

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-299-308

КОНТАКТ АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ С ЖЕСТКОЙ ПЕРИОДИЧЕСКИ ВЫПУКЛОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ*

© 2024 г.

Пожарский Д.А., Золотов Н.Б.

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

pozharda@rambler.ru, zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Поступила в редакцию 01.04.2024

При помощи интегральных преобразований Фурье, примененных к интегральным уравнениям, получены точные решения пространственных задач о полном контакте трансверсально изотропного слоя с жесткой двоякопериодической синусоидальной поверхностью. Одна грань слоя подчинена условиям скользящей или жесткой заделки, а плоскости изотропии параллельны граням слоя. Доказано, что полный контакт по всей грани слоя осуществим всегда, кроме вырожденного случая изотропного несжимаемого слоя, одна грань которого жестко заделана. Показано, что полный контакт реализуем и для случая перпендикулярных граням слоя плоскостей изотропии при скользящей заделке одной грани. Рассмотрены задачи частичного контакта трансверсально изотропного слоя с жесткой поверхностью, рельеф которой описывается двоякопериодической функцией в форме системы параболоидов вращения. На основе теории обобщенных функций задачи сведены к интегральным уравнениям, ядра которых не содержат квадратур. Сложность задач частичного контакта связана с тем, что область контакта заранее неизвестна, что приводит к дополнительным неравенствам и нелинейностям. На основе метода Б.А. Галанова система интегрального уравнения и неравенства сводится к одному нелинейному интегральному уравнению, для численного решения которого применяется модифицированный метод Ньютона. Для отладки расчетов использованы полученные точные решения для полного контакта. Определены области контакта и контактные давления. Рассчитаны механические характеристики, связанные с процессом перколяции, то есть слиянием дискретных контактных пятен при усилении контакта. Для анизотропного материала вычислены минимальные осадки параболоидов вращения, требуемые для начала и завершения перколяции.

Ключевые слова: двоякопериодический контакт, трансверсальная изотропия, слой.

Введение

Периодически выпуклые рельефы встречаются после искусственной обработки поверхностей. Изучение возможности полного (частичного) контакта таких поверх-

* Выполнено за счет гранта РНФ № 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>.

ностей с анизотропным слоем важно для анализа контактной прочности слоистых конструкций. Контактные задачи и функции Грина для анизотропных материалов рассматривались в монографиях [1–3]. Обобщенный метод отражений и метод интегральных преобразований применялись для решения контактных задач о действии единичного штампа на трансверсально изотропный слой [3, 4]. Среди контактных задач выделяются задачи множественного и периодического контакта [5–18]. Исследовались периодические контактные задачи о действии прямолинейной цепочки штампов, имеющей один период, на трансверсально изотропный слой при скользящей заделке одной грани и разных ориентациях плоскостей изотропии [5]. Рассматривались двоякопериодические контактные задачи для изотропного слоя при заданной [7] или неизвестной области контакта [8]. Для решения задач периодического контакта были развиты асимптотические методы [6, 7, 14]. Проводился учет влияния трения и износа в области множественного контакта [8]. Отмечалось, что метод локализации, разработанный И.Г. Горячевой для систем круговых инденторов [15], не работает в зоне перколяции (слияния соседних областей контакта) при $a/L > 0,7$, где a – характерный размер единичной области контакта, L – период системы. Для расчета эффектов перколяции применялся метод быстрого преобразования Фурье [9]. В настоящей статье при неполном контакте для расчетов контактных давлений и определения области контакта используется метод нелинейных граничных интегральных уравнений Б.А. Галанова [19, 20]. Используя теорию обобщенных функций, удастся свести двоякопериодические задачи к интегральным уравнениям, ядра которых не содержат квадратур. Доказана возможность полного контакта по всей грани трансверсально изотропного слоя с двоякопериодической синусоидальной поверхностью. Ранее было показано, что такой контакт невозможен для изотропного несжимаемого слоя с одной жестко заделанной гранью [18]. Отмечался рост приложенной номинальной нагрузки для полного контакта волнистой поверхности с полупространством с увеличением коэффициента Пуассона [11]. Указывалось на невозможность полного контакта пилообразного рельефа и упругой полуплоскости [10].

