

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-3-259-269

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СВОБОДНОЙ
ТОЛСТОСТЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА УПРОЧНЕНИЯ***

© 2024 г.

Андрианов И.К., Феоктистов С.И.

*Комсомольский-на-Амуре государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация*

ivan_andrianov_90@mail.ru

Поступила в редакцию 07.02.2024

Решается обратная задача упругопластического деформирования толстостенной цилиндрической оболочки конечной длины под внутренним давлением. При заданном перемещении наружной поверхности оболочки требуется разработать численную методику для определения внутреннего давления, обеспечивающего заданное перемещение. Решаемая задача является краевой задачей смешанного типа. Исследуемая цилиндрическая оболочка находится в условиях плоского напряженного состояния и объемного деформированного состояния. Математическая постановка задачи основана на положениях деформационной теории пластичности. Деформированное состояние оболочки описывается с помощью нелинейных деформаций Генки. Построенная модель упругопластического деформирования оболочки учитывает сжимаемость материала и нелинейный закон упрочнения. Численная методика расчета построена на основе метода переменных параметров упругости с применением метода последовательных приближений при учете изменения геометрии оболочки в процессе деформирования. Для оценки адекватности построенной численной методики решения обратной задачи проведен сравнительный расчет прямой задачи упругопластического деформирования с помощью метода конечных элементов в программном комплексе ANSYS 19.0. Полученные результаты для радиальных и окружных напряжений, интенсивности напряжений, радиальных перемещений граничных поверхностей цилиндрической оболочки при внутреннем давлении, рассчитанном при решении обратной упругопластической задачи, показали достаточную сходимость. Картины распределения напряжений в стенке цилиндрической оболочки, согласно методу переменных параметров упругости и методу конечных элементов, качественно близки. Различия в количественных результатах, полученных согласно двум подходам, составляют не более 10%. Предложенная методика может быть использована в области авиастроения с целью расчета требуемого давления при деформировании цилиндрических оболочек до требуемой геометрии с учетом физической и геометрической нелинейностей материала при условии монотонного нагружения.

* Выполнено за счет гранта РНФ № 22-79-10114, <https://rscf.ru/project/22-79-10114/>.

Ключевые слова: свободная труба, цилиндрическая оболочка конечной длины, упругопластическое деформирование, нелинейная пластичность, сжимаемость материала, метод переменных параметров упругости.

Введение

Толстостенные осесимметричные оболочки имеют широкое применение в различных отраслях производственной сферы, особенно в области авиакосмической промышленности для создания жестких оболочек, выдерживающих значительные нагрузки и обеспечивающих надежную и устойчивую работу конструкций. Большое количество работ посвящено исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) стесненных цилиндрических оболочек, нагружаемых внутренним давлением и осевой силой [1–4]. Вопросам упругопластического деформирования свободных труб или цилиндрических оболочек конечной длины уделено меньше внимания, при этом такие оболочки находятся в условиях объемного деформированного состояния. Некоторые задачи о нагружении труб конечной длины рассмотрены в публикациях [5–7].

Во многих исследованиях при решении задач о деформировании цилиндрических оболочек используется теория пластического течения на примере жесткопластической модели материала без учета влияния на процесс деформирования упругой составляющей деформации, а также сжимаемости материала. Также достаточно широко используется допущение об идеальной пластичности, в исследованиях [8–10] рассмотрена модель материала без упрочнения. Деформирование цилиндрических оболочек при линейном упрочнении исследовано в трудах [3, 11]. Определяющие соотношения при исследовании НДС цилиндрических оболочек под действием внутреннего давления отражены в исследованиях [12–16]. Вопросы комбинированного нагружения цилиндрических оболочек с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением рассмотрены в статье [17].

Многие программные пакеты, основанные на методе конечных элементов, позволяют решать прямые задачи упругопластического деформирования: при заданных внешних нагрузках определяются деформации и перемещения исследуемого тела. Решение же обратных задач представляется более трудоемким процессом, и возможность такого решения представлена не во всех CAE-системах и только для отдельных типов задач, что обуславливает актуальность исследуемой проблемы.

Методика исследования

Рассмотрим свободную толстостенную цилиндрическую оболочку (рис. 1) с начальными значениями радиусов внутренней r_0 и наружной R_0 поверхностей до деформирования.

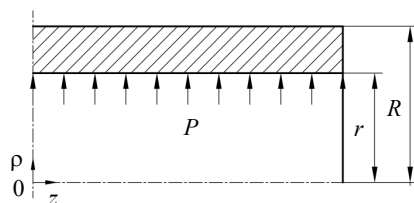


Рис. 1. Свободная толстостенная цилиндрическая оболочка под внутренним давлением

Для заданного радиального перемещения наружного края оболочки u_p^* требуется определить внутреннее давление p , обеспечивающее заданное перемещение. Наружная поверхность и торцы оболочки свободны от внешних нагрузок, оболочка находится в условиях плоского напряженного состояния $\sigma_z = 0$ и объемного деформированного состояния.

