

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-321-329

РАВНОВЕСИЕ НОРМАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ ПОЛОГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ДИСЛОКАЦИЯМИ И ДИСКЛИНАЦИЯМИ

© 2024 г.

Пешхоев И.М.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону Российская Федерация*

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024

Исследуется задача о равновесии нормально нагруженной упругой пологой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки, которая содержит источники внутренних напряжений в виде полей непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций или другие источники, например, тепловые. На основе модифицированной системы уравнений Кармана равновесия упругой пластины с дислокациями и дисклинациями построена система нелинейных уравнений равновесия оболочки. Полученная система уравнений отличается от системы уравнений Кармана равновесия упругой пологой цилиндрической оболочки, находящейся под действием нормальной нагрузки, наличием в правой части уравнения неразрывности ненулевой функции, называемой функцией несовместности, которая выражается через плотности краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Края оболочки свободно защемлены или подвижно шарнирно оперты. В случае отсутствия внутренних источников напряжений эта система переходит в систему уравнений равновесия пологой оболочки, а при бесконечно большом радиусе кривизны (и наличии внутренних источников напряжений) – в модифицированную систему уравнений Кармана равновесия гибкой упругой пластины с дислокациями и дисклинациями. Для решения системы нелинейных уравнений равновесия оболочки предлагается метод Ньютона – Канторовича в сочетании с разностным методом. Для случая малых значений нормальной нагрузки и малых значений функции несовместности проводится линеаризация относительно прогиба и функции напряжений. В результате этого получена линейная краевая задача в виде системы дифференциальных уравнений относительно прогиба и функции напряжений, которая решается разностным методом. Решение линеаризованной системы используется в качестве начального приближения в реализации метода Ньютона – Канторовича. Приведены результаты численных расчетов прогиба и функции напряжений для заданных значений нормальной нагрузки и функции несовместности.

Ключевые слова: упругая полая круговая цилиндрическая оболочка, равновесие, внутренние напряжения, дислокации и дисклинации, метод Ньютона – Канторовича.

Введение

В статье Л.М. Зубова [1] построена модификация системы нелинейных уравнений Кармана для упругих пластин с дислокациями и дисклинациями и исследована задача об изгибе тонкой пластины (мембраны), свободной от внешних нагрузок, с учетом релаксации внутренних напряжений, обусловленных дефектами. В [2] рассматриваются бесконечно малые деформации пластины из гиперупругих материалов с учетом неоднородно распределенных начальных напряжений. В исследовании [3] представлено движение дислокаций, их скольжение и подъем, приводящие к миграции границ зерен в монослое дисульфида вольфрама. В статье [4] сообщается о непосредственном наблюдении дислокаций в базальной плоскости в отдельно стоящем двухслойном графене с помощью просвечивающей электронной микроскопии и их детальном исследовании с помощью дифракционно-контрастного анализа и атомистического моделирования. Выявлена выраженная деформация двухслойной графеновой мембраны, которая является прямым результатом аккомодации напряжения. В рамках классической модели Кирхгофа – Лява в [5] рассмотрено напряженное состояние тонкой линейно-упругой оболочки, содержащей как изолированные, так и непрерывно распределенные дислокации и дисклинации, решен ряд задач о дислокациях и дисклинациях в замкнутой сферической оболочке. В статье [6] обсуждаются изгибные деформации трехслойной пластины с учетом поверхностных и межфазных напряжений. Рассмотрены теория сдвиговой деформации пластины первого порядка, модель поверхностных напряжений Гуртина – Мердока и выведены формулы для параметров жесткости пластины. В [7] обсуждается проблема собственных напряжений, вызванных распределенными дислокациями и дисклинациями в полый твердой сфере из линейно-упругого изотропного микрополярного материала. В [8] рассмотрена задача о собственных напряжениях, обусловленных распределенными краевыми и винтовыми дислокациями в полый нелинейно-упругой сфере. В [9] для нелинейных оболочек Кирхгофа – Лява с источниками неоднородности, возникающими из-за распределения топологических дефектов, таких, как дислокации и дисклинации, и метрических аномалий, таких, как точечные дефекты, термические деформации и биологический рост, обсуждаются уравнения несовместности деформаций. В [10] сформулирована теория нелинейного деформирования упругих оболочек Коссера с непрерывно распределенными дислокациями и дисклинациями. В статье [11] исследуется выпучивание и послекритическое поведение неравномерно сжатой пластины с дислокациями и дисклинациями. В [12] рассматривается задача об асимптотическом интегрировании модифицированной системы нелинейных уравнений Кармана равновесия продольно сжатой удлиненной упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями, лежащей на упругом основании. В статье [13] рассматривается задача о влиянии начальных несовершенств в виде малых поперечных нагрузок на потерю устойчивости и послекритическое поведение сжатой упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями, лежащей на нелинейно-упругом основании. В настоящей статье выводятся уравнения равновесия поперечно нагруженной упругой пологой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки, содержащей источники внутренних напряжений в виде полей непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Для решения системы нелинейных уравнений равновесия оболочки предлагается метод Ньютона – Канторовича в сочетании с разностным методом. Для случая малых значе-

