

УДК 539.3

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ В КРАТНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ И ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

О.А. Сергеев, В.Г. Киселев

*Нижний Новгород*

Представлен метод для определения значений управляемых параметров геометрически нелинейной конструкции, соответствующих минимальной массе конструкции при ограничениях на кратную критическую нагрузку потери устойчивости и на предельные значения управляемых параметров. Предполагается, что на нелинейную упругую конструкцию действуют консервативные нагрузки. Для вычисления нелинейных перемещений используются методы последовательных нагружений, обобщенных перемещений и длины дуги. Сингулярность касательной матрицы жесткости трактуется как общая потеря устойчивости конструкции. Предлагается аналитический анализ чувствительности кратной критической нагрузки потери устойчивости для предельной точки и точки бифуркации, и анализ чувствительности нелинейных перемещений. Эффективность предлагаемого метода демонстрируется на примерах оптимального проектирования пространственной фермы с двукратной и трехкратной точками бифуркации.

### 1. Постановка задачи оптимизации

Требуется определить такие значения управляемых  $\mathbf{X}^*$  из области допустимых значений  $F$ , для которых масса конструкции минимальна:

$$W(\mathbf{X}^*) = \min_{\mathbf{X} \in F} W(\mathbf{X}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{X}$  – вектор управляемых параметров.

Область допустимых значений  $F$  определяется следующими ограничениями:

– на кратную критическую нагрузку потери устойчивости конструкции

$$\Lambda^c(\mathbf{X}) \geq \Lambda^d, \quad (2)$$

где  $\Lambda^c$  – кратный критический множитель внешней консервативной нагрузки  $\mathbf{P}_0$ , при превышении которого конструкция теряет устойчивость;  $\Lambda^d$  – рабочий уровень нагрузки  $\mathbf{P}_0$ ;

– на предельные значения управляемых параметров

$$\mathbf{X}_{\min} \leq \mathbf{X} \leq \mathbf{X}_{\max}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{X}_{\min}$  и  $\mathbf{X}_{\max}$  – нижние и верхние значения для параметров проектирования.

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим нелинейную упругую конструкцию, для которой полная потенциальная энергия  $\Pi(\mathbf{u}, \Lambda, X)$  зависит от вектора нелинейных перемещений  $\mathbf{u}$ , множителя нагрузки  $\Lambda$ , варьируемого параметра  $X$ . Для упрощения уравнений рассмотрим конструкцию с одним варьируемым параметром  $X$ . Уравнения равновесия для такой конструкции имеют вид:

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, X) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}_i} = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{r}(\mathbf{u}, \Lambda, X)$  – вектор невязки или вектор неуравновешенных сил, если вектор перемещений  $\mathbf{u}$  не является истинным.

Рассмотрим кривую деформирования (равновесную кривую) в зависимости от значения варьируемого параметра  $X$  в  $(n+1)$ -размерном пространстве  $(\mathbf{u}, \Lambda)$ . Параметрические уравнения кривой деформирования запишем в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(t), \quad \Lambda = \Lambda(t), \quad (5)$$

где  $t$  – параметр продвижения вдоль кривой деформирования.

Можно рассмотреть три альтернативы для выбора параметра  $t$ : 1)  $t = \Lambda$ ; 2)  $t = u_i$ ; 3)  $t = s$ , где  $s$  – длина кривой деформирования.

Важно отметить, что параметрическая форма (5) не подходит для критических точек, где пересекаются две или более кривых.

Дифференцируя уравнение равновесия (4) по параметру продвижения  $t$ , можно записать

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_\Lambda \dot{\Lambda} = 0, \quad (6)$$

где точка сверху и нижний индекс обозначают соответственно дифференцирование по  $t$  и частную производную по  $\Lambda$ ,  $\mathbf{r}_\Lambda = -\mathbf{P}_0$  – вектор внешних консервативных нагрузок,  $\mathbf{K} = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{u}$  – касательная матрица жесткости.