Решение задачи проводится в цилиндрической системе координат $O\rho\theta z$ с использованием положений деформационной теории пластичности [18] при следующих допущениях:

- материал оболочки принимается сжимаемым, то есть коэффициент Пуассона $\mu \neq 0,5$;
- в качестве меры деформации рассматриваются деформации Генки;
- выполняется гипотеза «единой кривой», упругопластические свойства материала описываются линейно-степенной аппроксимацией диаграммы деформирования III рода с учетом сжимаемости материала;
- переход материала оболочки из состояния упругого деформирования в пластическое определяется условием пластичности Губера – Мизеса;
- принцип отвердения не выполняется, уравнения равновесия записываются для деформированного состояния;
- условие совместности деформаций Генки записывается в координатах Эйлера.

Для решения задачи осесимметричного НДС свободной толстостенной цилиндрической оболочки используется метод переменных параметров упругости, в котором постановка задачи упругопластического деформирования оболочки описывается соотношениями:

- уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_\rho}{d\rho} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ – радиальные и окружные напряжения, ρ – радиальная координата элемента оболочки в деформированном состоянии;

- геометрические соотношения и уравнение совместности деформаций [19]

$$e_\rho = \ln\left(\frac{du_\rho}{d\zeta} + 1\right), \quad e_\theta = \ln\left(\frac{u_\rho}{\zeta} + 1\right), \quad \frac{de_\theta}{d\rho} = \frac{1 - \exp(e_\theta - e_\rho)}{\rho}, \quad (2)$$

где e_ρ, e_θ, e_z – радиальные, окружные и осевые деформации Генки, $u_\rho = \rho - \zeta$ – радиальное перемещение, ζ – радиальная координата элемента оболочки до деформации;

- физические уравнения в форме обобщенного закона Гука

$$e_\rho = \frac{1}{E^*}(\sigma_\rho - \mu^* \sigma_\theta), \quad e_\theta = \frac{1}{E^*}(\sigma_\theta - \mu^* \sigma_\rho), \quad e_z = -\frac{\mu^*}{E^*}(\sigma_\rho + \sigma_\theta), \quad (3)$$

где E^*, μ^* – переменные параметры упругости,

$$E^* = \frac{E_{\text{сек}}}{1 + (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}}, \quad \mu^* = \frac{0,5 - (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}}{1 + (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}}, \quad (4)$$

$E_{\text{сек}} = \sigma_i / e_i$ – секущий модуль, E – модуль упругости первого рода, μ – коэффициент поперечной деформации; интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций Генки e_i записываются в виде

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_\rho^2 - \sigma_\rho \sigma_\theta + \sigma_\theta^2},$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_\rho - e_\theta)^2 + (e_\theta - e_z)^2 + (e_z - e_\rho)^2}; \quad (5)$$

– условие пластичности Губера – Мизеса

$$\sigma_i = \sigma_T, \quad (6)$$

где σ_T – предел текучести;

– зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций Генки, согласно диаграмме деформирования $\sigma_i = \Phi(e_i)$,

$$\Phi(e_i) = \begin{cases} 3Ge_i & \text{при } e_i < e_{iT}, \\ a(e_i - e_0)^n & \text{при } e_i \geq e_{iT}, \end{cases} \quad (7)$$

где a, e_0, n – константы материала, e_{iT} – интенсивность деформаций Генки, соответствующая переходу в стадию пластического деформирования;

– граничные условия на наружной поверхности оболочки

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=R^*} = 0, \quad (8)$$

$$u_\rho \Big|_{\rho=R^*} = R^* - R_0, \quad (9)$$

где R^* – заданное значение наружного радиуса цилиндрической оболочки после деформирования.

Соотношение (7) представляет собой аппроксимацию диаграммы деформирования по двум точкам со сдвигом степенной функции. Для поиска констант материала a, e_0, n требуется решение системы уравнений, определяемой условием прохождения диаграммы деформирования через точку, соответствующую условному пределу текучести; условием прохождения диаграммы через точку, соответствующую началу шейкообразования; условием, определяющим точку перехода линейной зависимости в степенную; условием равенства первой производной степенной функции и коэффициента наклона прямой, соответствующей упругому деформированию, в точке перехода. Эта система не имеет аналитического решения и может быть решена численно с применением итерационных процедур согласно предложенной в [20] методике.