ний нормальной нагрузки и малых значений функции несовместности проводится линеаризация относительно прогиба и функции напряжений.

1. Вывод уравнений равновесия пологой оболочки

Построим уравнения равновесия упругой пологой круговой цилиндрической прямоугольной в плане оболочки, содержащей поля непрерывно распределенных краевых дислокаций и клиновых дисклинаций, находящейся под действием поперечного давления p . Для вывода уравнений равновесия цилиндрической оболочки используем результаты статьи Л.М. Зубова [1]. Рассмотрим соотношения теории Кармана гибких упругих пластин из [1, 14–16]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T} \cdot \nabla w) + p = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{T} = \frac{Eh}{1-\nu^2} [(1-\nu)\mathbf{H} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{H}], \quad \mathbf{M} = -D[(1-\nu)\mathbf{L} + \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{L}], \quad (2)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad \mathbf{L} = \nabla \nabla w,$$

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \nabla w \otimes \nabla w, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3)$$

Здесь ∇ – двумерный набла-оператор, \mathbf{T} – тензор мембранных усилий, \mathbf{M} – тензор изгибающих моментов, w – прогиб пластины, \mathbf{u} – вектор перемещений в плоскости пластины, p – поперечная нагрузка, \mathbf{H} – тензор деформаций, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – линейный двумерный тензор деформации, \mathbf{L} – тензор изгиба-кручения, E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, h – толщина пластины, D – цилиндрическая жесткость, \mathbf{g} – двумерный единичный тензор. Все тензоры в (1)–(3) являются плоскими. Значения сил и моментов сил в уравнениях являются удельными на единицу длины.

Введем обозначения для компонентов тензора деформации срединного слоя $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \omega \\ \omega & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$ и для компонентов тензора мембранных усилий оболочки $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1 & S \\ S & T_2 \end{pmatrix}$.

Пусть цилиндрическая оболочка в плане занимает область $0 < x < a$, $0 < y < b$ и имеет радиус кривизны R по оси y . Вектор перемещений имеет вид (u, v, w) , где v – обозначает тангенциальное перемещение (по оси y) точки срединного слоя оболочки при изгибе, w – прогиб оболочки, тогда деформация по оси y имеет поправку $-w/R$ и выражается формулой [14]:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

поэтому тензор деформации срединного слоя (3) для оболочки запишется в виде

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w/R \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \nabla w \otimes \nabla w. \quad (4)$$

Связь (2) тензора мембранных усилий оболочки \mathbf{T} с тензором деформации срединного слоя оболочки \mathbf{H} остается той же самой. Кроме этого, во втором уравнении (1) учтем проекцию мембранного усилия T_2 на ось z , которая равна T_2/R :

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T} \cdot \nabla w) + \frac{T_2}{R} + p = 0. \quad (5)$$

Приведем полученное в [1] уравнение несовместности деформаций для пластины с дислокациями и дисклинациями:

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \mu, \quad (6)$$

где $\mu = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta$ называется мерой несовместности, а $\boldsymbol{\alpha}$ и β – соответственно заданные плотность краевых дислокаций и плотность клиновых дисклинаций, \mathbf{e} – дискриминантный тензор на плоскости [1]. Следуя [1], выпишем выражение тензора усилий \mathbf{T} через функцию напряжений Эри F :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{xy} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Это выражение тождественно удовлетворяет первому уравнению из (1). Здесь и далее нижний индекс обозначает частную производную по соответствующей переменной. Из первого уравнения в (2) находим выражение тензора деформаций срединной поверхности оболочки через мембранные усилия оболочки [1]:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Eh} [(1 + \nu)\mathbf{T} - \nu \mathbf{g} \operatorname{tr} \mathbf{T}]. \quad (8)$$

Подставим в уравнение (6) вместо $\boldsymbol{\varepsilon}$ выражение $\mathbf{H} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w/R \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \nabla w \otimes \nabla w$, и, учитывая (7), (8), получим уравнение несовместности деформаций в виде

$$\Delta^2 F + \frac{Ehw_{xx}}{R} + \frac{Eh}{2} [w, w] = Eh\mu. \quad (9)$$

Из уравнения (5) с учетом (2) и (8) получим

$$D\Delta^2 w - \frac{F_{xx}}{R} - [F, w] = p. \quad (10)$$

В уравнениях (9), (10) Δ – оператор Лапласа, $[F, w] = F_{xx}w_{yy} + F_{yy}w_{xx} - 2F_{xy}w_{xy}$. Система уравнений (9), (10) при $\mu = 0$ и $R = \infty$ переходит в систему уравнений Кармана для упругой пластины. При $\mu \neq 0$ и $R = \infty$ система переходит в модифицированную систему уравнений Кармана для пластины с дислокациями и дисклинациями, полученную в статье [1].

Систему нелинейных уравнений (9), (10) рассмотрим с краевыми условиями

$$1) w = w_n = 0; \quad 2) w = w_{nn} = 0, \quad F = F_n = 0. \quad (11)$$

Здесь условия 1) для прогиба w соответствуют случаю свободного защемления краев оболочки, а условия 2) отвечают условиям подвижного шарнирного опирания краев. Индекс n в (11) обозначает производную по нормали. Переходя к безразмерным переменным по формулам $x = ax_1$, $y = by_1$, $\gamma^2 = 12(1 - \nu^2)$, $w(x, y) = \omega(x_1, y_1)h/\gamma$, $F(x, y) = Df(x_1, y_1)$, $p = DPh/(b^4\gamma)$, $R = ra^2\gamma/h$, $\alpha = b^2/a^2$, $\mu = \bar{\mu}h^2/(\gamma^2b^4)$, получим систему уравнений в области $\Omega = \{(x_1, y_1) : 0 < x_1 < 1, 0 < y_1 < 1\}$ и краевые условия

$$\Delta_\alpha^2 \omega - \frac{\alpha^2 f_{x_1 x_1}}{r} - \alpha [f, \omega] = P, \quad \Delta_\alpha^2 f + \frac{\alpha^2 \omega_{x_1 x_1}}{r} + \frac{\alpha [\omega, \omega]}{2} = \bar{\mu}, \quad (12)$$

$$\Delta_\alpha () = ()_{y_1 y_1} + \alpha ()_{x_1 x_1}, \quad \Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha \Delta_\alpha, \quad [f, \omega] = f_{x_1 x_1} \omega_{y_1 y_1} + f_{y_1 y_1} \omega_{x_1 x_1} - 2f_{x_1 y_1} \omega_{x_1 y_1},$$

$$1) \omega = \omega_n = 0; \quad 2) \omega = \omega_{nn} = 0, \quad f = f_n = 0. \quad (13)$$

Предположим, что поперечная нагрузка P и функция несовместности $\bar{\mu}$ малы, то есть обусловленные ими прогиб и напряжения малы. Тогда в результате линеаризации системы (12) получим систему линейных дифференциальных уравнений равновесия

$$\Delta_{\alpha}^2 f + \frac{\alpha^2 \omega_{x_1 x_1}}{r} = \bar{\mu}, \quad \Delta_{\alpha}^2 \omega - \frac{\alpha^2 f_{x_1 x_1}}{r} = P. \quad (14)$$

Из анализа систем (12) и (14) следует, что при отсутствии нормальной нагрузки и внутренних источников напряжений системы (12), (14) с краевыми условиями (13) имеют тривиальное решение $\omega = 0, f = 0$. Линейную краевую задачу (12) с условиями (13) можно решить разностным методом [17].

