

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-235-250

**ОСОБЕННОСТИ НАЧАЛЬНО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ПИРОПЬЕЗОЭЛЕКТРИКОВ
ТРИГОНАЛЬНОЙ СИНГОНИИ***

© 2024 г. **Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В.**

*Южный научный центр Российской академии наук,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

ssc-ras@ssc-ras.ru

Поступила в редакцию 22.03.2024

Предложена модель предварительно напряженной термоэлектроупругой среды класса 3m тригональной сингонии, находящейся в условиях воздействия начальных механических напряжений, электростатического поля и температуры. Построены линеаризованные определяющие соотношения и уравнения движения преднапряженной термоэлектроупругой среды. Предполагается, что наведенное в материале начально-деформированное состояние однородно, начальная температура не превышает температуры фазовых переходов, начальное электростатическое поле задано вектором напряженности. В рамках сделанных предположений приведена трехмерная постановка динамических задач для преднапряженных полуограниченных сред из рассматриваемых материалов. Методами операционного исчисления задача сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой представлено в матричном виде и позволяет анализировать влияние внешних факторов различной природы на динамику преднапряженной термоэлектроупругой среды. Особое место уделено детальному исследованию начально-деформированного состояния материала в условиях раздельного либо совместного воздействия механических напряжений, электростатического поля и температуры. Показано характерное для рассматриваемого класса пьезо- и пироэффектов: появление электрической индукции под действием механических напряжений при постоянной температуре и появление электрической индукции под тепловым воздействием в условиях отсутствия механических напряжений. Установлены виды механических воздействий, приводящих к максимальным значениям электрической индукции. Показано, что при совместном тепловом и механическом воздействии определяющую роль в характере наведенных деформаций играют механические напряжения. Наличие предварительного нагрева может лишь либо ослабить, либо усилить влияние электростатического поля. При совместном механическом и электростатическом воздействии наличие начального поля большой напряженности может приводить к качественному изменению начально-деформированного состояния.

* Выполнено в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН (№ госрегистрации 122020100343-4).

Результаты исследований приведены в безразмерных параметрах, оформлены в виде графиков и могут представлять определенный интерес при разработке, проектировании и оптимизации пьезоэлектрических материалов, используемых при создании новых микро- и наноразмерных приборов и устройств широкого назначения.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, преднапряженная термоэлектроупругая среда, начальные механические напряжения, начальное электростатическое поле, предварительный нагрев, класс 3m тригональной сингонии, класс симметрии 3m, ниобат лития.

Введение

Широкое распространение пьезоэлектрических, пьезомагнитных и пьезоэлектрических материалов при производстве высокоточных датчиков, фильтров, ультразвуковых генераторов, приводов для активного управления, термоакустопьезоэлектрических преобразователей энергии основано на особом эффекте термоэлектроупругости. Впервые в публикациях [1–6] сформулированы основные положения, изучены физические законы термопьезоэлектрических (ТПЭ) материалов, приведены определяющие соотношения и уравнения их движения. В [7, 8] обобщена ТПЭ теория Миндлина в предположении конечной скорости распространения тепловых возмущений, построена обобщенная линейная теория ТПЭ сред. В [9, 10] обобщенная теория использована при исследовании особенностей распространения поверхностных волн в полуограниченных термоэлектроупругих (ТЭУ) средах. В [11, 12] изучены задачи отражения и прохождения волн в пьезоэлектрической и пьезоэлектрической средах. В [13, 14] для исследования поведения анизотропных слоистых ТЭУ сред с разрывными граничными условиями предложены методы, позволяющие исследовать поведение материалов с покрытиями при гармонических воздействиях.