Дифференцируя (6) два раза, получаем еще два уравнения:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{r}}_\Lambda \dot{\Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda} \ddot{\Lambda} = 0, \quad (7)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{K}\ddot{\mathbf{u}} + 2\dot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{K}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda} \ddot{\Lambda} + 2\dot{\mathbf{r}}_\Lambda \dot{\Lambda} + \ddot{\mathbf{r}}_\Lambda \dot{\Lambda} = 0, \quad (8)$$

где  $\dot{\mathbf{K}} = (\partial \mathbf{K} / \partial \mathbf{u}) \dot{\mathbf{u}} + (\partial \mathbf{K} / \partial \Lambda) \dot{\Lambda} = \mathbf{L}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}\dot{\Lambda}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_\Lambda = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda} \dot{\Lambda}$ ,  $\mathbf{L}$  – пакет матриц,  $\ddot{\mathbf{K}} = \dot{\mathbf{L}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}\ddot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{N}}\dot{\Lambda} + \mathbf{N}\ddot{\Lambda}$ ,  $\ddot{\mathbf{r}}_\Lambda = \dot{\mathbf{N}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{r}}_{\Lambda\Lambda} \dot{\Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda\Lambda} \ddot{\Lambda}$ .

Уравнение (6) может быть использовано для отслеживания кривой деформирования в  $(n + 1)$ -размерном пространстве  $(\mathbf{u}, \Lambda)$  по известной формуле

$$\mathbf{u}_{(s+1)} = \mathbf{u}_{(s)} + \dot{\mathbf{u}}_{(s)} \Delta t. \quad (9)$$

Однако в некоторых точках кривой деформирования касательная матрица  $\mathbf{K}$  является сингулярной и нахождение вектора  $\dot{\mathbf{u}}_{(s)}$  из (6) и соответственно применение (9) невозможно.

### 3. Условие потери устойчивости

Сингулярность касательной матрицы  $\mathbf{K}$  трактуется как потеря устойчивости конструкции. Соответствующие точки  $(\mathbf{u}^c, \Lambda^c)$  кривой деформирования называются критическими точками, а достигнутый множитель нагрузки  $\Lambda^c(X)$  называется критическим. Следовательно, критическая точка определяется с использованием условия:

$$\det[\mathbf{K}(\mathbf{u}^c, \Lambda^c, X)] = 0. \quad (10)$$

Альтернативным подходом для определения критической точки является равенство нулю первого собственного значения касательной матрицы жесткости, которое является решением следующей проблемы собственных значений:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^c, \Lambda^c, X)\Phi_1 = 0, \quad (11)$$

где  $\Phi_1$  – первая форма потери устойчивости конструкции.

### 4. Классификация кратных критических точек

Для простоты рассмотрим двукратное собственное значение  $\lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda} = 0$ . Для двукратной критической точки имеется бесконечное множество собственных векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , то есть они не являются уникальными. Любая линейная комбинация  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  будет удовлетворять проблеме собственных значений (11). Используем такие собственные векторы  $\tilde{\Phi}$ , которые остаются дифференцируемыми по варьируемому параметру  $X$ . Для этой цели представим линейную комбинацию собственных векторов  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\tilde{\Phi} = \alpha_1 \Phi_1 + \alpha_2 \Phi_2, \quad (12)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – неизвестные коэффициенты. Собственные векторы  $\tilde{\Phi}$  нормируем так, что их длина равна единице, то есть выполняется

$$\tilde{\Phi}^T \tilde{\Phi} = 1, \quad (13)$$

тогда получим

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1. \quad (14)$$

Для двукратного критического состояния имеем

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}, \Lambda, X)\tilde{\Phi} = \tilde{\lambda}\tilde{\Phi}, \quad (15)$$