Пусть E^2 – гильбертово пространство – замыкание множества вектор-функций $f = (f_1, f_2)$ с нормой, определяемой скалярным произведением

$$\langle f, g \rangle_{E^2} = \iint_{\Omega} (f_1 g_1 + f_2 g_2) dx dy, \quad f = (f_1, f_2), \quad g = (g_1, g_2);$$

E^1 – замыкание линейного множества бесконечно дифференцируемых в прямоугольной области Ω вектор-функций $u = (w, F), v = (w_1, F_1), \dots$, удовлетворяющих краевым условиям $w = w_n = F = F_n = 0$ или $w = w_{nn} = F = F_n = 0$ на границе прямоугольника Ω , с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle_{E^1} = \sum_{i+j \leq 4} \langle \partial^{i+j} u / \partial x^i \partial x^j, \partial^{i+j} v / \partial x^i \partial x^j \rangle_{E^2}.$$

Считая функции $P, \bar{\mu}$ достаточно гладкими в области Ω , запишем краевую задачу (12), (13) как нелинейное операторное уравнение

$$\mathbf{F}(u) = \begin{pmatrix} \Delta_{\alpha}^2 \omega - \frac{\alpha^2 f_{x_1 x_1}}{r} - \alpha[f, \omega] - P \\ \Delta_{\alpha}^2 f + \frac{\alpha^2 \omega_{x_1 x_1}}{r} + \frac{\alpha[\omega, \omega]}{2} - \bar{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} \omega \\ f \end{pmatrix} \in E^1, \quad \mathbf{F}(u) \in E^2. \quad (15)$$

Из публикаций И.И. Воровича [18], Н.Ф. Морозова [19] следует, что оператор \mathbf{F} действует из пространства E^1 в E^2 . Пусть $u_n = \begin{pmatrix} \omega_n \\ f_n \end{pmatrix}$ – очередное приближение к решению уравнения (15), тогда следующее приближение $u_{n+1} = \begin{pmatrix} \omega_{n+1} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$ вычислим методом Ньютона – Канторовича [20] в сочетании с разностным методом [17]:

$$u_{n+1} = u_n - (\mathbf{F}'(u_n))^{-1} \mathbf{F}(u_n), \quad (16)$$

где

$$\mathbf{F}'(u_n) = \begin{pmatrix} \Delta^2 \varphi - [f_n, \varphi] - [\psi, \omega_n] - \frac{\psi_{xx}}{r} \\ \Delta^2 \psi - [\varphi, \omega_n] - \frac{\varphi_{xx}}{r} \end{pmatrix}$$

– производная Фреше оператора \mathbf{F} в точке u_n . В качестве начального приближения при решении задачи (12), (13) методом Ньютона – Канторовича предлагается решение линейной задачи (14) с краевыми условиями (13). Отметим, что применение метода

Ньютона – Канторовича для решения краевых задач для пологих оболочек и пластин обсуждались в монографии И.И. Воровича [18], в которой приведено доказательство теоремы о сходимости для краевой задачи о равновесии поперечно нагруженной изотропной однородной пластины с однородными краевыми условиями. В настоящей статье не проводится исследование условий сходимости метода Ньютона – Канторовича (16) при заданных функциях P , $\bar{\mu}$.

2. Результаты численных расчетов

Приведем пример решения линейной краевой задачи (13), (14) разностным методом и сходимости метода Ньютона – Канторовича (16) в сочетании с разностным методом для задачи (12) с краевыми условиями (13).