Создание новых искусственных пьезоэлектрических материалов с заданными свойствами, особенности технологии производства сложных устройств и конструкций современной микро- и нанoeлектроники привело к необходимости разработки адекватных, верифицируемых моделей, эффективных подходов и высокоточных методов изучения вопросов распространения поверхностных и объемных акустических волн в предварительно напряженных материалах. В [15–17] исследовано влияние начальных механических напряжений на распространение объемных волн и поверхностных акустических волн (ПАВ) в составных однородных и неоднородных структурах из пьезоэлектрических и пьезомагнитных материалов. Влияние начальных напряжений учитывалось аддитивным членом в уравнениях движения, начальнодеформированное состояние (НДС) материала не учитывалось. Следует отметить, что в публикациях [18–25] для модели гиперупругого сжимаемого материала показано существенное влияние наведенных начальных деформаций на изменение физических свойств, отсутствие характерной для естественного состояния симметрии упругих, пьезоэлектрических и диэлектрических модулей преднапряженных материалов, изменение скорости и характера распространения объемных и поверхностных акустических волн. В [21–23] в рамках наложения малых деформаций на конечные деформации проведена последовательная линеаризация определяющих соотношений и уравнений движения нелинейной механики упругой [21], электроупругой [22] и ТЭУ [23] сред. В [24, 25] на основе полученных линеаризованных соотношений

для электроупругих сред с преднапряженным неоднородным покрытием развит численно-аналитический метод, позволивший исследовать особенности распространения ПАВ в зависимости от характера начальных механических и электростатических воздействий в широком диапазоне частот. В рамках линеаризованной ТЭУ теории в [26, 27] построены трехмерные функции Грина преднапряженного неоднородного слоя и полупространства с преднапряженным неоднородным покрытием, выполненных из ТЭУ функционально градиентного материала, при наличии начального электростатического поля. В [28] для материалов класса бтм гексагональной сингонии исследовано влияние нелинейных эффектов начальных напряжений, электростатического поля и температуры на НДС и свойства материала.

К наиболее изученным и коммерчески доступным пиропьезоэлектрическим материалам относятся материалы на основе ниобатов щелочных металлов – лития и натрия, обладающих рядом уникальных свойств [29–32]. Следует отметить, что в многокомпонентных системах на базе твердых растворов чаще всего сохраняется кристаллическая структура основного материала. Так для класса 3т тригональной сингонии в [33] исследовано влияние градиентности изменения свойств покрытия, вида и величины начальных напряжений и электростатического поля на скорость сдвиговых горизонтально поляризованных поверхностных волн, влияние температуры не учитывалось. Настоящая статья посвящена разработке связанной математической модели пиропьезоэлектрического предварительно напряженного материала, изучению комплексного влияния вида и величины начальных напряжений, электростатического поля и температуры на НДС среды.

Постановка задачи

Рассматривается модель предварительно напряженной ТЭУ среды, НДС которой однородно и наводится за счет действия механических напряжений, электростатического поля и температуры (то есть среда предварительно нагрета или охлаждена) [2–4, 23, 26–28]:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{\Lambda}^T, \quad \mathbf{\Lambda} = \delta_{ij} v_i \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad \varphi_0 = -\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{R}, \quad \theta = T_1, \quad v_i = \text{const}. \quad (1)$$

Здесь \mathbf{R} , \mathbf{r} – радиусы-векторы точки среды в НДС и в естественном состоянии (ЕС) соответственно; $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – главные относительные удлинения волокон, направленных вдоль координатных осей x_k , совпадающих в естественной конфигурации с декартовыми координатами; δ_{ij} – символ Кронекера; φ_0 – электрический потенциал; \mathbf{E}_0 – напряженность начального внешнего электростатического поля (ЭП); T_1 – температура тела в НДС.