1. Постановка и интегральные уравнения задач

Рассмотрим трансверсально изотропный слой $\{|x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h\}$, плоскости изотропии параллельны его граням, а материал подчиняется закону Гука [1, 4]:

$$\sigma_x = A_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\sigma_y = (A_{11} - 2A_{66}) \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{13} \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\sigma_z = A_{13} \frac{\partial u_x}{\partial x} + A_{13} \frac{\partial u_y}{\partial y} + A_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = A_{66} \frac{\partial u_x}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\tau_{yz} = A_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = A_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + A_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (3)$$

Подставляя соотношения (1)–(3) в дифференциальные уравнения равновесия в напряжениях, получим уравнения равновесия в перемещениях [4]:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = 0, \quad (4)$$

$$A_{66} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + A_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + A_{44} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} + (A_{11} - A_{66}) \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + (A_{13} + A_{44}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} = 0, \quad (5)$$

$$A_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + A_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + (A_{13} + A_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right) = 0. \quad (6)$$

Пусть грань $z = h$ слоя взаимодействует с выпуклой двоякопериодической жесткой поверхностью или системой инденторов, форма оснований которых описывается функцией $f(x, y) = f(x - 2nl_1, y - 2ml_2)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где l_1 и l_2 – полупериоды. Обозначим контактное давление как $q(x, y) = q(x - 2nl_1, y - 2ml_2)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а неизвестную область контакта как Ω^* . Грань $z = 0$ находится в условиях скользящей или жесткой заделки (задачи А и Б соответственно). Под действием одинаковых сил P каждый индентор внедряется на величину δ без перекося, обеспечивая равенство давлений во всех периодически образованных областях контакта. Смешанные граничные условия задач А и Б имеют вид

$$\text{при } z = h: u_z = \delta - f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega^*; \quad \sigma_z = 0, \quad (x, y) \notin \Omega^*; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad (7)$$

$$\text{при } z = 0: \text{ А) } u_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \text{ Б) } u_x = u_y = u_z = 0. \quad (8)$$

При заданных параметрах упругости A_{mn} , известных величинах h, l_1, l_2, δ и функции $f(x, y)$ требуется определить область контакта Ω^* и контактное давление $\sigma_z(x, y, h) = -q(x, y)$ ($(x, y) \in \Omega^*$). Затем при использовании интегрального условия равновесия штампов может быть найдена сила P .

Для сведения задач А и Б к интегральным уравнениям (ИУ) относительно $q(x, y)$ к уравнениям и условиям (4)–(8) применим интегральные преобразования Фурье по переменным x, y . В результате получим

$$\iint_{\Omega^*} q(x_0, y_0) K_0(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = 2\pi\theta h [\delta - f(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega^*, \quad (9)$$

$$K_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos\left(\xi \frac{x}{h}\right) \cos\left(\eta \frac{y}{h}\right) d\xi d\eta, \quad (10)$$

$$\text{А) } L(u) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 \text{cth}(u/\gamma_1) - \gamma_2 \text{cth}(u/\gamma_2)}, \quad (11)$$

$$\text{Б) } L(u) = \frac{m_- \text{sh}(u\gamma_+) + m_+ \text{sh}(u\gamma_-)}{m_- \text{ch}(u\gamma_+) - m_+ \gamma_+ \gamma_-^{-1} \text{ch}(u\gamma_-) + 4\gamma_-^{-1}},$$

$$\theta = \frac{A_{11}A_{33} - A_{13}^2}{A_{11}(\gamma_1 + \gamma_2)}, \quad \gamma_{\pm} = \frac{1}{\gamma_2} \pm \frac{1}{\gamma_1}, \quad m_{\pm} = m_2\gamma_1 \pm m_1\gamma_2, \quad m_k = \frac{A_{11}\gamma_k^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}} \quad (k = 1, 2).$$