где  $\lambda_1 = \lambda_2 = \tilde{\lambda} = 0$ . Предположим, что собственный вектор  $\tilde{\Phi}$  является дифференцируемым по  $X$  в критической точке, то есть производная  $d\tilde{\Phi}/dX$  существует. Дифференцируя (15) по  $X$ , получим для кривой критических состояний

$$\mathbf{K} \frac{d\tilde{\Phi}}{dX} + \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Lambda} \frac{d\Lambda^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \right) \tilde{\Phi} = 0. \quad (16)$$

Классификация критических точек, когда нулевое первое собственное значение является простым, рассматривается в работах [1–6]. Для классификации кратных критических точек умножим слева уравнение (6) на  $\tilde{\Phi}_1^T$  и  $\tilde{\Phi}_2^T$ . Тогда можно записать [7]:

$$\tilde{\Phi}_1^T (\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_1^c + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{r}_\Lambda^c) = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\Phi}_2^T (\mathbf{K}\dot{\mathbf{u}}_2^c + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{r}_\Lambda^c) = 0. \quad (18)$$

Из (17)–(18) следуют условия потери устойчивости конструкции:

$$\dot{\Lambda}_1^c \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (19)$$

$$\dot{\Lambda}_2^c \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (20)$$

которые будем использовать для классификации двукратных критических точек.

Точка, для которой выполняется

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad (21)$$

называется обычной (постоянной) двукратной точкой бифуркации. Для нее  $\dot{\Lambda}_1^c$  и  $\dot{\Lambda}_2^c$  остаются неопределенными.

Точка, для которой выполняется

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad (22)$$

$$\dot{\Lambda}_1^c = \dot{\Lambda}_2^c = 0, \quad (23)$$

называется двукратной предельной точкой.

Точка, для которой выполняются условия

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \dot{\Lambda}_1^c = 0 \quad (24)$$

или

$$\tilde{\Phi}_1^T \mathbf{r}_\Lambda^c = 0, \quad \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{r}_\Lambda^c \neq 0, \quad \dot{\Lambda}_2^c = 0, \quad (25)$$

называется сингулярной двукратной точкой бифуркации. Для нее  $\dot{\Lambda}_2^c$  или  $\dot{\Lambda}_1^c$  остаются неопределенными.

### 5. Представление приращения вектора нелинейных перемещений в окрестности кратной критической точки

Рассмотрим методику отслеживания равновесной кривой после кратной критической точки. В двукратной точке бифуркации  $B$  вектор перемещений и множитель нагрузки принимают значения  $\mathbf{u}_B^c$  и  $\Lambda_B^c$ . Нами изучены малые отклонения перемещений и множителя нагрузки в окрестности точки бифуркации. Для малых отклонений от двукратной точки бифуркации связь между  $\Delta \mathbf{u}_B^c$  и  $\Delta \Lambda_B^c$  может быть представлена так [7]:

$$\Delta \mathbf{u}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1 \Delta s + \Delta \Lambda_1^c \mathbf{y}, \quad (26)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^c = A_2 \tilde{\Phi}_2 \Delta s + \Delta \Lambda_2^c \mathbf{y}, \quad (27)$$

или в дифференциальной форме

$$\dot{\mathbf{u}}_1^c = A_1 \tilde{\Phi}_1 + \dot{\Lambda}_1^c \mathbf{y}, \quad (28)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_2^c = A_2 \tilde{\Phi}_2 + \dot{\Lambda}_2^c \mathbf{y}, \quad (29)$$

где вектор  $\mathbf{y}$  определяется как

$$\mathbf{y} = - \left[ \frac{1}{\lambda_3} (\Phi_3^T \mathbf{r}_\Lambda^c) \Phi_3 + \dots + \frac{1}{\lambda_n} (\Phi_n^T \mathbf{r}_\Lambda^c) \Phi_n \right], \quad (30)$$

$A_1, A_2$  – неизвестные коэффициенты,  $\Delta s$  – приращение длины кривой равновесных состояний. Вектор  $\mathbf{y}$  может находиться из следующей системы уравнений, полученной с помощью уравнения (6) с учетом (28) или (29):

