

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-270-284

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ
НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ АРМИРОВАННЫХ
МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН,
КОНТАКТИРУЮЩИХ С ЖИДКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДОЙ
1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РАСЧЕТА***

© 2024 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 01.03.2024

Рассмотрена задача определения несущей способности изгибаемой армированной кольцевой пластины, покоящейся на несжимаемом жидком основании. Внутреннее отверстие конструкции закрыто сплошной, абсолютно жесткой вставкой. Соединение вставки и пластины может быть жестким или шарнирным. На внешней кромке конструкция оперта, причем возможно перемещение опоры в вертикальном направлении, например в случае подвижной заделки. В предельном состоянии перетекание жидкости с одной лицевой поверхности пластины на другую поверхность не допускается. Материалы компонентов композиции являются изотропными и жесткопластическими, имеющими одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии. Пластическое течение в фазах композиции ассоциировано с кусочно-линейными критериями текучести (типа условий текучести Треска или Ишлинского – Ивлева). Предельное состояние такой композитной пластины описывается в рамках классической теории поперечного изгиба. Структуры армирования имеют осевую и радиальную симметрию. Рассмотрены два варианта армирования: укладка двух семейств волокон по радиально симметричным спиральным траекториям и армирование в радиальном и окружном направлениях. Армирующие волокна предполагаются непрерывными и имеющими по своей длине постоянные поперечные сечения, что порождает существенную неоднородность рассматриваемых структур в радиальном направлении. Пластическое течение металлокомпозиции рассчитывается с использованием структурной модели, которая учитывает наличие плоского напряженного состояния во всех субструктурных элементах. Приведены структурные формулы, позволяющие определить координаты угловых точек на кусочно-линейных кривых текучести рассматриваемых композиций с учетом их зависимости от неоднородных параметров армирования: углов и плотностей. Сформулирован экстремальный принцип, позволяющий получать верхнюю (кинематическую) оценку предельной нагрузки для такого типа конструкции. Поставленная задача дискретизирована по полярному

*Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 124021400036-7).

радиусу. В качестве неизвестных сеточных функций использованы узловые значения скорости прогиба и диссипации механической энергии. Разработан численный алгоритм решения сформулированной дискретизированной задачи, базирующийся на применении симплекс-метода теории линейного программирования.

Ключевые слова: металлокомпозитные кольцевые пластины, несжимаемое жидкое основание, жесткая вставка, армирование проволоками, жестко-пластическая модель, несущая способность, предельное состояние, кусочно-линейные кривые текучести, численная схема, линейное программирование.

Введение

Изделия из композиционных материалов (КМ) широко используются в современной инженерной практике [1–4]. При этом они часто работают в условиях высокоинтенсивного нагружения, при котором компоненты их композиции могут деформироваться пластически [1, 2, 5]. Следовательно, актуальной является проблема моделирования неупругого деформирования КМ-конструкций, которая на сегодняшний день находится в стадии становления [2, 5–15].

Для оценки несущей способности КМ-изделий по второму предельному состоянию в первом приближении целесообразно использовать модель жестко-пластического тела [16]. На основании этого в [10–13, 15–17] моделировалось предельное состояние армированных пластин и оболочек. В ряде случаев КМ-конструкции могут представлять собой емкости или контейнеры [18], заполненные несжимаемой жидкостью, или могут покоиться на жидком несжимаемом основании, или контактировать с такой жидкостью, например в изделиях, предназначенных для эксплуатации в подводных условиях. Определение несущей способности армированных пластин и оболочек, работающих в таких условиях, также представляет практический интерес. Так, в [12, 13] аналитически получены полные решения о предельном состоянии кольцевых армированных пластин с жесткой внутренней вставкой (шайбой), покоящихся на несжимаемой жидкости. При этом ход рассуждений полностью повторял рассуждения из аналогичных более ранних исследований для однородных пластин [19, 20]. Однако статьи [12, 13] содержат существенные недостатки и даже ошибки [12, 20]. Например, в [13] рассматривается только один тип армирования – по радиальным и окружным направлениям. При этом структура армирования предполагается однородной по полярному радиусу. Но такие структуры армирования являются сильно идеализированными, так как при использовании волокон, полученных по традиционным технологиям и имеющих постоянные поперечные сечения, укладка арматуры по указанным направлениям, как будет показано ниже и продемонстрировано в [10, 15], приводит к существенно неоднородным структурам в направлении полярного радиуса. Кроме того, в [13] предполагается разносопротивляемость материалов компонентов композиции при растяжении и сжатии и используется упрощенная структурная модель механики композитов, разработанная для изгибаемых тонкостенных КМ-конструкций в [21]. Однако в [21] подчеркивается, что построенная там модель справедлива только при выполнении жесткого условия – в оболочке (в частности, пластине) существует только одна нейтральная поверхность. В статье же [13], как и в [11], выполнение этого сильного предположения не проверяется, поэтому полученные там результаты вызывают большие сомнения.

В [20] при построении кривой текучести в моментах для изгибаемой пластины из разносопротивляющегося материала (льда) допущена серьезная ошибка: для мембранного радиального усилия N_1 записана цепочка равенств (см. стр. 27 в [20]):

$$N_1 = \int_0^H \sigma_1 dz = - \int_0^{z_1} \sigma_1 dz = 0, \quad (1)$$

где H – толщина пластины, σ_1 – знакопостоянное по поперечной координате z напряжение на кривой текучести материала. Так как функция σ_1 по z не изменяет знака и отлична от нуля, то при $z_1 \neq 0$ равенство нулю в (1) невозможно. Как следствие этого, кривая текучести в моментах для изгибаемой пластины, изображенная на рис. 2 в [20], является неверной. Согласно же структурным соотношениям (23), (30) и (31) в [15], кривые текучести армированного материала непрерывно зависят от плотностей армирования ω_k волокнами k -го семейства. Поэтому, по крайней мере при достаточно малых ω_k , указанное выше противоречие будет проявляться и при построении кривой текучести в моментах и для изгибаемой армированной пластины из разносопротивляющихся материалов ее композиции. А значит, изображенная на рис. 2 в [12] кривая текучести в изгибающих моментах, построенная для волокнистой пластины, также ошибочна. Следовательно, аналитические решения, построенные в [12, 13, 20], нужно признать чисто формальными, не имеющим к реальным объектам никакого отношения.