Полагаем, что состояние

$$\mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad \theta = T_0 \quad (2)$$

является состоянием с минимальной свободной энергией; \mathbf{S} , \mathbf{W} , θ – тензор деформации Коши – Грина, «материальный» вектор напряженности внешнего ЭП и температура. В рамках линеаризованной теории наложения малых деформаций на конечные деформации динамика преднапряженного ТЭУ тела в лагранжевой материальной системе координат x_1, x_2, x_3 , связанной с ЕС, описывается линеаризованными уравнениями движения, вынужденной электростатики и теплопроводности [22, 27, 28]:

$$\nabla_0 \cdot \mathbf{\Theta} = \nabla_0 \cdot (\mathbf{\Pi} + \mathbf{m}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \nabla_0 \cdot \mathbf{h} + T_1 \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0. \quad (3)$$

Здесь ∇_0 – оператор Гамильтона; Θ – линейризованный тензор напряжений преднапряженной среды; Π , \mathbf{m} , \mathbf{d} , \mathbf{h} и η – линейризованные тензор напряжений Пиолы, тензор напряжений Пиолы – Максвелла, «материальный» вектор индукции, вектор потока тепла и энтропия; ρ_0 – плотность тела в ЕС; $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор смещений.

Следуя [27, 28], рассмотрим на поверхности ТЭУ тела граничные условия:

$$- \text{механические на } o = o_1 + o_2: \mathbf{n} \cdot \Theta|_{o_1} = \mathbf{t}^*|_{o_1}, \quad \mathbf{u}|_{o_2} = \mathbf{u}^*|_{o_2}; \quad (4)$$

$$- \text{электрические на } o = o_3 + o_4: \mathbf{n} \cdot \mathbf{d}|_{o_3} = -\mathbf{g}^*|_{o_3}, \quad \varphi|_{o_4} = \varphi^*|_{o_4}; \quad (5)$$

$$- \text{тепловые на } o = o_5 + o_6: \mathbf{n} \cdot \mathbf{h}|_{o_5} = -\mathbf{h}^*|_{o_5}, \quad T|_{o_6} = T^*|_{o_6}, \quad (6)$$

\mathbf{u}^* , \mathbf{t}^* , \mathbf{n} – векторы перемещений, напряжений и внешней нормали к поверхности среды, определенные в системе координат ЕС; \mathbf{g}^* , φ^* , \mathbf{h}^* , T^* – плотность распределения заряда, электрический потенциал, поток тепла и температура (звездочкой отмечены заданные в соответствующей области величины). В сделанных предположениях участвующие в постановке краевой задачи (3)–(6) линейризованные тензоры Π и \mathbf{m} , векторы \mathbf{d} и \mathbf{h} , а также энтропия η определяются соотношениями (здесь и далее индексами после запятой отмечено дифференцирование по соответствующим координатам, $l, k, s, p, m = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} \Pi_{lk} &= c_{lksp}^* u_{s,p} + e_{lkp}^* \varphi_{,p} - q_{lk}^* T, \quad m_{lk} = \zeta_{lksp}^* u_{s,p} + \psi_{lkp}^* \varphi_{,p}, \\ d_l &= g_{lsp}^* u_{s,p} - \eta_{lp}^* \varphi_{,p} + p_l^* T, \quad h_l = -\lambda_{ll} T_{,l}, \quad \eta = q_{sp}^* u_{s,p} - p_m \varphi_{,m} + \frac{\rho_0 c_\varepsilon}{T_0} T, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} c_{lksp}^* &= P_{lk} \delta_{ks} + v_k v_s c_{lksp}, \quad e_{lsp}^* = v_s e_{lsp}, \quad \eta_{lp}^* = \varepsilon^{(0)} J v_l^{-2} \delta_{lp} + \beta_{lp}, \quad q_{lk}^* = v_k q_{lk}, \\ g_{lsp}^* &= e_{lsp}^* + \psi_{lsp}^*, \quad \psi_{ijk}^* = \varepsilon^{(0)} J v_i^{-1} v_k^{-1} [\delta_{ij} W_k v_k^{-1} - \delta_{jk} W_i v_i^{-1} - \delta_{ik} W_j v_j^{-1}], \\ \zeta_{lksp}^* &= \varepsilon^{(0)} J v_l^{-1} [1/2 W_m^2 v_m^{-2} (v_k^{-1} \delta_{kp} \delta_{ls} - v_s^{-1} \delta_{lk} \delta_{sp}) + v_p^{-1} (W_k v_k^{-1} \times \\ &\times (W_l v_l^{-1} \delta_{sp} - W_p v_p^{-1} \delta_{ls} - W_s v_s^{-1} \delta_{lp}) + W_s v_s^{-1} (W_p v_p^{-1} \delta_{lk} - W_l v_l^{-1} \delta_{kp}))], \\ P_{ii} &= c_{ijkk} S_k - e_{ijk} W_k - T q_{ii}, \quad S_k = (v_k^2 - 1)/2, \quad J = v_1 v_2 v_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь c_{lksp} – компоненты тензора IV ранга упругих констант II порядка, характеризующие линейную деформацию при постоянных температуре и электрическом поле; e_{ijk} – компоненты тензора III ранга – тензорные пьезоэлектрические константы II порядка, связанные с электроакустическими эффектами. В ЕС компоненты c_{lksp} и $e_{ijk} = e_{kij}$ допускают использование нотации Фойгта $c_{\alpha\beta}$ и $e_{k\alpha}$; β_{ij} – компоненты тензора II ранга констант диэлектрической восприимчивости, связанные с компонентами тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} соотношениями $\varepsilon_{kn} = \varepsilon^{(0)} \delta_{kn} + \beta_{kn}$; $\varepsilon^{(0)}$ – диэлектрическая проницаемость вакуума; $T = T_1 - T_0$ – приращение температуры; q_{ij} – коэффициенты термоупругости; λ_{ii} – компоненты тензора коэффициентов удельной теплопроводности; p_k – компоненты вектора пирозлектричества; c_ε – удельная теплоемкость; P_{ii} – компоненты тензора Кирхгофа, которые в рамках условий (1) и (2) наряду с электростатическим и тепловым воздействием определяют НДС среды.