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{y} &= -\mathbf{r}_\Lambda^c, \\ \tilde{\Phi}_1^T \mathbf{y} &= 0, \\ \tilde{\Phi}_2^T \mathbf{y} &= 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Использование двух последних уравнений системы (31) позволяет обойти сингулярность касательной матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ . Представление (28) или (29) аналогично разложению движения конструкции как твердого целого и деформирования конструкции, где  $\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2$  – моды движения конструкции как твердого целого. Аналогично для двукратной предельной точки имеем:

$$\dot{\mathbf{u}}^c = A_1 \tilde{\Phi}_1, \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{u}}^c = A_2 \tilde{\Phi}_2. \quad (33)$$

Определение коэффициентов  $A_1, A_2$  и исследование устойчивости равновесных кривых для кратной предельной точки и кратной точки бифуркации подробно рассматривается в работе [7]. Чтобы найти коэффициенты  $A_1, A_2$ , для кратных критических точек используется дифференциальное уравнение второго порядка (7), поскольку из уравнения (17) или (18) нельзя получить эту информацию.

### 6. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки и нелинейных перемещений для кратной предельной точки

Рассмотрим задачу определения производных по варьируемому параметру  $X$  критического множителя нагрузки  $d\Lambda^c/dX$  и перемещений  $d\mathbf{u}^c/dX$  для двукратной предельной точки. Умножая уравнение (16) сначала на  $\Phi_1^T$ , а затем на  $\Phi_2^T$ , получим систему двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $\alpha_1, \alpha_2$ :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = 0, \quad (34)$$

где

$$A_{ij} = L_{ij} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + D_{ij}, \quad i=1,2, \quad j=1,2, \quad L_{ij} = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Phi_j, \quad D_{ij} = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \Phi_j.$$

Ненулевые решения для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  существуют, если определитель системы (34) равен нулю:

$$A_{11}A_{22} - A_{12}^2 = \left( L_{11} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + D_{11} \right) \left( L_{22} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + D_{22} \right) - \left( L_{12} \frac{d\mathbf{u}^c}{dX} + D_{12} \right)^2 = 0. \quad (35)$$

Из одного уравнения (35) нельзя определить производную  $du^c/dX$ . Поэтому необходимо записать дополнительные уравнения. Дифференцируя уравнение (4) по  $X$ , имеем

$$\mathbf{K} \frac{du^c}{dX} - \frac{d\Lambda^c}{dX} \mathbf{P}_0 + \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} = 0. \quad (36)$$

Умножая (36) на  $\tilde{\Phi}^T$ , получим уравнение для определения  $d\Lambda^c/dX$ :

$$\tilde{\Phi}^T \mathbf{K} \frac{du^c}{dX} - \frac{d\Lambda^c}{dX} \tilde{\Phi}^T \mathbf{P}_0 + \tilde{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} = 0, \quad (37)$$

откуда

$$\frac{d\Lambda^c}{dX} = \frac{\tilde{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X}}{\tilde{\Phi}^T \mathbf{P}_0}. \quad (38)$$

Подставляя найденную производную  $d\Lambda^c/dX$  в (36), получим

$$\tilde{\Phi}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{K} \frac{du^c}{dX} - \tilde{\Phi}^T \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} \mathbf{P}_0 + \tilde{\Phi}^T \mathbf{P}_0 \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} = 0. \quad (39)$$

Используя уравнение (39) и собирая коэффициенты при  $\alpha_1, \alpha_2$ , запишем два дополнительных уравнения для определения производной  $du^c/dX$ :

$$\Phi_1^T \mathbf{P}_0 \mathbf{K} \frac{du^c}{dX} - \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} \mathbf{P}_0 + \Phi_1^T \mathbf{P}_0 \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} = 0, \quad (40)$$

$$\Phi_2^T \mathbf{P}_0 \mathbf{K} \frac{du^c}{dX} - \Phi_2^T \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} \mathbf{P}_0 + \Phi_2^T \mathbf{P}_0 \frac{\partial \mathbf{r}^c}{\partial X} = 0. \quad (41)$$

Производная  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$  не существует для кратной предельной точки и, следовательно, данные выкладки для кратной точки бифуркации невозможны.