В случае моделирования предельного состояния изгибаемой тонкостенной конструкции из разносопротивляющихся компонентов композиции, по-видимому, вообще нельзя получить для нее предельную кривую только в изгибающих моментах, как это необоснованно сделано в [11–13, 20]. В этом случае должна получаться весьма сложная поверхность текучести, зависящая как от изгибающих моментов, так и от мембранных усилий, которые в [11–13, 20] не учитывались. Известно, что даже для однородной цилиндрической оболочки такая поверхность текучести является сложной и построение ее требует привлечения достаточно тонких математических построений [22]. По этой причине автор статьи [17] был вынужден отказаться от построения аналогичных поверхностей текучести для армированных оболочек в общей постановке, а использовал упрощенную (двуслойную) модель тонкостенной КМ-конструкции. И даже в рамках такого упрощенного моделирования поверхность текучести изгибаемой армированной оболочки получается чрезвычайно сложной. В силу этого, для получения аналитического решения в [17] пришлось построенную поверхность текучести существенно упрощать, подгоняя ее под результаты статьи [22]. Аналогичные проблемы возникли и в [23], где на базе структурной модели из [21] формально построены поверхности текучести для трехслойной КМ-оболочки. Аналитическое описание этих поверхностей в пространстве изгибающих моментов и мембранных усилий настолько сложно, что не известно ни одного решения о предельном равновесии тонкостенной КМ-конструкции, найденного с использованием гиперповерхностей текучести, полученных в [23].

Предельное состояние армированных оболочек, заполненных несжимаемой жидкостью, до настоящего времени вообще не моделировалось. Из вышеприведенного анализа следует, что определение несущей способности таких КМ-конструкций возможно, по-видимому, только численно. Так, в [16] для решения задач об определении предельного состояния однородных пластин и оболочек был разработан соответствующий численный метод, основанный на использовании теории

линейного программирования [24], который впоследствии был использован при решении аналогичных задач для изгибаемых армированных пластин и пологих оболочек [10, 15]. Этот метод для решения указанных задач в случае кольцевых армированных пластин, покоящихся на несжимаемом жидком основании, до настоящего времени не применялся, поэтому целесообразно провести его апробацию.

Согласно вышеизложенному, настоящее исследование посвящено: численному определению верхней (кинематической) границы несущей способности изгибаемых армированных кольцевых пластин с жесткими внутренними круглыми вставками, покоящихся на несжимаемом жидком основании; верификации этого численного метода; исследованию влияния параметров структуры армирования на предельную нагрузку.

1. Постановка задачи и метод ее решения

Рассматривается тонкая армированная кольцевая пластина, ограниченная кромками радиусов $R_0 < R_1$ (рис. 1). На внутренней кромке $r = R_0$ кольцевая часть соединена с абсолютно жесткой вставкой, полностью закрывающей отверстие в пластине. Конструкция покоится на несжимаемом жидком основании и на внешней кромке $r = R_1$ может иметь различные виды осесимметричного опирания, не допускающего перетекания жидкости с одной лицевой поверхности на другую: жесткая или подвижная в вертикальном направлении заделка, шарнирное опирание или свободная кромка. Толщина пластины $H = 2h$ может быть переменной – зависеть от полярного радиуса r ($h = h(r)$).

Кольцевая часть конструкции ($R_0 \leq r \leq R_1$) осесимметрично усилена двумя семействами волокон (проволок) с плотностями ω_k и углами армирования ψ_k ($k = 1, 2$), отсчитываемыми от радиального направления r (см. рис. 1а, где указан угол армирования первым семейством ψ_1). Сравниваются два варианта армирования:

1) по спиральным траекториям двумя семействами волокон, изготовленных из одного материала и уложенных симметрично относительно направления r : $\omega_2(r) = \omega_1(r)$, $\psi_2(r) = -\psi_1(r)$, $R_0 \leq r \leq R_1$ (см. рис. 1а и 1б);

2) укладка волокон в радиальном ($\omega_1(r)$, $\psi_1(r) = 0$) и окружном ($\omega_2(r)$, $\psi_2(r) = \pi/2$) направлениях (см. рис. 1в), причем арматура разных семейств может быть выполнена из разных материалов.

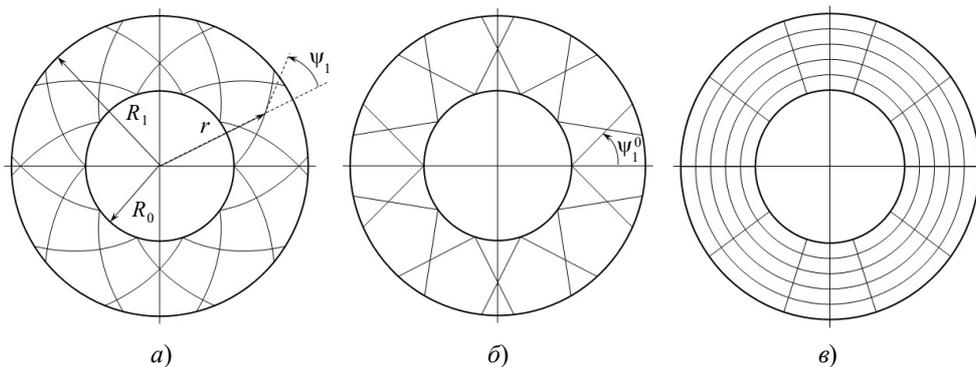


Рис. 1. Структуры армирования кольцевой пластины: а) по логарифмическим спиральям; б) по геодезическим направлениям; в) по радиальным и окружным траекториям