Здесь γ_k ($k = 1, 2; \text{Re } \gamma_1 > \text{Re } \gamma_2 > 0$) – корни характеристического уравнения

$$\gamma^4 A_{11}A_{44} - \gamma^2 [A_{11}A_{33} - A_{13}(A_{13} + 2A_{44})] + A_{33}A_{44} = 0. \quad (12)$$

Для большинства трансверсально изотропных материалов $\gamma_1 > 1 > \gamma_2 > 0$ ([1], табл. 1.4) и отношение корней может характеризовать степень анизотропии. В предельном случае $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \rightarrow 1$ символы ядер (11) совпадают с известными символами для изотропного слоя [3, 20] (неопределенность раскрывается по правилу Лопиталя).

2. Решение для полного контакта

В случае совпадения единичной области контакта Ω с ячейкой S (полный контакт) можно найти точное решение ИУ (9). Рассмотрим полный контакт трансверсально изотропного слоя с двоякопериодической синусоидальной поверхностью с амплитудой A и длинами волн (периодами) $2l_1$ и $2l_2$. В рамках линейной теории упругости будем предполагать малость амплитуды по сравнению с длинами волн [6]. Перепишем ИУ (9) в виде

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} q(x_0, y_0) dx_0 dy_0 \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos\left(\xi \frac{x_0 - x}{h}\right) \cos\left(\eta \frac{y_0 - y}{h}\right) d\xi d\eta =$$

$$= 4\pi^2 \theta h \left[\delta - A \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l_1} \cos \frac{\pi y}{l_2} \right) \right], \quad -\infty < x, y < \infty \quad (\delta \geq 2A). \quad (13)$$

Предположим, что $l_1 \geq l_2$, и введем безразмерные обозначения

$$x' = \frac{x}{l_1}, \quad y' = \frac{y}{l_1}, \quad A' = \frac{A}{l_1}, \quad \lambda = \frac{h}{l_1}, \quad \delta' = \frac{\delta - A}{l_1},$$

$$q'(x', y') = \frac{q(x, y)}{2\pi\theta}, \quad \varepsilon = \frac{l_2}{l_1}, \quad P' = \frac{P}{2\pi\theta l_1^2}. \quad (14)$$

Штрихи далее опускаем. Параметр λ характеризует относительную толщину слоя.

При помощи двойного преобразования Фурье получим точное решение ИУ (13):

$$q(x, y) = \frac{\delta L_0}{2\pi\lambda} + \frac{A\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}}}{2L(\pi\lambda\sqrt{1 + \varepsilon^{-2}})} \cos \pi x \cos \frac{\pi y}{\varepsilon}, \quad (15)$$

$$L_0 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{L(u)}; \quad \text{А) } L_0 = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \text{Б) } L_0 = \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 (m_1 + m_2 - 2)}{(\gamma_1 - \gamma_2)(m_1 \gamma_2^2 - m_2 \gamma_1^2)}. \quad (16)$$

Известен пример для анизотропного материала, когда дискриминант уравнения (12) равен нулю и корни совпадают ([1], табл. 4.1). Для раскрытия неопределенности типа 0/0 в выражении (11) для L_0 в задаче Б преобразуем его, используя соотношения для параметров Элиота [3], к виду $L_0 = \gamma_1^2 \gamma_2^2 A_{11} \theta^{-1}$. В силу положительной определенности матрицы упругих постоянных $\theta > 0$ [1]. В изотропном случае формулы (16) дают: А) $L_0 = 2$, Б) $L_0 = 2(1 - \nu)^2 / (1 - 2\nu)$, где ν – коэффициент Пуассона. Таким образом, полный контакт невозможен только в случае задачи Б для изотропного несжимаемого материала [18]. Аналогично показывается, что полный контакт реализуем и для случая перпендикулярных граням слоя плоскостей изотропии при скользящей заделке одной грани (соответствующее ИУ см. в [5]).