### 7. Аналитический анализ чувствительности критического множителя нагрузки и нелинейных перемещений для кратной точки бифуркации

Рассмотрим задачу определения производных по варьируемому параметру  $X$  критического множителя нагрузки  $d\Lambda^c/dX$  и перемещений  $du^c/dX$  для двукратной точки бифуркации. Производная  $du^c/dX$  может быть записана как

$$\frac{du^c}{dX} = \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{d\Lambda^c}{dX} + \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X}. \quad (42)$$

Определим производную  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Для этого рассмотрим процесс деформации под нагрузкой, то есть  $t = \Lambda, \dot{\Lambda} = 1, \ddot{\Lambda} = \ddot{\Lambda} = \dots = 0$ . Из уравнения (6) имеем

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_\Lambda^c = 0. \quad (43)$$

Матрица  $\mathbf{K}$  является сингулярной в критическом состоянии, и нахождение  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$  из линейной системы (43) становится невозможным. Требуется два дополнитель-

ных уравнения. Поэтому обратимся за помощью к уравнению (7) и получим эти уравнения после умножения (7) слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  или  $\tilde{\Phi}_2^T$ . Два дополнительных уравнения имеют вид:

$$\Phi_1^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 2\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \right) = 0, \quad (44)$$

$$\Phi_2^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + 2\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \mathbf{r}_{\Lambda\Lambda}^c \right) = 0. \quad (45)$$

Заметим, что уравнения (44)–(45) являются квадратичными относительно  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ . Следовательно, в двукратной критической точке можно получить до двух решений для производной  $\partial \mathbf{u}^c / \partial \Lambda$ .

Теперь найдем производную  $\partial \mathbf{u}^c / \partial X$ . Для этого рассмотрим процесс преобразования, то есть  $\Lambda = \text{const}$ ,  $\dot{\Lambda} = \ddot{\Lambda} = \dots = 0$ . Дифференцируя уравнение (4) по  $X$  имеем

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_X^c = 0. \quad (46)$$

Два добавочных условия получим после дифференцирования уравнения (46) по  $X$  и последующего его умножения слева на  $\tilde{\Phi}_1^T$  или  $\tilde{\Phi}_2^T$ . Дополнительные условия для двукратной точки бифуркации также являются квадратичными относительно  $\partial \mathbf{u}^c / \partial X$  и имеют вид:

$$\Phi_1^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_{XX}^c \right) = 0, \quad (47)$$

$$\Phi_2^T \left( \mathbf{L} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \mathbf{r}_{XX}^c \right) = 0. \quad (48)$$

Теперь рассмотрим определение производной  $d\Lambda^c / dX$ . Умножая уравнение (16) сначала на  $\Phi_1^T$ , а затем на  $\Phi_2^T$ , получим систему двух линейных уравнений (34) относительно коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , где

$$A_{ij} = L_{ij} \frac{d\Lambda^c}{dX} + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad L_{ij} = \Phi_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Lambda} \right) \Phi_j,$$

$$D_{ij} = \Phi_i^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \mathbf{u}^c}{\partial X} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial X} \right) \Phi_j, \quad \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Phi_2 = \Phi_2^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{u}} \Phi_1.$$

Ненулевые решения для  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  существуют, если определитель системы (34) равен нулю:

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - A_{12}^2 &= (L_{11}L_{22} - L_{12}^2) \left( \frac{d\Lambda^c}{dX} \right)^2 + (L_{11}D_{22} + L_{22}D_{11} - 2L_{12}D_{12}) \left( \frac{d\Lambda^c}{dX} \right) + \\ &+ (D_{11}D_{22} - D_{12}^2) = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Из уравнения (49) определяем производные кратного критического множителя нагрузки:

$$\frac{d\Lambda_1^c}{dX} = \frac{2L_{12}D_{12} - L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11} - \sqrt{d}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}, \quad (50)$$

$$\frac{d\Lambda_2^c}{dX} = \frac{2L_{12}D_{12} - L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11} + \sqrt{d}}{2(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)}, \quad (51)$$