Структуры армирования по толщине пластины квазиоднородны. Волокна предполагаются непрерывными в области армирования и имеющими постоянные поперечные сечения [1, 4]. Согласно этому, интенсивность армирования k -м семейством волокон при их осесимметричной укладке по спиральным траекториям определяется так [10, 15]:

$$\omega_k(r) = \frac{h_0 R_0 \omega_k^0 \cos \psi_k^0}{h(r) r \cos \psi_k(r)}, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (2)$$

$$h_0 = h(R_0), \quad \omega_k^0 = \omega_k(R_0), \quad \psi_k^0 = \psi_k(R_0), \quad \psi_k^0 \neq \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2,$$

где ω_k^0 – плотность армирования, заданная на внутреннем контуре $r = R_0$. В случае радиальной укладки волокон в (2) следует задать $\psi_k^0 = \psi_k = 0$. В случае второй структуры для окружного семейства арматуры ($k = 2$) имеем $\psi_2^0 = \psi_2 = \pi/2$, поэтому соотношение (2) вырождается в неопределенность типа 0/0 и плотность армирования ω_2 может быть произвольной неотрицательной функцией полярного радиуса r . При обеих структурах плотности армирования $\omega_k(r)$ должны подчиняться физическому ограничению [15]:

$$\omega_\Sigma(r) = \omega_1(r) + \omega_2(r) \leq \omega_m = \text{const} < 1 \quad (\omega_k(r) \geq 0, \quad k = 1, 2), \quad R_0 \leq r \leq R_1. \quad (3)$$

Здесь $\omega_m > 0$ – наибольшее, предельно допустимое значение суммарной интенсивности армирования $\omega_\Sigma(r)$. В инженерной практике обычно принимают $\omega_m \approx 0,7$ [25].

Конструкция покоится на несжимаемом жидком основании [12, 13, 19, 20]. Изгибное деформирование армированной пластины описывается классической теорией, а компоненты ее композиции однородны, изотропны и имеют одинаковые пределы текучести при растяжении и сжатии. Такими свойствами, за редким исключением, обладают, в частности, материалы фаз металлокомпозиций [1, 2, 15, 16].

Конструкция нагружена осесимметрично в поперечном направлении z , ось z перпендикулярна плоскости рис. 1 и направлена вертикально вниз. При указанных свойствах материалов компонентов композиции, особенностях структуры армирования, нагружения, закрепления и геометрии пластины в предельном состоянии в ней реализуется осесимметричный поперечный изгиб [16, 19]. При этом направления главных усредненных напряжений и скоростей деформаций в композиции пластины в предельном ее состоянии совпадают с радиальным и окружным направлениями.

На конструкцию действуют внешние силы двух типов. Нагрузки первого типа фиксированы. Это, например, весовые нагрузки или выталкивающая сила жидкости – отпор жидкости [19]. Нагрузки второго типа пропорциональны параметру нагружения, предельное значение которого подлежит определению.

Пусть v_0 – кинематически допустимая скорость перемещения шайбы вдоль вертикальной оси z ; $v(r)$ – кинематически допустимая скорость прогиба пластины; q – выталкивающая сила на единицу площади со стороны жидкости, равномерно распределенная по всей срединной плоскости конструкции (пластины и шайбы); G – заданный вес шайбы, возможно с уложенными на ней грузами фиксированной массы; $g_z(r)$ – приведенная массовая нагрузка, действующая на единицу площади срединной плоскости пластины и имеющая выражение [10, 15]:

$$g_z(r) = 2gh(r) \left(\rho_0 \omega_0(r) + \sum_{k=1}^2 \rho_k \omega_k(r) \right), \quad \omega_0(r) = 1 - \sum_{k=1}^2 \omega_k(r), \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2, \quad (4)$$

где ρ_0, ρ_k – объемная плотность связующего материала и арматуры k -го семейства; ω_0 – относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции.

Нефиксированная внешняя нагрузка состоит из суммарной силы P_z , действующей на шайбу в направлении z , и распределенного поперечного давления $p_z(r)$, действующего на армированную часть конструкции. Сила P_z и давление $p_z(r)$ пропорциональны безразмерному параметру нагружения p :

$$P_z = p\bar{P}_z, \quad p_z(r) = p\bar{p}_z(r), \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad (5)$$

где \bar{P}_z и $\bar{p}_z(r)$ – заданные величина и функция полярного радиуса r . Предельное значение параметра p обозначим как p^* и определим его, используя принцип виртуальной мощности [16], согласно которому в общем случае нагружения и закрепления конструкции при учете (4) и (5) справедливо равенство

$$\begin{aligned} p \left[\bar{P}_z v_0 + 2\pi R_1 \bar{Q}_z^1 v_1 + 2\pi R_0 \bar{m}_n^0 \vartheta_0 + 2\pi R_1 \bar{m}_n^1 \vartheta_1 + 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \bar{p}_z(r) v(r) r dr \right] = & 2\pi \int_{R_0}^{R_1} D(r) r dr + \\ & + 2\pi \int_{R_0}^{R_1} g_z(r) v(r) r dr + \pi q \left(v_0 R_0^2 + 2 \int_{R_0}^{R_1} v(r) r dr \right) + Gv_0 - \\ & - 2\pi R_0 M_n^0 \vartheta_0 - \pi R_1 (Q_1 v_1 + M_n^1 \vartheta_1), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} D(r) &= M_1(r) \kappa_1(r) + M_2(r) \kappa_2(r), \quad M_i(r) = h^2(r) \sigma_i(r) \quad (i = 1, 2), \\ \vartheta(r) &= -v'(r), \quad \kappa_1(r) = \vartheta'(r), \quad \kappa_2(r) = \vartheta(r)/r, \quad \vartheta_j = \vartheta(R_j) \quad (j = 0, 1); \end{aligned} \quad (7)$$