Представленная постановка задачи относится к краевой задаче смешанного типа. Решение системы (1)–(9) позволит определить НДС оболочки при заданном перемещении наружного края оболочки, и, соответственно, найти искомое внутреннее давление из условия на внутренней границе оболочки, обеспечивающее заданное перемещение:

$$\sigma_\rho \Big|_{\rho=r} = -p, \quad (10)$$

где r – радиус внутренней поверхности оболочки после деформации.

Учитывая, что $e_\theta \Big|_{\rho=R^*} = \ln(R^*/R_0)$ согласно (2), (9), запишем уравнение совместности деформаций (2) в интегральной форме

$$e_0 = \ln \left(-\rho \int_{R^*}^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp(2e_\theta - e_\rho) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (11)$$

Из соотношения (3) и уравнения равновесия (1) в интегральной форме следует, что уравнение совместности деформаций (11) в напряжениях для свободной толсто-стенной цилиндрической оболочки имеет вид

$$\sigma_{\theta} = \frac{\mu^*}{\rho} \times \int_{R^*}^{\rho} \sigma_{\theta} d\rho + E^* \ln \left(-\rho \int_{R^*}^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left(\frac{1}{E^*} \left[(2 + \mu^*) \sigma_{\theta} - \frac{1 + 2\mu^*}{\rho} \int_{R^*}^{\rho} \sigma_{\theta} d\rho \right] \right) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right). \quad (12)$$

Для проведения численного расчета строится сетка в радиальном направлении стенки оболочки. Решение системы уравнений проводится итерационно с перестроением сетки:

$$\rho_i^{(j)} = R^* - i\Delta\rho^{(j)}, \quad \Delta\rho^{(j)} = \frac{1}{N}(R^* - r^{(j)}), \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (13)$$

где i – номер узла в радиальном направлении, $N + 1$ – количество узлов, j – номер итерации.

В начальном приближении радиальная координата внутренней поверхности оболочки после деформирования принимается как $r^{(0)} = r_0$. На фиксированной итерации $j = \text{const}$ численное решение уравнения (12) ищем в последовательных приближениях, тогда итерационный процесс при $\rho_i^{(j)} = \rho$ запишется в виде:

$$\sigma_{\theta}^{(k+1)} = \frac{\mu^{*(k)}}{\rho} \int_{R^*}^{\rho} \sigma_{\theta}^{(k)} d\rho + E^{*(k)} \times \ln \left(-\rho \int_{R^*}^{\rho} \frac{1}{\rho^2} \exp \left(\frac{1}{E^{*(k)}} \left[(2 + \mu^{*(k)}) \sigma_{\theta}^{(k)} - \frac{1 + 2\mu^{*(k)}}{\rho} \int_{R^*}^{\rho} \sigma_{\theta}^{(k)} d\rho \right] \right) d\rho + \frac{\rho}{R_0} \right), \quad (14)$$

$$\sigma_{\rho}^{(k+1)} = \frac{1}{\rho} \int_{R^*}^{\rho} \sigma_{\theta}^{(k+1)} d\rho, \quad \sigma_i^{(k+1)} = [(\sigma_{\rho}^{(k+1)})^2 - \sigma_{\rho}^{(k+1)} \sigma_{\theta}^{(k+1)} + (\sigma_{\theta}^{(k+1)})^2]^{1/2}, \quad (15)$$

$$e_i^{(k+1)} = \frac{2}{3} \frac{1 + \mu^{*(k)}}{E^{*(k)}} \sigma_i^{(k+1)}, \quad E_{\text{сек}}^{(k+1)} = \frac{\Phi(e_i^{(k+1)})}{e_i^{(k+1)}}, \quad (16)$$

$$E^{*(k+1)} = \frac{E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}^{(k+1)}}, \quad \mu^{*(k+1)} = \frac{0,5 - (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}^{(k+1)}}{1 + (1 - 2\mu)/(3E) \cdot E_{\text{сек}}^{(k+1)}}, \quad (17)$$

где k – номер итерации.

Условие окончания итерационного процесса:

$$\frac{\sigma_i^{(k+1)} - \sigma_i^{(k)}}{\sigma_i^{(k+1)}} \leq \delta, \quad (18)$$

где δ – заданная точность расчета.