где дискриминант  $d$  для (49) определяется как

$$d = (L_{11}D_{22} - L_{22}D_{11})^2 + 4(L_{11}D_{12} - L_{12}D_{11})(L_{22}D_{12} - L_{12}D_{22}). \quad (52)$$

После нахождения  $d\Lambda_1^c/dX$  и  $d\Lambda_2^c/dX$  из системы уравнений (34) находим две пары решений для коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  с учетом уравнения (14), а затем производную  $du^c/dX$  из уравнения (42). Две пары коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  позволяют получить из (12) два собственных вектора  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$ , дифференцируемых по параметру  $X$  в критической точке.

Важно отметить, что когда  $d\Lambda_1^c/dX = d\Lambda_2^c/dX$ , то в этом случае возникает новая проблема с определением коэффициентов  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Дискриминант  $d$  квадратного уравнения (49) должен быть равен нулю, чтобы сохранять двукратное критическое состояние при варьировании параметра  $X$ .

### Пример

Рассмотрим пространственную ферму (купол) с тремя степенями свободы, нагруженную в узле 1 сосредоточенной силой  $P_0 = 3 \cdot 10^5$  кГ, рис. 1. На этом рисунке купол также представлен сверху. Высота купола  $H = 110$  мм, расстояния  $S_1 = 180$  мм,  $S_2 = 150$  мм, модуль упругости  $E = 7028$  кГ/мм<sup>2</sup>, плотность материала купола  $\rho = 2,75 \cdot 10^{-6}$  кг/мм<sup>3</sup>.

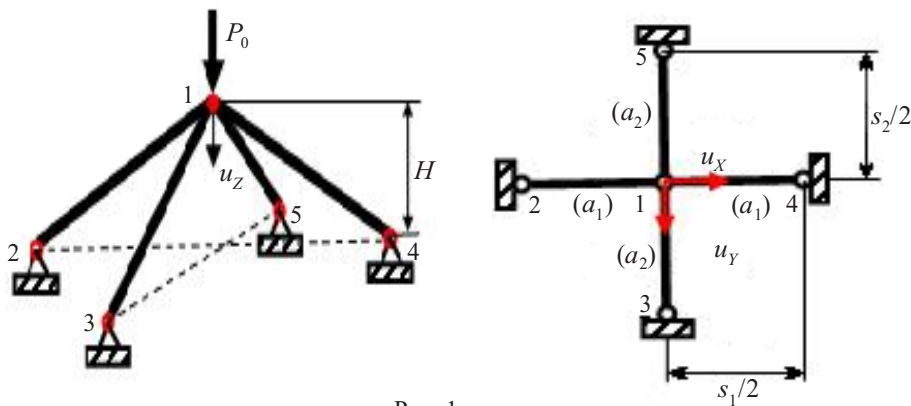


Рис. 1

На рис. 2 показаны некратные точки бифуркации и простые предельные точки. В первой точке бифуркации ферма теряет устойчивость в плоскости  $ZY$  (рис. 3), а во второй точке бифуркации конструкция будет терять устойчивость в плоскости  $ZX$  (рис. 4).