D – мощность диссипации механической энергии, отнесенной к единице площади срединной плоскости пластины; ϑ – скорость поворота нормали к этой плоскости в радиальном направлении r ; κ_1, κ_2 – скорости параметров искривления срединной плоскости в радиальном и окружном направлениях; σ_1, σ_2 – усредненные главные напряжения в композиции пластины в тех же направлениях, удовлетворяющие критерию текучести при плоском напряженном состоянии (ПНС); M_n^j – заданные фиксированные погонные изгибающие моменты на кромках $r = R_j$; $p\bar{m}_n^j$ – изгибающие погонные моменты на кромках $r = R_j$ ($j = 0, 1$), по аналогии с (5) пропорциональные параметру нагружения p ; Q_1 – заданная фиксированная перерезывающая сила на внешней кромке $r = R_1$; $p\bar{Q}_z^1$ – перерезывающая сила на кромке $r = R_1$, пропорциональная параметру p ; штрих – производная по r . Предполагается, что кривая текучести КМ в плоскости $(\sigma_1 \sigma_2)$ аппроксимирована кусочно-линейно и имеет N угловых точек.

Условие совместного перемещения шайбы и внутренней кромки пластины характеризуется равенством

$$v_0 = v(R_0). \quad (8)$$

Так как конструкция покоится на несжимаемом жидком основании и в предельном состоянии жидкость не перетекает с одной лицевой поверхности пластины на другую, то при учете (8) выполняется дополнительное кинематическое соотношение [12, 13, 19, 20]:

$$v_0 R_0^2 + 2 \int_{R_0}^{R_1} v(r) r dr = 0. \quad (9)$$

Согласно формулировке кинематического метода [16], для определения верхней границы несущей способности рассматриваемой конструкции из (6) при учете (7)–(9) необходимо найти минимум p^* параметра нагрузки p при всех кинематически допустимых распределениях функции $v(r)$. При численном решении такой задачи целесообразно перейти от соотношения (6) к задаче минимизации [16], учитывая при этом равенства (8) и (9):

$$p^* = \min_{v(r)} p = \min_{v(r)} \frac{1}{I} \left[2\pi \int_{R_0}^{R_1} D(r) r dr + 2\pi \int_{R_0}^{R_1} g_z(r) v(r) r dr - \right. \\ \left. - 2\pi R_0 M_n^0 \vartheta_0 - 2\pi R_1 (Q_1 v_1 + M_n^1 \vartheta_1) + G v_0 \right] \quad (10)$$

при условии нормировки

$$\bar{P}_z v_0 + 2\pi R_1 \bar{Q}_z^1 v_1 + 2\pi R_0 \bar{m}_n^0 \vartheta_0 + 2\pi R_1 \bar{m}_n^1 \vartheta_1 + 2\pi \int_{R_0}^{R_1} \bar{p}_z(r) v(r) r dr = I \quad (11)$$

и ограничениях-неравенствах (см. (7))

$$D(r) \geq -h^2(r) (\sigma_1^{(i)} v'' + \sigma_2^{(i)} v'/r) = h^2 (\sigma_1^{(i)} \kappa_1 + \sigma_2^{(i)} \kappa_2), \\ i = 1, 2, \dots, N, \quad R_0 \leq r \leq R_1 \quad (D \geq 0), \quad (12)$$

где $I - 1$ Вт; $\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}$ – координаты i -й угловой точки на кривой текучести КМ.

Система неравенств (12) характеризует известное свойство диссипативной функции [16]: мощность «ассоциированных» изгибающих моментов $M_j = h^2 \sigma_j$ на соответствующих скоростях изменения параметров кривизны срединной плоскости пластины κ_j ($D = \sum_{i=1}^2 M_i \kappa_i$) больше или равна мощности «неассоциированных» изгибающих моментов $M_j^{(i)} = h^2 \sigma_j^{(i)}$ на обобщенных скоростях κ_j ($j = 1, 2, 1 \leq i \leq N$).

К соотношениям (10)–(12) необходимо добавить кинематические граничные условия на внешней кромке, которые в общем случае имеют вид:

$$v(R_1) = v_1^*, \quad v'(R_1) = -\vartheta_1^*, \quad (13)$$

где v_1^*, ϑ_1^* – заданные величины, а также кинематические условия сопряжения шайбы и пластины на ее внутренней кромке $r = R_0$. Если пластина и вставка соединены шарнирно, то при $r = R_0$ имеет место только равенство (8); если же они скреплены жестко, то к (8) необходимо добавить соотношение

$$v'(R_0) = 0. \quad (14)$$

Минимизацию функционала (10) при учете ограничений-неравенств (12) и ограничений-равенств (8), (9), (11), (13), (14) численно будем осуществлять методами линейного программирования. Для этого предварительно дискретизируем поставленную экстремальную задачу: на отрезке $r \in [R_0, R_1]$ введем равномерную сетку с узлами $r_m = r_1 + (m - 1)\Delta$ ($m = 1, 2, \dots, M, r_1 = R_0, r_M = R_1$) и шагом $\Delta = (R_1 - R_0)/(M - 1)$, где M – количество узлов сетки; интегралы в (9)–(11) приближенно вычислим, используя формулу трапеций; во внутренних узлах сетки ($2 \leq m \leq M - 1$) производные в (12) заменим их конечно-разностными аналогами на трехточечном шаблоне

$\{r_{m-1}, r_m, r_{m+1}\}$; в крайних узлах r_1 и r_M первые производные в (10), (11) (при учете выражений (7)) и (12)–(14) заменим их скошенными конечными разностями также на трехточечных шаблонах, а вторые производные в (12) – скошенными разностями на четырехточечных шаблонах [26]. Указанная дискретизация обеспечивает второй порядок точности численного решения по шагу Δ . После дискретизации сформулированная экстремальная задача решается симплекс-методом Данцига [24].