Из решения (15) найдем вдавливающую силу

$$P = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(x, y) dx dy = \frac{2\delta L_0}{\pi\lambda}. \quad (17)$$

При $\lambda \rightarrow \infty$ решение (15) соответствует случаю трансропного полупространства и обобщает решение Джонсона [6] для изотропного полупространства.

На основе формул (16) и (12) получено относительное отличие интегральных характеристик (17) P_a и P_b в задачах А и Б (полный контакт)

$$\theta_* = \frac{P_b - P_a}{P_a} \cdot 100\% = \frac{A_{13}^2}{A_{11}A_{33} - A_{13}^2} \cdot 100\%. \quad (18)$$

Отсюда, например, для древесины ели Дугласа ($A_{11} = 4,07$, $A_{13} = 0,24$, $A_{33} = 6,89$, $A_{44} = 0,49$, $A_{66} = 0,69$ ГПа [1]) $\theta_* = 0,2\%$, а для гнейса влажного ($A_{11} = 99$, $A_{13} = 45$, $A_{33} = 78$, $A_{44} = 15$, $A_{66} = 26,5$ ГПа [1]) $\theta_* = 35,5\%$. В каждом изотропном случае при $\nu = 0,3$ имеем $\theta_* = 22,5\%$.

3. Решение для частичного контакта

При неполном контакте имеем задачу со смешанными граничными условиями. Учитывая периодичность, удобно интегрировать по единичной области контакта Ω с центром $x = y = 0$. Тогда ИУ (9) с ядром (10) при учете (16) (δ и $f(x, y)$ отнесем к l_1) принимает вид

$$\iint_{\Omega} q(x_0, y_0) K(x - x_0, y - y_0) dx_0 dy_0 = \lambda[\delta - f(x, y)], \quad (x, y) \in \Omega, \quad (19)$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} \cos\left(\xi \frac{x + 2n}{\lambda}\right) \cos\left(\eta \frac{y + 2m\varepsilon}{\lambda}\right) d\xi d\eta. \quad (20)$$

Для эффективного расчета ядра (20) преобразуем его, переходя от тригонометрических рядов к рядам обобщенных функций Дирака [7]. Это позволит освободиться от квадратур в ядре (20) и записать его, выделяя главные члены, в виде

$$K(x, y) = R^{-1} + F(x, y), \quad R = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (21)$$

$$F(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{4\lambda^2 + R^2}} + F_1 + F_2 + F_3 - \frac{\pi\lambda}{2\varepsilon} (G_0 + 2G_1 + 2G_2 + G_3),$$

$$F_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_{n0} + Q_{-n,0}), \quad F_2 = \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{0m} + Q_{0,-m}),$$

$$F_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{nm} + Q_{-n,m} + Q_{n,-m} + Q_{-n,-m}),$$

$$Q_{nm} = R_{nm}^{-1} - (4\lambda^2 + R_{nm}^2)^{-1/2}, \quad R_{nm} = [(x + 2n)^2 + (y + 2m\varepsilon)^2]^{1/2},$$

$$G_0 = \lim_{u \rightarrow 0} M(u) = 2 - L_0^{-1}, \quad G_1 = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_{n0}) \cos(\pi nx),$$

$$G_2 = \sum_{m=1}^{\infty} M(u_{0m}) \cos \frac{\pi my}{\varepsilon}, \quad G_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} M(u_{nm}) \cos(\pi nx) \cos \frac{\pi my}{\varepsilon},$$

$$M(u) = [1 - \exp(-2u) - L(u)] u^{-1}, \quad u_{nm} = \pi\lambda [n^2 + (m/\varepsilon)^2]^{1/2}.$$