Представим компоненты «материального» вектора индукции в виде [28]:

$$d_l = d_l^\Pi + d_l^m, \quad d_l^\Pi = e_{lsp}^* u_{s,p} - \eta_{lp}^* \varphi_{,p} + p_l^* T, \quad d_l^m = \psi_{lsp}^* u_{s,p}. \quad (9)$$

В этом случае из представлений (7)–(9) следует, что свойства среды учитываются в коэффициентах компонент Π_{lk} , d_l^{Π} , h_l и энтропии η . Коэффициенты компонент m_{lk} , d_l^m [28] зависят от направления и величины вектора напряженности начального ЭП. При этом все коэффициенты зависят от характера и величины начальных деформаций, определяемых условиями (1) и (2).

Далее введем расширенные векторы смещения $\mathbf{u}^{ET} = \{u_1, u_2, u_3, u_4 = \Phi, u_5 = T\}$, нагрузки $\mathbf{f}^{ET} = \{f_1, f_2, f_3, f_4 = -\mathbf{g}^*, f_5 = -h^*\}$ и обозначения

$$\begin{aligned}\Theta_{lk} &= \theta_{lksp}u_{s,p} + \theta_{lk4p}u_{4,p} + \theta_{lk55}u_5, \\ d_l &= \theta_{l4sp}u_{s,p} + \theta_{l44p}\Phi_{,p} + \theta_{l555}u_5, \\ -\eta &= \theta_{55sp}u_{s,p} - \theta_{m555}u_{4,m} + \theta_{5555}u_5;\end{aligned}\quad (10)$$

$$\begin{aligned}\theta_{lksp} &= \Pi_{lksp} + M_{lksp}, \quad \theta_{lk4p} = \Pi_{lk4p} + M_{lk4p}, \quad \theta_{l4sp} = \Pi_{l4sp} + M_{l4sp}, \\ \theta_{lk55} &= \theta_{55lk} = -q_{lk}^*, \quad \theta_{l44p} = -\eta_{lp}^*, \quad k, l, s, p = 1, 2, 3,\end{aligned}\quad (11)$$

$$\theta_{l555} = p_l, \quad \theta_{5555} = -c_\varepsilon \rho T_0^{-1}.$$

Следуя [9, 27, 28], перейдем к безразмерным нормализованным параметрам:

$$\begin{aligned}x'_i &= \frac{\omega^* x_i}{V_p^0}, \quad u'_i = \frac{\rho^0 \omega^* V_p^0}{q_{11}^0 T_0} u_i, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \\ \omega^* &= \frac{c_\varepsilon^0 c_{11}^0}{\lambda_{11}^0}, \quad T'_1 = \frac{T_1}{T_0}, \quad \lambda'_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{11}^0}, \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad c'_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon}{c_\varepsilon^0}, \\ \Theta'_{ij} &= \frac{\Theta_{ij}}{q_{11}^0 T_0}, \quad d'_i = \frac{c_{11}^0}{q_{11}^0 T_0 e_{33}^0} d_i, \quad h'_i = \frac{V_p^0}{\omega^* T_0 \lambda_{11}^0} h_i \quad (i, j = 1, 2, 3), \\ \theta'_{ijkl} &= \frac{\theta_{ijkl}}{c_{11}^0} \quad (k, l = 1, 2, 3), \quad \theta'_{ik4p} = \frac{\theta_{ik4p}}{e_{33}^0}, \quad \theta'_{i4kp} = \frac{\theta_{i4kp}}{e_{33}^0} \quad (i, k, p = 1, 2, 3), \\ \theta'_{k44k} &= \frac{\theta_{k44k}}{\varepsilon_{33}^0}, \quad \theta'_{kk55} = \frac{\theta_{kk55}}{q_{11}^0} \quad (k = 1, 2, 3), \quad \theta'_{3555} = \frac{c_{11}^0}{q_{11}^0 e_{33}^0} p_3, \quad \theta'_{5555} = \frac{\rho c_\varepsilon}{T_0 \rho^0 c_\varepsilon^0}, \\ E &= \frac{T_0 (q_{11}^0)^2}{\rho^0 c_\varepsilon^0 c_{11}^0}, \quad E_p = \frac{\omega^* e_{33}^0 \Phi_0}{q_{11}^0 T_0 V_p^0}, \quad \eta = \frac{c_{11}^0 \varepsilon_{33}^0}{(e_{33}^0)^2}, \quad E_\eta = E_p \eta, \quad E_T = E T'_1,\end{aligned}$$

Здесь индексом 0 отмечены параметры материала в ЕС, E, E_p, E_η – безразмерные нормирующие множители. Далее штрихи опускаем. В безразмерных переменных с учетом представлений (7)–(11) и свойств материала линеаризованные уравнения (3) принимают вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{11}[u_1] + Q_1 u_{1,23} + \mathbf{L}_{12}[u_2] + Q_2 u_{2,12} + Q_3 u_{2,13} + \mathbf{L}_{13}[u_3] + Q_4 u_{3,12} + Q_5 u_{3,13} + \\ + E_p \mathbf{L}_{14}[u_4] + \Psi_1 u_{4,12} + \Psi_2 u_{4,13} + \theta_{1155} u_{5,1} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_{12}[u_1] + Q_2 u_{1,12} + Q_3 u_{1,13} + \mathbf{L}_{22}[u_2] + Q_6 u_{2,23} + \mathbf{L}_{23}[u_3] + Q_7 u_{3,23} + \\ + E_p \mathbf{L}_{24}[u_4] + \Psi_3 u_{4,23} + \theta_{2255} u_{5,2} = 0,\end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_{13}[u_1] + Q_4 u_{1,12} + Q_5 u_{1,13} + \mathbf{L}_{23}[u_2] + Q_7 u_{2,23} + \mathbf{L}_{33}[u_3] + E_p \mathbf{L}_{34}[u_4] + \theta_{3355} u_{5,3} = 0,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{14}[u_1] + \Psi_1 u_{1,12} + \Psi_2 u_{1,13} + \mathbf{L}_{24}[u_2] + \Psi_3 u_{2,23} + \mathbf{L}_{34}[u_3] + E_\eta \mathbf{L}_{44}[u_4] + \theta_{3555} u_{5,3} = 0, \\ i\omega E_T [\theta_{1155} u_{1,1} + \theta_{2255} u_{2,2} + \theta_{3355} u_{3,3} + E_p \theta_{3555} u_{4,3}] - \mathbf{L}_{55}[u_5] = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В представлениях (12) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} Q_1 &= (\theta_{3112} + \theta_{2113}) = 2c_{14} v_1^2, & Q_2 &= (\theta_{1122} + \theta_{2121}) = (c_{66} + c_{12}) v_1 v_2, \\ Q_3 &= (\theta_{1123} + \theta_{3121}) = 2c_{14} v_1 v_3, & Q_4 &= (\theta_{1132} + \theta_{2131}) = 2c_{14} v_1 v_3, \\ Q_5 &= (\theta_{1133} + \theta_{3131}) = (c_{44} + c_{13}) v_1 v_3, & Q_6 &= (\theta_{2223} + \theta_{3222}) = -2c_{14} v_2^2, \\ Q_7 &= (\theta_{2233} + \theta_{3232}) = (c_{44} + c_{13}) v_2 v_3, & \Psi_1 &= (\theta_{1142} + \theta_{2141}) = -2e_{22} v_1, \\ \Psi_2 &= (\theta_{1143} + \theta_{3141}) = (e_{15} + e_{31}) v_1, & \Psi_3 &= (\theta_{2243} + \theta_{3242}) = (e_{15} + e_{31}) v_2. \end{aligned}$$