Полученное таким путем решение задачи не является полным. Действительно, в силу выполнения равенства (9) соотношения (10) и (11), полученные из (6), уже не содержат неизвестную величину отпора жидкости q . Поэтому предложенный метод решения рассматриваемой задачи не позволяет определить выталкивающую силу на единицу площади q со стороны жидкости в предельном состоянии пластины. Полные аналитические решения, построенные в [13, 19], позволяют это сделать. Однако с инженерной точки зрения особый интерес вызывает знание предельно допустимого значения параметра нагружения p^* , определяемого в исследуемой задаче (см. (10)); знание же конкретного значения q , по-видимому, является не столь уж принципиальным в практических приложениях. Кроме того, разработанный метод решения не позволяет получить в узловых точках и искомые значения напряжений $\sigma_1(r_m), \sigma_2(r_m)$ в композиции армированной пластины или, что почти то же самое, изгибающих моментов $M_1(r_m)$ и $M_2(r_m)$ ($1 \leq m \leq M$) в ней (см. второе соотношение в (7)).

Согласно неравенствам (12), для реализации численного решения дискретизированной экстремальной задачи предварительно нужно получить конкретные выражения для напряжений $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ ($1 \leq i \leq N$) при рассматриваемых типах армирования пластины.

2. Кривые текучести металлокомпозитной пластины

Чтобы определить напряжения $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ в соотношениях (12), необходимо построить кусочно-линейные кривые текучести композиций армированных пластин при ПНС. Выше уже отмечалось, что в рассматриваемой задаче напряжения σ_j в радиальном ($j = 1$) и окружном ($j = 2$) направлениях как в связующем, так и в композиции, являются главными напряжениями при обоих типах структур армирования.

Если кривые текучести всех фазовых материалов композиции при ПНС аппроксимированы кусочно-линейно, то кусочно-линейную кривую текучести композиции можно рассчитать по структурным формулам из [27]. Однако получающаяся при этом кривая текучести задается параметрически в неявном виде, и значит, возникает определенная проблема поиска ее угловых точек. Поэтому воспользуемся упрощенным вариантом модели из [27], который позволяет в явном виде рассчитать угловые точки на кривой текучести композиции [15] и который более точно описывает эту кривую, чем структурная модель, использованная в [10].

Обозначим через σ_0 и $\sigma_{[k]}$ пределы текучести материалов связующего и волокон k -го семейства и предположим, что пластическое течение в них ассоциировано с критерием текучести Треска [16, 28].

Первый тип армирования. При этом – спиральном – варианте армирования (см. рис. 1а и 1б) имеем $\psi_2(r) = -\psi_1(r)$, $\omega_2(r) = \omega_1(r)$ и $\sigma_{[2]}(r) = \sigma_{[1]}(r)$ ($R_0 \leq r \leq R_1$). На основании результатов из [15, 27] получаем, что кривая текучести композиции пластины при таких параметрах армирования в общем случае представляет собой восьмиугольник $ABCDEFGH$ (рис. 2а), координаты угловых точек которого $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ ($1 \leq i \leq N = 8$) вычисляются так [15]:

$$\begin{aligned}
A: & \sigma_1^{(1)} = \sigma_{f1} + \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(1)} = \sigma_{f2} + \sigma_{02}; \\
B: & \sigma_1^{(2)} = \sigma_{f1}, \quad \sigma_2^{(2)} = \sigma_{f2} + \sigma_{02}; \\
C: & \begin{cases} \sigma_1^{(3)} = -\sigma_{f1}, & \sigma_2^{(3)} = -\sigma_{f2} + \sigma_{02} \text{ при } 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4; \\ \sigma_1^{(3)} = \sigma_{f1} - \sigma_{01}, & \sigma_2^{(3)} = \sigma_{f2} \text{ при } \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2; \end{cases} \\
D: & \sigma_1^{(4)} = -\sigma_{f1} - \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(4)} = -\sigma_{f2}; \\
E: & \sigma_1^{(5)} = -\sigma_{f1} - \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(5)} = -\sigma_{f2} - \sigma_{02}; \\
F: & \sigma_1^{(6)} = -\sigma_{f1}, \quad \sigma_2^{(6)} = -\sigma_{f2} - \sigma_{02}; \\
G: & \begin{cases} \sigma_1^{(7)} = \sigma_{f1}, & \sigma_2^{(7)} = \sigma_{f2} - \sigma_{02} \text{ при } 0 \leq \psi_1 \leq \pi/4; \\ \sigma_1^{(7)} = -\sigma_{f1} + \sigma_{01}, & \sigma_2^{(7)} = -\sigma_{f2} \text{ при } \pi/4 < \psi_1 \leq \pi/2; \end{cases} \\
H: & \sigma_1^{(8)} = \sigma_{f1} + \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(8)} = \sigma_{f2},
\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\sigma_{ff} &= 2\sigma_{[1]}\omega_1 l_j^2, \quad \sigma_{0j} = (1 - 2\omega_1 l_j^2)\sigma_0 \\
(j=1, 2), \quad l_1 &= \cos \psi_1(r), \quad l_2 = \sin \psi_1(r);
\end{aligned} \tag{16}$$

ω_1 определяется согласно (2) при $k = 1$.