Взаимное слияние штампов учитывается при изменении параметра ε (отношение периодов), который входит в ядро ИУ. Для решения применим численный метод Б.А. Галанова, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления [19]. Заклучим Ω в прямоугольную ячейку S размером $2 \times 2\varepsilon$ (в размерных величинах $2l_1 \times 2l_2$) с центром $x = y = 0$. Добавим к ИУ (19), (21) условия положительности давления в Ω и отсутствия контакта в $S \setminus \Omega$ ($N = x, y$, $M = r, z$, $d(M) = \delta - f(M)$):

$$\int_S q(N)K(N, M)dN = d(M), \quad q(M) \geq 0, \quad M \in \Omega, \quad (22)$$

$$\int_S q(N)K(N, M)dN > d(M), \quad q(M) = 0, \quad M \in S \setminus \Omega. \quad (23)$$

Введем нелинейные операторы $p^+(M) = \sup \{P(M), 0\}$, $p^-(M) = \inf \{P(M), 0\}$ и представим давление в виде $q = q(M) = q^+(M) + q^-(M)$. Тогда система (22), (23) сводится к нелинейному уравнению типа Гаммерштейна ($p = p(M)$, $p^\pm = p^\pm(M)$, $d = d(M)$):

$$\Theta p = 0 \quad (M \in \Omega), \quad \Theta p = p^- + Kp^+ - d, \quad Kp^+ = \int_S p^+(N)K(N, M)dN. \quad (24)$$

При численном решении ИУ (24) применяется модифицированный метод Ньютона. Область контакта Ω определяется узлами сетки в S , в которых давление положительно. Помимо герцевской особенности R^{-1} , в ядре (21) присутствуют дополнительные интегрируемые особенности на сторонах и в вершинах S вида $R_{\pm 1,0}^{-1}$, $R_{0,\pm 1}^{-1}$, $R_{\pm 1,\pm 1}^{-1}$, $R_{\pm 1,\mp 1}^{-1}$ в точках $x = x_0 \mp 2, y = y_0$; $x = x_0, y = y_0 \mp 2\varepsilon$; $x = x_0 \mp 2, y = y_0 \mp 2\varepsilon$; $x = x_0 \mp 2, y = y_0 \pm 2\varepsilon$. В ходе отладки программы при сгущении сетки в обеих задачах численное решение приближается к точному решению (15), (17).

Расчеты проводились для системы параболоидов вращения, $f(x, y) = A_0(x^2 + y^2)$. Расчеты показали, что с увеличением относительной толщины слоя λ интегральная характеристика (безразмерная сила) P уменьшается. Вдавливающая сила растет с увеличением осадки. Поведение величины $P(\delta)$ для задач А или Б существенно зависит от материала слоя. Для ели Дугласа соответствующие зависимости в задачах А и Б очень близки, тогда как для гнейса влажного труднее индентировать при жесткой заделке (рис. 1). Эти выводы качественно согласуются с приведенными выше расчетами по формуле (18).

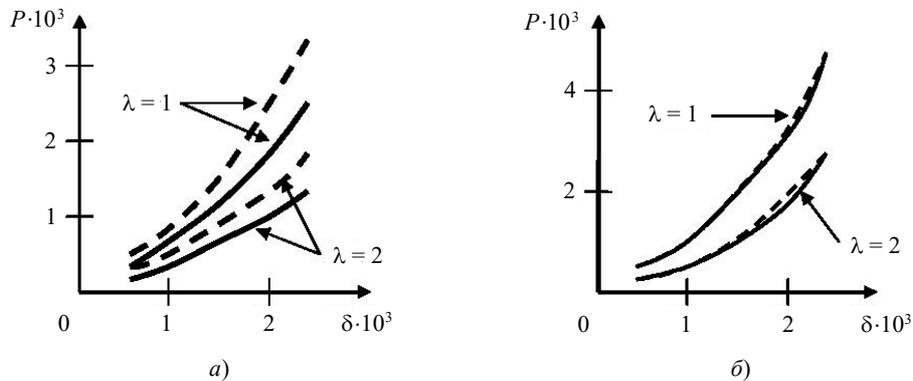


Рис. 1. Зависимости $P(\delta)$ для гнейса влажного (а) и ели Дугласа (б) для задач А (сплошные линии) и Б (штриховые линии) при $A_0 = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1$, $\lambda = 1$ и $\lambda = 2$

При усилении контакта наблюдается слияние соседних зон контакта. В случае симметрии по x, y этот процесс начинается в четырех точках границы ячейки S . В таблице 1 для системы параболоидов приведены минимальные требуемые значения осадки и силы при начальной и полной перколяции для ели Дугласа при $A_0 = 10^{-3}$, $\varepsilon = 1$ и разных λ . Как видно, с ростом λ требуемая для перколяции осадка δ растет, а соответствующая интегральная характеристика меняется слабо.