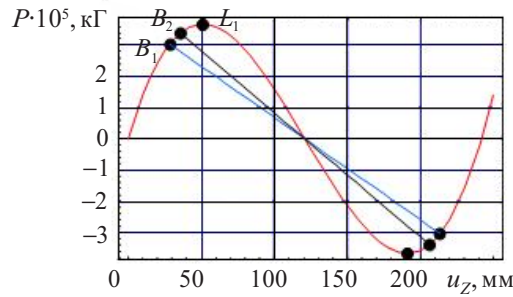


Рис. 2

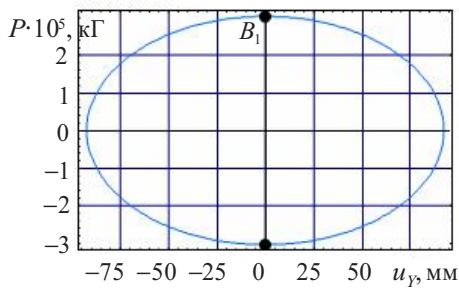


Рис. 3

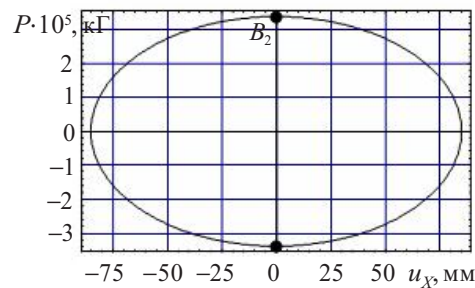


Рис. 4

Параметрами проектирования являются площади поперечных сечений  $a_1$  и  $a_2$  элементов фермы. Допустимая область  $F$  определяется следующими ограничениями на параметры проектирования ( $\text{мм}^2$ ):  $50 \leq a_1 \leq 200$ ,  $50 \leq a_2 \leq 200$ , а также ограничением на критическую нагрузку потери устойчивости пространственной фермы  $P^c \geq \Lambda^d P_0$ .

Полная потенциальная энергия пространственной фермы записывается в виде:

$$\Pi = E \left( \frac{2a_1(s_1^2 u_x^2 + (u_x^2 + u_y^2 - 2Hu_z + u_z^2)^2)}{(4H^2 + s_1^2)^{3/2}} + \frac{2a_2(s_2^2 u_y^2 + (u_x^2 + u_y^2 - 2Hu_z + u_z^2)^2)}{(4H^2 + s_2^2)^{3/2}} \right) - \Lambda^d P_0 u_z.$$

Оптимальный проект фермы определяется двукратной точкой бифуркации  $\{\mathbf{X}^*\} = \{102,3715; 121,1697\}$   $\text{мм}^2$  с массой  $W_{\text{opt}} = 0,1687$  кг, рис. 5, где 1, 2 и 3 – кривые точек бифуркации и предельной точки, которые появляются при силе  $P_0$  в области поиска; 4 – кривая уровня целевой функции; 5, 7 – линии, вдоль которых первая и вторая точки бифуркации совпадают с предельной точкой; 6 – линия, вдоль которой точка бифуркации является двукратной. Заметим, что при  $H = \sqrt{3} s_1 s_2 / (2\sqrt{s_1^2 + s_2^2})$  предельная точка совпадает с двукратной точкой бифуркации, то есть имеем трехкратную критическую точку  $B$ . Оптимальный проект пространственной фермы ( $W_{\text{opt}} = 0,1695$  кг, рис. 6) не определяется трехкратной критической точкой  $B$ , а лежит на границе допустимой области и определяется точкой с координатами  $a_1 = 106 \text{ мм}^2$  и  $a_2 = 132 \text{ мм}^2$ .