При выполнении условия (18) на k -й итерации определяется радиальная координата внутренней поверхности оболочки после деформирования по результатам расчета НДС оболочки согласно второму итерационному процессу:

$$r^{(j+1)} = r_0 \exp \left(e_{\theta}^{(j)} \Big|_{\rho=\rho_N^{(j)}} \right), \quad (19)$$

$$e_{\theta}^{(j)} \Big|_{\rho=\rho_N^{(j)}} = \frac{1}{E^{*(n)}} (\sigma_{\theta}^{(n)} - \mu^{*(n)} \sigma_{\rho}^{(n)}) \Big|_{\rho=\rho_N^{(j)}}. \quad (20)$$

Итерационные процессы (14)–(18) и (19), (20) повторяются с учетом перестроения сетки (13) при новом положении внутренней поверхности оболочки согласно (19) до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\frac{r^{(j+1)} - r^{(j)}}{r^{(j+1)}} \leq \delta. \quad (21)$$

Результаты исследования

В качестве примера расчета рассмотрим толстостенную цилиндрическую оболочку с геометрическими характеристиками $r_0 = 50$ мм, $R_0 = 100$ мм. Линейно-степенная упругопластическая модель материала определяется константами для сплава АМГ6м: $E = 69580$ МПа, $\sigma_T = 147$ МПа, $\mu = 0,32$, $a = 571,9$ МПа, $e_0 = 7,8 \cdot 10^{-4}$, $n = 0,23$. Радиальное перемещение наружной поверхности оболочки задано равным 1 мм. По результатам расчета обратной задачи согласно соотношениям (13)–(21) перемещение в 1 мм наружного края оболочки обеспечивается при внутреннем давлении $p = 165,75$ МПа. Радиальная координата внутренней поверхности оболочки после деформации составила $r = 51,66$ мм. Для оценки адекватности решения обратной задачи с помощью предложенной численной методики проведен прямой расчет свободной цилиндрической оболочки с помощью метода конечных элементов в ANSYS 19.0 при давлении $p = 165,75$ МПа. В силу симметрии геометрическая модель представляла собой четверть цилиндрической оболочки. Упругопластическая модель материала строилась согласно соотношению (7). При этом степенная кривая упрочнения задавалась в ANSYS дискретно с шагом 10^{-4} по деформациям. Результаты расчета радиальных, окружных напряжений и интенсивности напряжений методом конечных элементов представлены на рис. 2–4, а результаты расчета радиальных перемещений в стенке оболочки – на рис. 5.

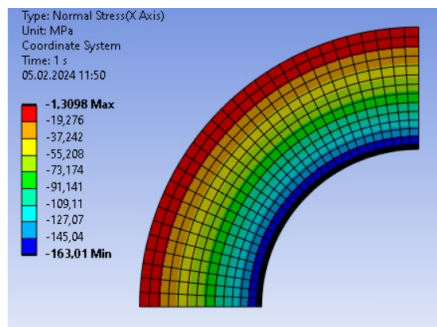


Рис. 2. Радиальные напряжения в стенке свободной цилиндрической оболочки

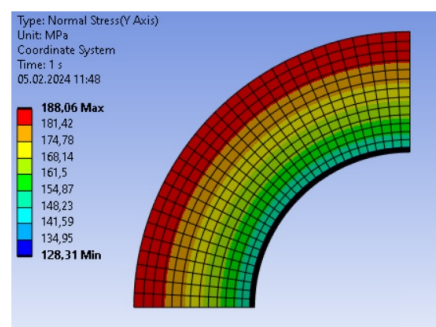


Рис. 3. Окружные напряжения в стенке свободной цилиндрической оболочки

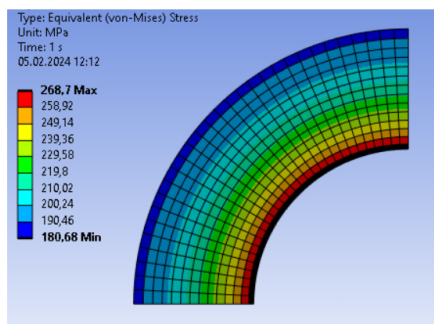


Рис. 4. Интенсивность напряжений в стенке свободной цилиндрической оболочки

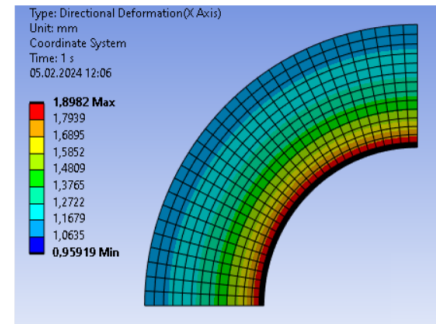


Рис. 5. Радиальные перемещения в стенке свободной цилиндрической оболочки

Сравнительные результаты изменения напряженного состояния в стенке цилиндрической оболочки на основе решения обратной и прямой упругопластических задач представлены на рис. 6, где кривые 1 соответствуют расчетам по методу переменных параметров упругости, 2 – по методу конечных элементов для радиальных напряжений (а), окружных напряжений (б) и интенсивности напряжений (в).