Таблица 1

**Значения силы и осадки для задач А и Б при начальной
и полной перколяции для ели Дугласа**

λ	Начальная перколяция				Полная перколяция			
	$\delta \cdot 10^3$		$P \cdot 10^3$		$\delta \cdot 10^3$		$P \cdot 10^3$	
	А	Б	А	Б	А	Б	А	Б
1	1,5	1,4	2,24	1,97	2,9	2,6	5,92	5,14
3	2,8	2,8	1,92	1,92	6,2	6,2	4,95	4,96
5	4,2	4,2	1,93	1,94	9,7	9,6	4,93	4,88
7	5,5	5,5	1,93	1,93	13,0	13,0	4,91	4,92

Заключение

При произвольной ориентации плоскостей изотропии на характеристики контакта влияют все пять независимых параметров анизотропии A_{mn} , из которых составляются четыре независимых безразмерных параметра Элиота γ_1, γ_2, m_1 и $\gamma_3 = \sqrt{A_{44}/A_{66}}$ ($m_2 = 1/m_1$) [4]. Для выбранной в статье простейшей ориентации параметр A_{66} не влияет на характеристики контакта, в задаче А остаются два независимых безразмерных параметра γ_1, γ_2 , а в задаче Б – три параметра γ_1, γ_2, m_1 (см. формулы (11)). В изотропном случае все параметры Элиота равны единице, в задаче А символ ядра ИУ не содержит параметров, в задаче Б – содержит один параметр (коэффициент Пуассона) [18]. Формула (18) показывает, что параметр A_{44} не оказывает влияния на различие интегральных характеристик полного контакта в задачах А и Б.

Установлена структура ядер ИУ трехмерных двоякопериодических контактных задач для трансверсально изотропного слоя, когда плоскости изотропии параллельны граням. Доказана возможность полного контакта трансропного слоя с жесткой синусоидальной поверхностью. Для частичного контакта показано, что численный метод нелинейных граничных ИУ применим в зоне перколяции. Поведение характеристик контакта существенно зависит от материала слоя. При утолщении слоя уменьшается отличие между решениями для скользящей и жесткой заделки на нижней грани слоя. Переход от дискретного к непрерывному контакту происходит на сторонах прямоугольной ячейки, где возникают новые интегрируемые особенности ядра ИУ.

Список литературы

1. Ding H., Chen W., Zhang L. *Elasticity of Transversely Isotropic Materials*. Dordrecht: Springer, 2006. 435 p.
2. Pan E., Chen W. *Static Green's Functions in Anisotropic Media*. New York: Cambridge University Press, 2015. 356 p.
3. Fabrikant V.I. *Contact and Crack Problems in Linear Elasticity*. Sharjah: Bentham Science Publishers, 2010. 1035 p.
4. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*. 2011. Vol. 64. Iss. 2. P. 151–170. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbq029>.
5. Pozharskii D.A., Zolotov N.B. Periodic contact problems for a transversely isotropic layer. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2022. Vol. 63. No 6. P. 1065–1072. <https://doi.org/10.1134/S0021894422060207>.
6. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy surfaces. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1985. Vol. 27. Iss. 6. P. 383–396. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(85\)90029-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(85)90029-3).