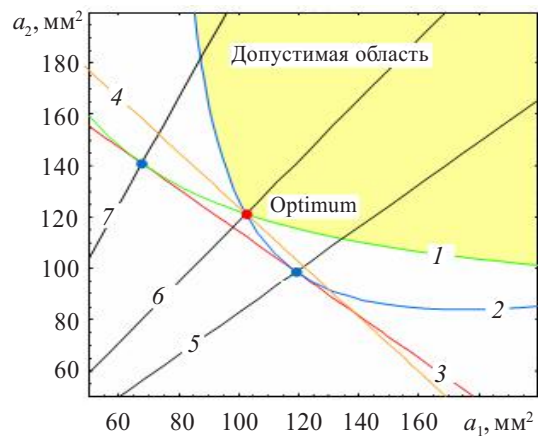


Рис. 5

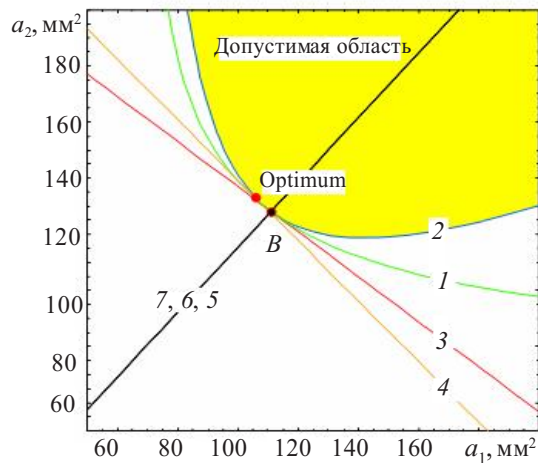


Рис. 6

### Заключение

Выполнен анализ чувствительности кратной критической нагрузки потери устойчивости конструкции и нелинейных перемещений. Для анализа чувствительности применен прямой метод. В дополнение к известной двукратной точке бифуркации обнаружены двукратная предельная точка и смешанная точка (сингулярная двукратная точка бифуркации). Приведены примеры оптимизации пространственной фермы с двукратной и трехкратной точками бифуркации.

### Литература

1. *Сергеев, О.А.* Оптимизация геометрически нелинейных пространственных рам с учетом ограничений по прочности и общей устойчивости / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев, С.А. Сергеева // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2001. – Вып. 63. – С. 111–118.

2. *Сергеев, О.А.* Анализ чувствительности и оптимальное проектирование геометрически нелинейных рам с учетом общей потери устойчивости / О.А. Сергеев, С.А. Сергеева, В.Г.

Киселев // Вестник ННГУ. Серия механика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2002. – Вып. 1(4). – С. 161–175.

3. *Sergeyev, O.A.* Optimization of 3D frame structures for stress and overall stability constraints / O.A. Sergeyev, S.A. Sergeyeva, V.G. Kiselev // Proceedings of the 4-th world congress of structural and multidisciplinary optimization. – Dalian, China. – 2001. – P. 79–80.

4. *Bojczuk, D.* Non-linear sensitivity analysis of discrete structures / D. Bojczuk, Z. Mroź // Foundations of civil and environmental engineering. – 2002. – 1. – P. 19–41.

5. *Mroź, Z.* Sensitivity analysis and optimal design of nonlinear structures / Z. Mroź, J. Piekarski // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 1998. – 42. – P. 1231–1262.

6. *Сергеев, О.А.* Анализ закритического поведения геометрически нелинейных упругих пространственных рам / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев // Вестник ННГУ. Серия механика / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2004. – Вып. 1(6). – С. 177–190.

7. *Сергеев, О.А.* Анализ устойчивости равновесных кривых нелинейных конструкций и анализ чувствительности в кратных критических точках / О.А. Сергеев, В.Г. Киселев // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 126–138.

[27.09.2007]

#### **SENSITIVITY ANALYSIS AT MULTIPLE CRITICAL POINTS AND OPTIMAL DESIGN OF GEOMETRICALLY NONLINEAR CONSTRUCTIONS**

**O.A. Sergeyev, V.G. Kiselev**

It is presented a method for determination of design variables values of a geometrically nonlinear structure for which the structure mass attains its minimum subject to the constraints on multiple buckling loads and on limit values of design variables. It is assumed that a geometrically nonlinear elastic structure is under conservative loads. The successive loading method, the generalized displacement method and the arc length method are used for the calculation of nonlinear displacements. The singularity of tangent stiffness matrix is interpreted as overall buckling of a structure. The analytical sensitivity analysis is proposed for multiple buckling loads and nonlinear displacements at limit and bifurcation points. The efficiency of suggested method is shown on the examples of optimal design of a space truss for which the response involves double and triple bifurcation points.