знание, 2000. – С. 42–49.
3. Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
4. Рождественский, Б.Л. Системы квазилинейных уравнений / Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко. – М.: Наука, 1969. – 592 с.
5. Немировский, Ю.В. О некоторых особенностях уравнений оболочек, армированных волокнами постоянного поперечного сечения / Ю.В. Немировский, А.П. Янковский // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1997. – Т. 3, № 2. – С. 20–40.
6. Камке, Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М.: Наука, 1966. – 260 с.
7. Петровский, И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Наука, Физматгиз, 1970. – 280 с.
8. Писаренко, Г.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности: Справочное пособие / Г.С. Писаренко, Н.С. Можаровский. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
9. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.

[18.06.2007]

#### **EQUAL-STRESSED REINFORCING OF METALLIC-COMPOSITE PLATES AT THE STEADY CREEP**

**Yu. V. Nemirovskiy, A. P. Yankovskiy**

The problem of equal-stressed reinforcing of metallic-composite plates loaded in their plane and working in conditions of steady creep is formulated. The method of the decision of the problem in view is developed under the mixed boundary conditions. The case of rectilinear equal-stressed reinforcing of a flat design by fibres of variable cross-section is investigated in detail. The decision for the ring plate reinforced on radially-symmetric logarithmic spirals is received in quadratures. Results of the calculation for radially reinforced ring plate are analysed.