7. Aleksandrov V.M. Doubly periodic contact problems for an elastic layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002. Vol. 66. Iss. 2. P. 297–305. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00036-9.
8. Soldatenkov I.A. The spatial contact problem for an elastic layer and wavy punch when there is friction and wear. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78. Iss. 1. P. 99–106. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.05.011>.
9. Yastrebov V.A. Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited. *Tribology Letters*. 2014. Vol. 56. Iss. 1. P. 171–183. <https://doi.org/10.1007/s11249-014-0395-z>.
10. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов. Ф.И. *Трение эластомеров. Моделирование и эксперимент*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2017. 204 с.
11. Wang X., Xu Y., Jackson R.L. Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions. *Tribology Letters*. 2017. Vol. 65. Iss. 4. P. 156–170. <https://doi.org/10.1007/s11249-017-0937-2>.
12. Argatov I., Li Q., Popov V.L. Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives. *Archive of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 89. Iss. 6. P. 1447–1472. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01516-1>.
13. Ghanati P., Adibnazari S. A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts. *Archive of Applied Mechanics*. 2019. Vol. 89. Iss. 9. P. 1825–1836. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01545-w>.
14. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces. *Tribology Letters*. 2019. Vol. 67. No 4. Article No 107. <https://doi.org/10.1007/s11249-019-1220-5>.
15. Goryacheva I., Makhovskaya Y. *Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology*. Amsterdam: Elsevier Inc., 2022. 220 p.
16. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Yu. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 8. P. 1441–1462. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080099>.
17. Пожарский Д.А. Периодические контактные и смешанные задачи теории упругости (обзор). *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2021. №2. С. 22–33. <https://doi.org/10.18522/1026-2237-2021-2-22-33>.
18. Zolotov N.B., Pozharskii D.A. Doubly periodic contact problems for a layer with an unknown contact zone. *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58. Iss. 7. P. 2602–2609. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070257>.
19. Galanov B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985. Vol. 49. Iss. 5. P. 634–640.
20. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. *Three-Dimensional Contact Problems*. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academic Publisher, 2001. 406 p.

References

1. Ding H., Chen W., Zhang L. *Elasticity of Transversely Isotropic Materials*. Dordrecht. Springer. 2006. 435 p.
2. Pan E., Chen W. *Static Green's Functions in Anisotropic Media*. New York. Cambridge University Press. 2015. 356 p.
3. Fabrikant V.I. *Contact and Crack Problems in Linear Elasticity*. Sharjah. Bentham Science Publishers. 2010. 1035 p.
4. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 2011. Vol. 64. Iss. 2. P. 151–170. <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbq029>.
5. Pozharskii D.A., Zolotov N.B. Periodic contact problems for a transversely isotropic layer. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2022. Vol. 63. No 6. P. 1065–1072. <https://doi.org/10.1134/S0021894422060207>.
6. Johnson K.L., Greenwood J.A., Higginson J.G. The contact of elastic regular wavy