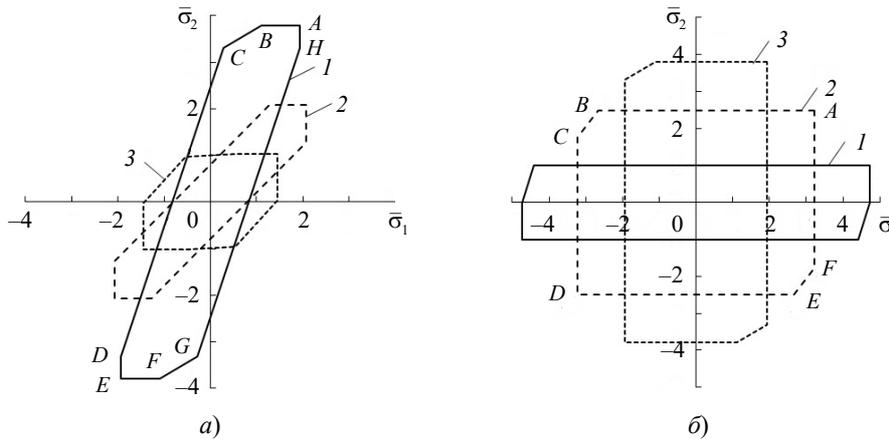


Рис. 2. Кусочно-линейные кривые текучести композиции пластины:
а) при спиральной структуре армирования; б) при радиально-окружной структуре

Второй тип армирования. В случае радиально-окружной структуры укладки волокон (см. рис. 1б) кривые текучести композиции пластины представляют собой шестиугольник $ABCDEF$ ($N = 6$), угловые точки которого имеют следующие координаты (см. рис. 2б):

$$\begin{aligned}
A: & \sigma_1^{(1)} = \sigma_{f1} + \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(1)} = \sigma_{f2} + \sigma_{02}; \\
B: & \sigma_1^{(2)} = -\sigma_{f1}, \quad \sigma_2^{(2)} = \sigma_{f2} + \sigma_{02}; \\
C: & \sigma_1^{(3)} = -\sigma_{f1} - \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(3)} = \sigma_{f2}; \\
D: & \sigma_1^{(4)} = -\sigma_{f1} - \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(4)} = -\sigma_{f2} - \sigma_{02};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E : \sigma_1^{(5)} &= \sigma_{f1}, \quad \sigma_2^{(5)} = -\sigma_{f2} - \sigma_{02}; \\ F : \sigma_1^{(6)} &= \sigma_{f1} + \sigma_{01}, \quad \sigma_2^{(6)} = -\sigma_{f2}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\sigma_{fj} = \sigma_{[j]} \omega_j(r), \quad \sigma_{0j} = (1 - \omega_j(r)) \sigma_0, \quad j = 1, 2, \quad R_0 \leq r \leq R_1; \quad (18)$$

$\omega_1(r)$ вычисляется по формуле (2) при $\psi_1(r) = 0$ ($k = 1$), а $\omega_2(r)$ может быть определена достаточно произвольно, лишь бы выполнялись физические ограничения (3); пределы текучести волокон разных семейств в общем случае могут быть различными: $\sigma_{[2]} \neq \sigma_{[1]}$.

Таким образом, соотношения (15) и (17) при учете (2), (3), (16) и (18) в явном виде задают значения напряжений $\sigma_1^{(i)}$ и $\sigma_2^{(i)}$ ($1 \leq i \leq N$) в ограничениях-неравенствах (12) для двух указанных вариантов армирования пластины, если кривые текучести связующего материала ее композиции соответствуют критерию Треска.

Согласно второму равенству (7), кривые текучести изгибаемых пластин при рассматриваемых структурах армирования в плоскости моментов (M_1, M_2) подобны кривым, изображенным на рис. 2, с коэффициентом подобия $h^2(r)$.

Повторяя рассуждения из раздела 3 в [15], вместо равенств (15) и (17) можно получить другие соотношения для координат угловых точек кусочно-линейной кривой текучести композиции при ПНС, если кусочно-линейная кривая текучести связующего материала отлична от шестиугольника Треска при ПНС и соответствует какому-то другому критерию текучести, например критерию Ишлинского – Ивлева [28].

Заключение

Сформулирована задача об определении верхней (кинематической) границы несущей способности изгибаемых металлокомпозитных кольцевых пластин переменной толщины с жесткой внутренней вставкой (шайбой), покоящихся на несжимаемом жидком основании. Тонкие пластины армированы по спирально-симметричным траекториям двумя семействам проволок, изготовленных из одного материала, или в радиальном и/или окружном направлениях и подчиняются классической теории поперечного изгиба. Учтены: традиционная технология изготовления армирующих проволок – они имеют постоянные поперечные сечения, а также существенная неоднородность структур армирования в радиальном направлении. Механическое поведение композиций пластин описывается структурной моделью, которая учитывает плоское напряженное состояние во всех компонентах их изотропных и жесткопластических материалов, пластическое течение которых ассоциировано с кусочно-линейными критериями текучести при одинаковом сопротивлении растяжению и сжатию (например условиями текучести Треска или Ишлинского – Ивлева [28]). Приведены структурные соотношения, позволяющие рассчитывать угловые точки на кривых текучести композиций при двух рассматриваемых вариантах армирования пластин и при использовании критерия текучести Треска для всех компонентов композиций. Для нахождения предельной нагрузки сформулирован экстремальный принцип и проведена соответствующая дискретизация предельной задачи по полярному радиусу, численное решение которой разыскивается с использованием симплекс-метода теории линейного программирования [24]. В качестве неизвестных сеточных функций выступают узловые значения скорости прогиба и диссипации механической энергии при поперечном изгибе, отнесенной к единице площади срединной плоскости пластины.