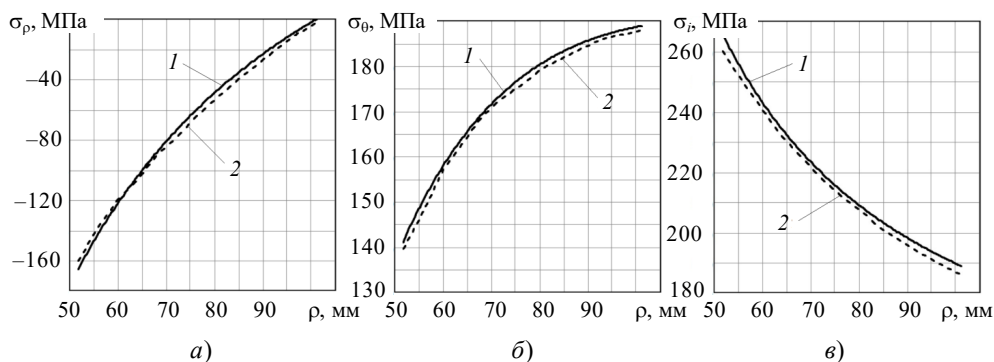


Рис. 6. Изменение напряженного состояния толстостенной свободной оболочки в радиальном направлении

Обсуждение результатов исследования

Согласно результатам расчета обратной упругопластической задачи методом переменных параметров упругости при заданном перемещении 1 мм наружной поверхности оболочки, радиальное перемещение внутренней поверхности составило 1,66 мм. При решении прямой задачи нагружения оболочки внутренним давлением с помощью метода конечных элементов радиальное перемещение наружной поверхности оболочки составило 1,08 мм, а внутренней поверхности – 1,78 мм (см. рис. 5). Расхождение в результатах расчета составило около 7%. Согласно сравнению напряженного состояния оболочки при решении обратной и прямой задач методом переменных параметров упругости и методом конечных элементов напряжений в стенке оболочки, картина распределения напряжений в радиальном направлении одинакова: наибольшие по абсолютной величине радиальные напряжения достигаются на внутренней поверхности, а наибольшие окружные напряжения – на наружной поверхности оболочки. Расхождения в числовых результатах расчетов напряженного состояния не превышают 10%.

Заключение

Предложено решение обратной задачи упругопластического деформирования толстостенной свободной цилиндрической оболочки с учетом сжимаемости материала и нелинейного закона упрочнения. Созданная авторами численная методика на основании метода переменных параметров упругости позволяет рассчитать внутреннее давление, при котором происходит заданное перемещение наружного края оболочки. Сравнение результатов решения обратной задачи с результатами расчета прямой задачи методом конечных элементов подтверждает адекватность построенной численной методики и итерационных процедур. Результаты исследования могут быть использованы в оценке параметров силового нагружения при деформировании цилиндрических оболочек до требуемой геометрии. Следует отметить, что описанная методика

на основании положений деформационной теории пластичности справедлива только для случаев монотонного пропорционального нагружения.