- surfaces. *Int. J. Mech. Sci.* 1985. Vol. 27. Iss. 6. P. 383–396. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(85\)90029-3](https://doi.org/10.1016/0020-7403(85)90029-3).
7. Aleksandrov V.M. Doubly periodic contact problems for an elastic layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2002. Vol. 66. Iss. 2. P. 297–305. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00036-9.
8. Soldatenkov I.A. The spatial contact problem for an elastic layer and wavy punch when there is friction and wear. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2014. Vol. 78. Iss. 1. P. 99–106. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2014.05.011>.
9. Yastrebov V.A., Anciaux G., Molinari J.-F. The contact of elastic regular wavy surfaces revisited. *Tribol. Lett.* 2014. Vol. 56. Iss. 1. P. 171–183. <https://doi.org/10.1007/s11249-014-0395-z>.
10. Goryacheva I.G., Makhovskaya Yu.Yu., Morozov A.V., Stepanov. F.I. *Trenie elastomerov. Modelirovanie i eksperiment [Friction of Elastomers. Modeling and Experiment]*. Moscow. Izhevsk. Institut kompyuternykh issledovaniy. 2017. 204 p. (In Russian).
11. Wang X., Xu Y., Jackson R.L. Elastic sinusoidal wavy surface contact under full stick conditions. *Tribol. Lett.* 2017. Vol. 65. Iss. 4. P. 156–170. <https://doi.org/10.1007/s11249-017-0937-2>.
12. Argatov I., Li Q., Popov V.L. Cluster of the Kendall-type adhesive microcontacts as a simple model for load sharing in bioinspired fibrillar adhesives. *Arch. Appl. Mech.* 2019. Vol. 89. Iss. 6. P. 1447–1472. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01516-1>.
13. Ghanati P., Adibnazari S. A study on the extent of the contact and stick zones in multiple contacts. *Arch. Appl. Mech.* 2019. Vol. 89. Iss. 9. P. 1825–1836. <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01545-w>.
14. Tsukanov I.Y. An extended asymptotic analysis for elastic contact of three-dimensional wavy surfaces. *Tribol. Lett.* 2019. Vol. 67. No 4. Article No 107. <https://doi.org/10.1007/s11249-019-1220-5>.
15. Goryacheva I., Makhovskaya Y. *Discrete Contact Mechanics with Applications in Tribology*. Amsterdam. Elsevier Inc. 2022. 220 p.
16. Goryacheva I.G., Tsukanov I.Yu. Development of discrete contact mechanics with applications to study the frictional interaction of deformable bodies. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 8. P. 1441–1462. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080099>.
17. Pozharskii D.A. Periodicheskie kontaktnye i smeshannye zadachi teorii uprugosti (obzor) [Periodic contact and mixed problems of the elasticity theory (Review)]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science]*. 2021. No 2. P. 22–33 (In Russian).
18. Zolotov N.B., Pozharskii D.A. Doubly periodic contact problems for a layer with an unknown contact zone. *Mechanics of Solids*. 2023. Vol. 58. Iss. 7. P. 2602–2609. <https://doi.org/10.3103/S0025654423070257>.
19. Galanov B.A. The method of boundary equations of the Hammerstein-type for contact problems of the theory of elasticity when the regions of contact are not known. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1985. Vol. 49. Iss. 5. P. 634–640.
20. Alexandrov V.M., Pozharskii D.A. *Three-Dimensional Contact Problems*. Dordrecht. Boston. London. Kluwer Academic Publisher. 2001. 406 p.

**CONTACT OF AN ANISOTROPIC LAYER
WITH A RIGID PERIODICALLY CONVEX SURFACE***

Pozharskii D.A., Zolotov N.B.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

pozharda@rambler.ru, zolotov.nikita.borisovich@gmail.com

Received by the Editor 2024/04/01

By using Fourier integral transforms applied to integral equations, exact solutions are constructed for spatial problems of full contact of a transversely isotropic layer with a rigid doubly periodic sinusoidal surface. One layer face is subjected to sliding or rigid support, and isotropy planes are parallel to the layer faces. It is established that the full contact over the whole layer face is always possible except the degenerate case of isotropic incompressible layer with one face rigidly fixed. It is indicated that the full contact is also realizable for the case of isotropy planes perpendicular to the layer faces when one face is subjected to sliding support. The problems of partial contact are also considered for the transversely isotropic layer with a rigid surface relief of which is described by a doubly periodic function in the form of a system of paraboloids of revolution. On the base of the theory of generalized functions, the problems are reduced to integral equations kernels of which do not contain integrals. The complication of the problems of partial contact is that the contact domain is a priori unknown that leads us to additional inequalities and nonlinearities. With the help of the B.A. Galanov method, the system of the integral equation and inequality can be reduced to only one nonlinear integral equation for which the modified Newton numerical method can be applied. The exact solutions for the full contact are usable to check calculations. Contact domains and contact pressures are determined. Mechanical characteristics are calculated for the percolation process of initially discrete contact spots in the strengthening contact. Minimal settlements of the paraboloids of revolution are calculated to begin or complete percolation for an anisotropic material.

Keywords: doubly periodic contact, transversal isotropy, layer.

* The study was supported by the Russian Science Foundation, grant No 24-21-00014, <https://rscf.ru/project/24-21-00014/>.