Пример 1. Рассмотрим задачи (12) и (14) в области $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ с краевыми условиями $\omega = \omega_n = 0$, $f = f_n = 0$ при заданных условиях: $\alpha = 1$ (квадратная в плане оболочка), $P = 500$, $\bar{\mu} = 300$, $r = 10$. В результате применения разностного метода к уравнениям (14) получены функция прогиба ω и функция напряжений f , графики которых представлены на рис. 1. Для нелинейных уравнений (12) при тех же краевых условиях и исходных данных методом Ньютона – Канторовича получено решение (ω_1, f_1) , для которого в качестве начальных значений были приняты функции ω и f . Решение (ω_1, f_1) нелинейной задачи (12) отличается от решения (ω, f) линейной задачи незначительно: при $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ $\max |\omega_1(x, y) - \omega_2(x, y)| = 0,014$, $\max |f_1(x, y) - f_2(x, y)| = 0,035$.

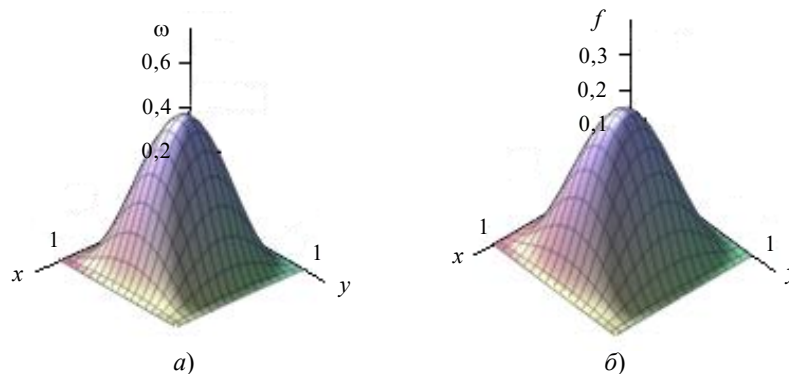


Рис. 1. Функция прогиба ω (а), функция напряжений f (б)

Заключение

Выведены уравнения равновесия поперечно нагруженной упругой полой прямоугольной в плане круговой цилиндрической оболочки с дислокациями и дисклинациями. Для случая малых значений нормальной нагрузки и малых значений функции несовместности с помощью линеаризации получена система линейных уравнений относительно прогиба и функции напряжений, которая решается разностным методом. Для решения системы нелинейных уравнений предложен метод Ньютона – Канторовича в сочетании с разностным методом, при этом за начальное приближение принято решение линеаризованной задачи.

Список литературы

1. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Доклады РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.
2. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.
3. Azizi A., Zou X., Ercius P. et al. Dislocation motion and grain boundary migration in two-dimensional tungsten disulphide. *Nature Communications*. 2014. Vol. 5(1). P. 4867-1 – 4867-7. <https://doi.org/10.1038/ncomms5867>.
4. Butz B., Dolle C., Niekief F. et al. Dislocations in bilayer grapheme. *Nature*. 2014. Vol. 505. Iss. 7484. P. 533–537. <https://doi.org/10.1038/nature12780>.
5. Zubov L., Derezin S. Elastic shells, dislocations and disclinations. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Eds. H. Altenbach, A. Öchsner. Berlin–Heidelberg: Springer, 2018. P. 1–7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_198-1.
6. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore: Springer, 2018. P. 1–10. https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_1.
7. Zelenina A.A., Zubov L.M. Spherically symmetric deformations of micropolar elastic medium with distributed dislocations and disclinations. In: *Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures*. Eds. F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A.V. Porubov. Series: Advanced Structured Materials. Vol. 87. Cham: Springer, 2018. P. 357–369.
8. Goloveshkina E.V., Zubov L.M. Eigenstresses in a nonlinearly elastic sphere with distributed dislocations. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Eds. B. Abali, H. Altenbach, F. dell'Isola et al. Series: Advanced Structured Materials. Vol. 108. Cham: Springer International Publishing, 2019. P. 137–155. DOI:10.1007/978-3-030-13307-8_11.
9. Roychowdhury Ayan, Gupta Anurag. Dislocations, disclinations and metric anomalies as sources of global strain incompatibility in thin shells. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Eds. W. Pietraszkiewicz, W. Witkowski. Vol. 4. CRC Press, 2018. P. 153–156. DOI: 10.1201/9781315166605-31.
10. Zubov L.M., Karyakin M.I. Large strains of a spherical shell with distributed dislocations and disclinations. In: *Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol 170. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov. Cham: Springer, 2023. P. 727–745. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_45.
11. Peshkoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Vol 134. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Cham: Springer, 2020. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.
12. Пешкоев И.М. Асимптотика критических нагрузок сжатой узкой пластины с внутренними напряжениями. *Проблемы прочности и пластичности*. 2021. Т. 83. №2. С. 227–234. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2021-83-2-227-234>.
13. Пешкоев И.М., Соболев Б.В. Выпучивание и послекритическое поведение сжатой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №2. С. 137–145. DOI: <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-2-137-145>.
14. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York–Toronto–London: McGraw-Hill Book Company, Inc. 1959. 595 p.
15. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford–New York–Toronto–Sydney–Frankfurt: Elsevier and Technology, 1982. 630 p.
16. Ciarlet P.G., Rabier P. *Les Equations de von Karman*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1980. 202 p.
17. Самарский А.А., Андреев В.Б. *Разностные методы для эллиптических уравнений*. М.: Наука, 1976. 352 с.
18. Vorovich I.I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. New York: Springer, 1999. 390 p.

19. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. *Докл. АН СССР*. 1957. Т. 114. №5. С. 968–671.

20. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 752 с.

References

1. Zubov L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklinatsiyami [Karman equations for an elastic plate with dislocations and disclinations]. *Doklady Rossiyskoy Akademii nauk [Doklady Physics]*. 2007. Vol. 412. No 3. P. 343–346 (In Russian).

2. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *Int. J. Non Linear Mech.* 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.

3. Azizi A., Zou X., Ercius P., Zhang Z. et al. Dislocation motion and grain boundary migration in two-dimensional tungsten disulphide. *Nat. Comm.* 2014. Vol. 5(1). P. 4867-1–4867-7. <https://doi.org/10.1038/ncomms5867>.

4. Butz B., Dolle C., Niekief F. et al. Dislocations in bilayer grapheme. *Nature*. 2014. Vol. 505. Iss. 7484. P. 533–537. <https://doi.org/10.1038/nature12780>.

5. Zubov L., Derezin S. Elastic shells, dislocations, and disclinations. In: *Encyclopedia of Continuum Mechanics*. Eds. H. Altenbach, A. Öchsner. Berlin. Heidelberg. Springer. 2018. P. 1–7. https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_198-1.

6. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. Eds. H. Altenbach, E. Carrera, G. Kulikov. Singapore. Springer. 2018. P. 1–10. https://doi.org/10.1007/978-981-10-6895-9_1.

7. Zelenina A.A., Zubov L.M. Spherically symmetric deformations of micropolar elastic medium with distributed dislocations and disclinations. In: *Advanced in Mechanics of Microstructured Media and Structures*. Eds. F. dell'Isola, V.A. Eremeyev, A.V. Porubov. Series: Advanced Structured Materials. Vol. 87. Cham. Springer. 2018. P. 357–369.

8. Goloveshkina E.V., Zubov L.M. Eigenstresses in a nonlinearly elastic sphere with distributed dislocations. In: *New Achievements in Continuum Mechanics and Thermodynamics*. Eds. B. Abali, H. Altenbach, F. dell'Isola et al. Series: Advanced Structured Materials. Vol. 108. Cham. Springer International Publishing. 2019. P. 137–155. DOI:10.1007/978-3-030-13307-8_11.

9. Roychowdhury Ayan, Gupta Anurag. Dislocations, disclinations and metric anomalies as sources of global strain incompatibility in thin shells. In: *Shell Structures: Theory and Applications*. Eds. W. Pietraszkiewicz, W. Witkowski. Vol. 4. CRC Press. 2018. P. 153–156. DOI: 10.1201/9781315166605-31.