Список литературы

1. Kardomateas G.A. Elasticity solutions for sandwich orthotropic cylindrical shells under external/internal pressure or axial force. *AIAA Journal*. 2001. Vol. 39. No 4. P. 713–719. DOI: 10.2514/2.1366.
2. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Осетров С.Л., Осетров Д.Л., Рябов А.А. Анализ предельных состояний цилиндрических упругопластических оболочек при растяжении и комбинированном нагружении внутренним давлением и растяжением. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. №2. С. 39–48. DOI: 10.15593/pern.mech/2022.2.04.
3. Дильман В.Л., Карпета Т.В. Критические состояния тонкостенных цилиндрических оболочек с кольцевыми швами при осевом сжатии и внутреннем давлении. *Челябинский физико-математический журнал*. 2023. Т. 8. Вып. 4. С. 568–579. DOI: 10.47475/2500-0101-2023-8-4-568-579.
4. Vaziri A., Estekanchi H. Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression. *Thin-Walled Structures*. 2006. Vol. 44. P. 141–151. DOI: 10.1016/j.tws.2006.02.004.
5. Нетребко А.В., Пшеничных С.Г. Некоторые задачи динамики линейно-вязкоупругих цилиндрических оболочек конечной длины. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. №1. С. 14–22. DOI: 10.32326/1814-9146-2015-77-1-14-22.
6. Galiev S.U., Khudoynazarov K., Abdirashidov A., Abdurashidov A.A. Nonlinear elastoplastic deformation of a hollow cylindrical shell of finite length under influence of internal pulse loading. *Theoretical & Applied Science*. 2018. Vol. 66. Iss. 10. P. 248–255. DOI: 10.15863/TAS.2018.10.66.28.
7. Dong Qi, Li Q.M., Zheng J. Strain growth in a finite-length cylindrical shell under internal pressure pulse. *Journal of Pressure Vessel Technology*. 2017. Vol. 139. Iss. 2. P. 021213-1 – 021213-9. DOI: 10.1115/1.4035696.
8. Nepershin R.I. Ideal plastic deformation of thick-walled tubes. *AIP Conference Proceedings*. 2015. Vol. 1648. Iss. 1. Article No 240004. DOI: 10.1063/1.4912503.
9. Рычков, Б.А., Чыныбаев М.К., Резин П.М. Определяющие соотношения при расчете толстостенных труб. *Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова*. 2016. Т. 1. Вып. 39. С. 171–175.
10. Шевченко М.Ю. Расчет прочности толстостенной трубы при упругих и упруго-пластических деформациях. *Избр. докл. 64-й университетской науч.-техн. конф. студентов и молодых ученых*. Томск, 24 апр. 2018 г. Томск: ТГАСУ, 2018. С. 119–124.
11. Kilikovskaya O.A., Ovchinnikova N.V. Influence of the material hardening and compressibility on the solution of elastoplastic deformation problems for a space with a cylindrical cavity. *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47. P. 57–70. DOI: 10.3103/S0025654412010050.
12. Шевченко М.Ю., Барашков В.Н. Теоретические основы анализа упругопластического напряженного состояния толстостенной трубы под действием внутреннего давления. *Избр. докл. 63-й университетской науч.-техн. конф. студентов и молодых ученых*. Томск, 20 апр. 2017 г. Томск: ТГАСУ, 2017. С. 80–85.
13. Барашков В.Н., Шевченко М.Ю. Упругопластическое напряженно-деформированное состояние и прочность толстостенной трубы при действии внутреннего давления. *VIII Всерос. молодеж. науч. конф. «Актуальные проблемы современной механики сплошных сред и небесной механики – 2018»: Матер. конф.* Томск, 26–28 нояб. 2018 г. Томск: ЗАО «Издательство «Красное знамя», 2019. С. 81–84.
14. Юдин А.С., Сигаева Т.В., Юдин С.А. Большие деформации цилиндрической оболочки при нагружении внутренним давлением. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 2012. №6(172). С. 49–53.
15. Filatov N.V. Optimum design of reinforced cylindrical shells under combined axial compression and internal pressure. *Journal of Mechanical Engineering*. 2021. Vol. 24. Iss. 2. P. 50–58. DOI: 10.15407/pmach2021.02.050.

16. Chitti R., Busakala V.K., Karanam A.S. et al. Design and failure analysis of cylindrical shells due to explosive loads. *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 391. Article No 01044. DOI: 10.1051/e3sconf/202339101044.

17. Баженов В.Г., Артемьева А.А. Исследование больших упругопластических деформаций цилиндрических оболочек при комбинированных нагружениях внутренним давлением и кручением. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76. №3. С. 217–223. DOI: 10.32326/1814-9146-2014-76-3-217-223.

18. Феоктистов С.И., Андрианов И.К., Тхет Л. Моделирование напряженно-деформированного состояния толстостенных цилиндрических оболочек с учетом физической нелинейности материала. *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета*. 2022. №3(59). С. 12–20. DOI: 10.17084/20764359-2022-59-12.

19. Феоктистов С.И., Андрианов И.К. Уравнения совместности логарифмических деформаций в координатах Эйлера для решения осесимметричных процессов обработки металлов давлением. *Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета*. 2021. №7(55). С. 26–30. DOI: 10.17084/20764359-2021-55-26.

20. Андрианов И.К., Феоктистов С.И. *Основы построения диаграмм деформирования с учетом сжимаемости материала и эффекта Баушингера*. Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре государственный университет, 2022. 103 с. DOI: 10.17084/978-5-7765-1479-1-2022.

References

1. Kardomateas G.A. Elasticity solutions for sandwich orthotropic cylindrical shells under external/internal pressure or axial force. *AIAA Journal*. 2001. Vol. 39. No 4. P. 713–719. DOI: 10.2514/2.1366.

2. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Osetrov S.L., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Analiz predelnykh sostoyaniy tsilindricheskikh uprugoplasticheskikh obolochek pri rastyazhenii i kombinirovannom nagruzhении vnutrennim davleniem i rastyazheniem [Analysis of the limiting states of cylindrical elastic-plastic shells under tension and combined loading by internal pressure and tension]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2022. No 2. P. 39–48 (In Russian).