Список литературы

1. Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х. и др. *Композиционные материалы: Справочник*. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
2. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
3. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 832 p.
4. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press, 2016. 700 p.
5. Хазов П.А., Ведяйкина О.И., Помазов А.П., Кожанов Д.А. Уругоупругое деформирование сталебетонных балок с локальным смятием при трехточечном изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2024. Т. 86. №1. С. 71–82. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2024-86-1-71-82>.
6. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. No 0. P. 1–19. DOI: 10.1080/15376494.2024.2328751.
7. Иванов В.А., Кибец А.И., Кибец Ю.И. Конечно-элементная методика решения трехмерной задачи динамики конструкций, подкрепленных системой армирующих элементов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №2. С. 191–201. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-2-191-201>.
8. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
9. Zoubida Sekkate, Ahmed Aboutajeddine, Abbass Seddouki. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 3. P. 449–474. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1776431>.
10. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Влияние структуры армирования и формы профиля на предельное равновесие поперечно изгибаемых кольцевых пластин. *Вестник ННГУ. Серия Механика*. 2006. Вып. 1. №7. С. 123–133.
11. Кубишев И.Н. Предельная нагрузка для композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2011. № 1(14). С. 56–60.
12. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Расчет несущей способности ледяных пластин, армированных геосинтетическими волокнами. *Наука и техника в дорожной отрасли*. 2013. Т. 1. № 64. С. 27–31.
13. Джагангиров А.А. Несущая способность усиленной трехслойной волокнистой круглой пластинки, защемленной по контуру и находящейся на несжимаемой среде. *Механика машин, механизмов и материалов*. 2015. №4(33). С. 50–54.
14. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review. *International Journal of Impact Engineering*. 2014. Vol. 67. P. 27–38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
15. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 26. P. 5651–5665. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1961952>.
16. Ерхов М.И. *Теория идеально пластических тел и конструкций*. М.: Наука, 1978. 352 с.
17. Немировский Ю.В. Предельное равновесие многослойных армированных осесимметричных оболочек. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1969. №6. С. 80–89.
18. Ченг Ванг, Тонгуи Янг, Ван Ли, Ли Тао, Абузьяров М.Х., Кочетков А.В. Моделирование уругоупругого деформирования элементов пространственных конструкций при импульсном взаимодействии с жидкостью на основе метода Годунова повышенной точности. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №4. С. 489–500. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-489-500>.
19. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incom-

pressible fluid. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1967. Vol. 9. Iss. 7. P. 405–414. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90036-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90036-7).

20. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Несущая способность усиленных ледяных круглых пластин. *Проблемы прочности и пластичности*. 2011. Вып. 73. С. 25–35. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-73-1-25-35>.

21. Mroz Z., Shamiev F.G. Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells. *Arch. Inz. Lad*. 1979. Vol. 25. Iss. 3. P. 463–476.

22. Онат Е.Т. Пластическое разрушение цилиндрических оболочек под действием осесимметричной нагрузки. *Механика. Сборники переводов и обзоров иностранной периодической литературы*. 1955. Т. 6. №34. С. 122–130.

23. Ильясов М.Х., Джагангиров А.А. Гиперповерхности текучести трехслойной композитной оболочки, средний слой которой армирован волокнами. *Механика композитных материалов*. 2014. Т. 50. №3. С. 487–500.

24. Зуховицкий С.И., Авдеева Л.И. *Линейное и выпуклое программирование*. М.: Наука, 1964. 348 с.

25. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. *Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов*. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.

26. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. New York: Marcel Dekker Inc., 2001. 761 p.

27. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 8. P. 1235–1252. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080221>.

28. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 707 с.

References

1. Vishnyakov L.R., Grudina T.V., Kadyrov V.Kh. et al. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite Materials: Guide]*. Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka. 1985. 592 p. (In Russian).

2. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruktсий [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Structures]*. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).

3. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 832 p.

4. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics*. Boca Raton, Florida, USA. CRC Press. 2016. 700 p.

5. Khazov P.A., Vedyaykina O.I., Pomazov A.P., Kozhanov D.A. Uprugoplasticheskoe deformirovanie stalebetonnykh balok s lokalnym smyatim pri trekhtocheynom izgibe [Elastic-plastic deformation of steel-concrete beams with local crumpling during three-point bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2024. Vol. 86. No 1. P. 71–82 (In Russian).

6. Romanova T.P. Rigid-plastic behavior and bearing capacity of thin flat reinforced rotating disks. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2024. No 0. P. 1–19. DOI: 10.1080/15376494.2024.2328751.

7. Ivanov V.A., Kibets A.I., Kibets Yu.I. Konechno-elementnaya metodika resheniya trekhmernoy zadachi dinamiki konstruktсий, podkreplennykh sistemoy armiruyushchikh elementov [A finite-element methodology of analyzing a 3D problem of dynamics of structures stiffened by a system of reinforcing rods]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 2. P. 191–201 (In Russian).

8. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *Int. J. Plast.* 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.

9. Zoubida Sekkate, Ahmed Aboutajeddine, Abbass Seddouki. Elastoplastic mean-field homogenization: recent advances review. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 3. P. 449–474. <https://doi.org/10.1080/15376494.2020.1776431>.