10. Zubov L.M., Karyakin M.I. Large strains of a spherical shell with distributed dislocations and disclinations. In: *Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials*. Vol. 170. Eds. H. Altenbach, A. Berezovski, F. dell'Isola, A. Porubov. Cham. Springer. 2023. P. 727–745. https://doi.org/10.1007/978-3-031-26186-2_45.

11. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams. Advanced Structured Materials*. Vol 134. Eds. H. Altenbach, N. Chinchaladze, R. Kienzler, W. Müller. Cham. Springer. 2020. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.

12. Peshkhoev I.M. Asimptotika kriticheskikh nagruzok szhatoy uzkoj plastiny s vnutrennimi napryazheniyami [Asymptotics of critical loads of a compressed narrow elastic plate with internal stresses]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2021. Vol. 83. No 2. P. 227–234 (In Russian).

13. Peshkhoev I.M., Sobol B.V. Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie szhatoy pryamougolnoy plastiny s vnutrennimi napryazheniyami, lezhashchey na nelineyno-uprugom osnovanii [Buckling and post-critical behavior of a compressed of the rectangular plate with internal stresses lying on a non-linear elastic foundation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 2. P. 137–145 (In Russian).

14. Timoshenko S.P., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York. Toronto. London. McGraw-Hill Book Company Inc. 1959. 595 p.

15. Washizu K. *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Oxford. New York. Toronto. Sydney. Frankfurt. Elsevier and Technology. 1982. 630 p.
16. Ciarlet P.G., Rabier P. *Les Equations de von Karman*. Berlin. Heidelberg. New York. Springer-Verlag. 1980. 202 p.
17. Samarskiy A.A., Andreev V.B. Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravneniy [*Difference Methods for Elliptic Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 352 p. (In Russian).
18. Vorovich I.I. *Nonlinear Theory of Shallow Shells*. New York. Springer. 1999. 390 p.
19. Morozov N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin [On the nonlinear theory of thin plates]. *Doklady AN SSSR [Soviet Physics. Doklady]*. 1957. Vol. 114. No 5. P. 968–671 (In Russian).
20. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz [Functional Analysis]*. Moscow. Nauka Publ. 1984. 752 p. (In Russian).

EQUILIBRIUM OF A NORMALLY LOADED ELASTIC SHALLOW CYLINDRICAL SHELL WITH DISLOCATIONS AND DISCLINATIONS

Peshkhoev I.M.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

peshkhoev@rambler.ru

Received by the Editor 2024/06/03

We consider the problem of the equilibrium of a normally loaded elastic shallow rectangular circular cylindrical shell, which contains sources of internal stress in the form of fields of continuously distributed edge dislocations and wedge disclinations or other sources, for example, thermal ones. Based on the modified system of Karman equations for the equilibrium of an elastic plate with dislocations and disclinations, a system of nonlinear equilibrium equations for the shell was constructed. The resulting system of equations differs from the Karman system of equilibrium equations for an elastic shallow cylindrical shell under the action of a normal load by the presence on the right side of the continuity equation of a nonzero function, called the incompatibility function, which is expressed through the densities of edge dislocations and wedge disclinations. The edges of the shell are freely clamped or hinged. In the absence of internal stress sources, this system transforms into a system of equilibrium equations for a shallow shell, and in the case of an infinitely large radius of curvature (and the presence of internal stress sources) into a modified system of Karman equilibrium equations for a flexible elastic plate with dislocations and disclinations. To solve the system of nonlinear shell equilibrium equations, the Newton – Kantorovich method in combination with the difference method is proposed. For the case of small values of the normal load and small values of the incompatibility function, linearization is carried out with respect to the deflection and stress function. As a result, a linear boundary value problem was obtained in the form of a system of differential equations for the deflection and the stress function, which is solved by the difference method. The solution of the linearized system is used as an initial approximation in the implementation of the Newton – Kantorovich method. Examples of numerical calculations of deflection and stress function for given values of normal load and incompatibility function are given, and corresponding graphs are constructed.

Keywords: shallow circular cylindrical shell, equilibrium, internal stresses, dislocations and disclinations, Newton – Kantorovich method.