3. Dilman V.L., Karpeta T.V. Kriticheskie sostoyaniya tonkostennykh tsilindricheskikh obolochek s koltsevymi shvami pri osevom szhatii i vnutrennem davlenii [Critical states of thin-walled cylindrical shells with annular seams under axial compression and internal pressure]. *Chelyabinskiiy fiziko-matematicheskiiy zhurnal [Chelyabinsk Physics and Mathematics Journal]*. 2023. Vol. 8. Iss. 4. P. 568–579 (In Russian).

4. Vaziri A., Estekanchi H. Buckling of cracked cylindrical thin shells under combined internal pressure and axial compression. *Thin Wall. Struct.* 2006. Vol. 44. P. 141–151. DOI: 10.1016/j.tws.2006.02.004.

5. Netrebko A.V., Pshenichnov S.G. Nekotorye zadachi dinamiki lineynno-vyazkouprugikh tsilindricheskikh obolochek konechnoy dliny [Some dynamic problems for linearly viscoelastic cylindrical finite length shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 1. P. 14–22 (In Russian).

6. Galiev S.U., Khudoynazarov K., Abdurashidov A., Abdurashidov A.A. Nonlinear elasto-plastic deformation of a hollow cylindrical shell of finite length under influence of internal pulse loading. *Theoretical & Applied Science*. 2018. Vol. 66. Iss. 10. P. 248–255. DOI: 10.15863/TAS.2018.10.66.28.

7. Dong Qi, Li Q.M., Zheng J. Strain growth in a finite-length cylindrical shell under internal pressure pulse. *J. Press. Vessel Technol.* 2017. Vol. 139. Iss. 2. P. 021213-1 – 021213-9. DOI: 10.1115/1.4035696.

8. Nepershin R.I. Ideal plastic deformation of thick-walled tubes. *AIP Conference Proceedings*. 2015. Vol. 1648. Iss. 1. Article No 240004. DOI: 10.1063/1.4912503.

9. Rychkov, B.A., Chynybaev M.K., Rezin P.M. Opredelyayushchie sootnosheniya pri raschete tolstostennykh trub [Determining ratios in the calculation of thick-walled pipes]. *Izvestiya Kyrgyzskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. I. Razzakova [News*

of the Kyrgyz State Technical University named after I. Razzakov]. 2016. Vol. 1. Iss. 39. P. 171–175 (In Russian).

10. Shevchenko M.Yu. Raschet prochnosti tolstostennoy truby pri uprugikh i uprugoplasticheskikh deformatsiyakh [Calculation of the strength of a thick-walled pipe under elastic and elastoplastic deformations]. *Izbrannye doklady 64 universitetskoy nauchno-tekhni-cheskoy konferentsii studentov i molodykh uchenykh* [Selected Reports of the 64th University Scientific and Technical Conference of Students and Young Scientists: Collection of Reports]. Tomsk, 24 Apr. 2018. Tomsk. TGASU Publ. 2018. P. 119–124 (In Russian).

11. Kilikovskaya O.A., Ovchinnikova N.V. Influence of the material hardening and compressibility on the solution of elastoplastic deformation problems for a space with a cylindrical cavity. *Mechanics of Solids*. 2012. Vol. 47. P. 57–70. DOI: 10.3103/S0025654412010050.

12. Shevchenko M.Yu., Barashkov V.N. Teoreticheskie osnovy analiza uprugoplasticheskogo napryazhennogo sostoyaniya tolstostennoy truby pod deystviem vnutrennego davleniya [Theoretical foundations of the analysis of the elastic-plastic stress state of a thick-walled pipe under the influence of internal pressure]. *Izbrannye doklady 63 universitetskoy nauchno-tekh-nicheskoy konferentsii studentov i molodykh uchenykh* [Selected reports of the 63rd University Scientific and Technical Conference of Students and Young Scientists]. Tomsk, 20 Apr. 2017. Tomsk. TGASU Publ. 2017. P. 80–85 (In Russian).

13. Barashkov V.N., Shevchenko M.Yu. Uprugoplasticheskoe napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie i prochnost tolstostennoy truby pri deystvii vnutrennego davleniya [Elastoplastic stress-strain state and strength of thick-walled pipe under the action of internal pressure]. *VIII Vserossiyskaya molodezhnaya nauchnaya konferentsiya “Aktualnye problemy sovremennoy mekhaniki sploshnykh sred i nebesnoy mekhaniki – 2018”: Materialy konferentsii [VIII All-Russian Youth Scientific Conference “Actual Problems of Modern Continuum Mechanics and Celestial Mechanics – 2018”: Conference proceedings]* Tomsk, 26–28 Nov. 2018. Tomsk. CJSC “Krasnoe znanya Publ”. 2019. P. 81–84 (In Russian).