10. Nemirovskii Yu.V., Yankovskii A.P. Vliyanie struktury armirovaniya i formy profilya na predelnoe ravnovesie poperechno izgibaemykh koltsevykh plastin [Influence of reinforcement structure and profile shape on the limiting equilibrium of transversely bending annular plates]. *Vestnik NNGU. Seriya Mekhanika [Bulletin of NNSU. Mechanics Series]*. 2006. Vol. 1. No 7. P. 123–133 (In Russian).
11. Kubishev I.N. Predelnaya nagruzka dlya kompozitnoy koltsevoy plastinki s raznymi usloviyami zakrepleniya [Load limit for EB in composite ring plates with different conditions of consolidation]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials]*. 2011. No 1(14). P. 56–60 (In Russian).
12. Nemirovskii Yu.V., Romanova T.P. Raschet nesushchey sposobnosti ledyanykh plastin, armirovannykh geosinteticheskimi voloknami [Calculation of bearing ability of the ice plates reinforced by geosynthetic fibres]. *Nauka i tekhnika v dorozhnoy otrasli [Advanced Science and Technology for Highways]*. 2013. Vol. 1. No 64. P. 27–31.
13. Jahangirov A.A. Nesushchaya sposobnost usilennoy trekhslonnoy voloknistoy krugloy plastinki, zashchemlennoy po konturu i nakhodyashcheysya na neszhimaemoy srede [Carrying capacity of reinforced three layers circular composite plate clamped on edge and lying on non-compressible foundation]. *Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov [Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials]*. 2015. No 4(33). P. 50–54 (In Russian).
14. Moriniere F.D., Alderliesten R.C., Benedictus R. Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates – A review. *Int. J. Impact Eng.* 2014. Vol. 67. P. 27–38. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2014.01.004>.
15. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Load-bearing capacity of rigid-plastic reinforced shallow shells and plates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2022. Vol. 29. Iss. 26. P. 5651–5665. <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1961952>.
16. Erkhov M.I. *Teoriya idealno plasticheskikh tel i konstruksiy [Theory of Ideally Plastic Bodies and Structures]*. Moscow. Nauka Publ. 1978. 352 p. (In Russian).
17. Nemirovskii Yu.V. Predelnoe ravnovesie mnogoslonykh armirovannykh osesimmetrichnykh obolochek [Limit equilibrium of multi-layer reinforced axisymmetric shells]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1969. No 6. P. 80–89 (In Russian).
18. Cheng Vang, Tongui Yang, Van Li, Li Tao, Abuziarov M.Kh., Kochetkov A.V. Modelirovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya elementov prostranstvennykh konstruksiy pri impulsnom vzaimodeystvii s zhidkostyu na osnove metoda Godunova povyshennoy tochnosti [Modeling of elastic-plastic deformation of elements of spatial structures during pulse interaction with fluid based on the Godunov's method of increased accuracy]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 4. P. 489–500 (In Russian).
19. Hodge P.G., Chang-Kuei Sun. Yield-point load of a circular plate seating an incompressible fluid. *Int. J. Mech. Sci.* 1967. Vol. 9. Iss. 7. P. 405–414. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(67\)90036-7](https://doi.org/10.1016/0020-7403(67)90036-7).
20. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Nesushchaya sposobnost usilennykh ledyanykh kruglykh plastin [Carrying capacity of reinforced ice circular plates]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2011. Iss. 73. P. 25–35 (In Russian).
21. Mroz Z., Shamiev F.G. Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells. *Arch. Inz. Lad.* 1979. Vol. 25. Iss. 3. P. 463–476.
22. Onat E.T. The plastic collapse of cylindrical shells under axially symmetrical loading. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1955. Vol. 13. Iss. 1. P. 63–72. <https://doi.org/10.1090/qam/69016>.
23. Ilyasov M.Kh., Dzhagangirov A.A. Giperpoverkhnosti tekuchesti trekhslonnoy kompozitnoy obolochki, sredniy sloy kotoroy armirovan voloknami [Yield hypersurfaces of three-layer composite shell with a fiber-reinforced middle layer]. *Mekhanika kompozitnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. 2014. Vol. 50. No 3. P. 487–500 (In Russian).
24. Zuhovitskiy S.I., Avdeeva L.I. *Lineynoe i vypukloe programmirovaniye [Linear and Convex Programming]*. Moscow. Nauka Publ. 1964. 348 p. (in Russian).

25. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. *Optimizatsiya elementov konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov* [Optimization of Structural Elements Made of Composite Materials]. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1988. 224 p. (In Russian).
26. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. New York. Marcel Dekker Inc. 2001. 761 p.
27. Romanova T.P., Yankovskii A.P. Piecewise-linear yield loci of angle-ply reinforced medium of different-resisting rigid-plastic materials at 2D stress state. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 8. P. 1235–1252. <https://doi.org/10.3103/S0025654420080221>.
28. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 707 p. (In Russian).

**DETERMINATION OF THE UPPER LIMIT OF THE LOAD-LOADING CAPACITY
OF BENDING REINFORCED METAL-COMPOSITE RING PLATES IN CONTACT
WITH A LIQUID INCOMPRESSIBLE MEDIUM
1. PROBLEM FORMULATION AND CALCULATION METHOD***

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

lab4nemir@rambler.ru

Received by the Editor 2024/03/01

The problem of determining the load-bearing capacity of a bendable reinforced annular plate resting on an incompressible liquid base is considered. The internal opening of the structure is closed with a continuous, absolutely rigid insert. The connection between the insert and the plate can be rigid or hinged. The structure is supported on the outer edge, and it is possible to move the support in the vertical direction, for example in the case of a movable jamming. In the limiting state, liquid flow from one front surface of the plate to another surface is not allowed. The materials of the components of the composition are isotropic and rigid-plastic, having the same yield limits in tension and compression. Plastic flow in the phases of the composition is associated with piecewise linear yield criteria (such as the Tresk's or Ishlinsky - Ivlev's yield conditions). The limit state of such a composite plate is described within the framework of the classical theory of transverse bending. Reinforcement structures have axial and radial symmetry. Two reinforcement options are considered: laying two families of fibers along radially symmetrical spiral trajectories and reinforcement in the radial and circumferential directions. The reinforcing fibers are assumed to be continuous and have constant cross sections along their length, which gives rise to significant heterogeneity of the structures under consideration in the radial direction. The plastic flow of a metal-composition is calculated using a structural model that takes into account the presence of a plane stress state in all substructural elements. Structural formulas have been written that make it possible to determine the coordinates of corner points on piecewise linear yield curves of the compositions under consideration, taking into account their dependence on non-uniform reinforcement parameters: angles and densities. An extremal principle has been formulated that makes it possible to obtain an upper (kinematic) estimate of the maximum load for this type of structure. The formulated problem is discretized along the polar radius. Nodal values of the sagging speed and mechanical energy dissipation

*Completed within the framework of the state assignment (state registration No 124021400036-7).

were used as un-known grid functions. A numerical algorithm for solving the formulated discretized problem has been developed, based on the application of the simplex method of linear programming theory.

Keywords: metal-composite ring plates, incompressible liquid base, rigid insert, wire reinforcement, rigid-plastic model, load-bearing capacity, limit state, piecewise linear yield curves, numerical scheme, linear programming.