14. Yudin A.S., Sigaeva T.V., Yudin S.A. Bolshie deformatsii tsilindricheskoy obolochki pri nagruzhении vnutrennim davleniem [Large deformations of the cylindrical shell under internal pressure loading]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki* [Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences]. 2012. No 6 (172). P. 49–53 (In Russian).

15. Filatov H.V. Optimum design of reinforced cylindrical shells under combined axial compression and internal pressure. *J. Mech. Eng.* 2021. Vol. 24. Iss. 2. P. 50–58. DOI: 10.15407/pmach2021.02.050.

16. Chitti R., Busakala V.K., Karanam A.S. et al. Design and failure analysis of cylindrical shells due to explosive loads. *E3S Web of Conferences*. 2023. Vol. 391. Article No 01044. DOI: 10.1051/e3sconf/202339101044.

17. Bazhenov V.G., Artemyeva A.A. Issledovanie bolshikh uprugoplasticheskikh deformatsiy tsilindricheskikh obolochek pri kombinirovannykh nagruzheniyyakh vnutrennim davleniem i krucheniem [Analysis of large elastoplastic deformations for cylindrical shells under combined loading of inner pressure and torsion]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2014. Vol. 76. No 3. P. 217–223 (In Russian).

18. Feoktistov S.I., Andrianov I.K., Tkhet L. Modelirovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya tolstostennykh tsilindricheskikh obolochek s uchedom fizicheskoy nelineynosti materiala [Modeling of the stress-strain state of thick-walled cylindrical shells taking into account physical nonlinearity of the material]. *Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2022. No 3(59). P. 12–20 (In Russian).

19. Feoktistov S.I., Andrianov I.K. Uravneniya sovместnosti logarifmicheskikh deformatsiy v koordinatakh Eylera dlya resheniya osesimmetrichnykh protsessov obrabotki metallov davleniem [Equations of joint logarithmic deformations in Euler coordinates for solving axisymmetric pressure metal processes]. *Uchenye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2021. No 7(55). P. 26–30 (In Russian).

20. Andrianov I.K., Feoktistov S.I. *Osnovy postroeniya diagramm deformirovaniya s uchedom szhimaemosti materiala i efekta Baushingera* [The Basics of Constructing Deformation

Diagrams Taking into Account the Compressibility of the Material and the Bauschinger Effect]. Komsomolsk-na-Amure. Komsomolsk-na-Amure State University Publ. 2022. 103 p. (In Russian).

**INVERSE PROBLEM OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMATION
OF A FREE THICK-WALLED CYLINDRICAL SHELL
TAKING INTO ACCOUNT THE NONLINEAR LAW OF HARDENING***

Andrianov I.K., Feoktistov S.I.

Komsomolsk-na-Amure State University, Komsomolsk-na-Amure, Russian Federation

ivan_andrianov_90@mail.ru

Received by the Editor 2024/02/07

The inverse problem of elastoplastic deformation of a thick-walled cylindrical shell of finite length under internal pressure is solved. For a given displacement of the outer surface of the shell, it was necessary to construct a numerical technique to determine the internal pressure providing this displacement. The problem being solved is a boundary value problem of a mixed type. The cylindrical shell under study is in a plane stress state and a volumetric deformed state. The mathematical formulation of the problem was based on the provisions of the deformation theory of plasticity. The strain state of the shell was described using nonlinear Hencky strains. The constructed model of elastic-plastic deformation of the shell took into account the compressibility of the material and the nonlinear law of hardening. The numerical calculation method is based on the method of variable elasticity parameters using the method of successive approximations, taking into account changes in the geometry of the shell during deformation. To assess the adequacy of the constructed numerical method for solving the inverse problem, a comparative calculation of the direct problem of elastoplastic deformation using the finite element method in the ANSYS 19.0 software package was carried out. The results obtained for radial and circumferential stresses, stress intensity, radial displacements of the boundary surfaces of a cylindrical shell at internal pressure calculated when solving the inverse elastoplastic problem showed sufficient consistency. The stress distribution patterns in the cylindrical shell wall according to the method of variable elasticity parameters and the finite element method are qualitatively the same. The differences in the quantitative results obtained according to the two approaches are no more than 10%. The proposed calculation method can be used in the field of aircraft engineering in order to calculate the required pressure when deforming cylindrical shells to the required geometry, taking into account the physical and geometric nonlinearities of the material under the condition of monotonic loading.

Keywords: free tube, cylindrical shell of finite length, elastoplastic strain, nonlinear plasticity, compressibility of the material, method of variable elasticity parameters.

* Completed at the expense of the grant from the Russian Science Foundation No 22-79-10114, <https://rscf.ru/project/22-79-10114/>.