Дифференциальные операторы \mathbf{L}_{ik} имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{kk} &= \theta_{ikki} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \rho \omega^2, & \mathbf{L}_{44} &= \theta_{i44i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, & \mathbf{L}_{55} &= \lambda_{kk} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - i\omega T_1 \theta_{5555}, \quad k, i = 1, 2, 3, \\ \mathbf{L}_{sk} &= \theta_{isk i} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad s, i = 1, 2, 3, \quad k = \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

Участвующие в представлении граничных условий (4)–(6) компоненты линейризованных тензора напряжений, вектора индукции и потока тепла в безразмерном виде для пирозлектрических материалов симметрии 3m принимают вид:

$$\begin{aligned} \Theta_{31} &= \theta_{3122} u_{2,2} + \theta_{3133} u_{3,3} + \theta_{3123} u_{2,3} + \theta_{3132} u_{3,2} + \theta_{3113} u_{1,3} + \theta_{3131} u_{3,1} + \theta_{3112} u_{1,2} + \\ &\quad + \theta_{3121} u_{2,1} + E_p (\theta_{3141} u_{4,1} + \theta_{3143} u_{4,3}), \\ \Theta_{32} &= \theta_{3211} u_{1,1} + \theta_{3222} u_{2,2} + \theta_{3233} u_{3,3} + \theta_{3223} u_{2,3} + \theta_{3232} u_{3,2} + \theta_{3213} u_{1,3} + \theta_{3231} u_{3,1} + \\ &\quad + \theta_{3212} u_{1,2} + E_p (\theta_{3242} u_{4,2} + \theta_{3243} u_{4,3}), \\ \Theta_{33} &= \theta_{3311} u_{1,1} + \theta_{3322} u_{2,2} + \theta_{3333} u_{3,3} + \theta_{3323} u_{2,3} + \theta_{3313} u_{1,3} + \theta_{3312} u_{1,2} + \theta_{3321} u_{2,1} + \\ &\quad + E_p (\theta_{3341} u_{4,1} + \theta_{3342} u_{4,2} + \theta_{3343} u_{4,3}) + \theta_{3355} u_5, \\ d_3 &= \theta_{3411} u_{1,1} + \theta_{3422} u_{2,2} + \theta_{3433} u_{3,3} + \theta_{3423} u_{2,3} + \theta_{3432} u_{3,2} + \theta_{3413} u_{1,3} + \theta_{3431} u_{3,1} + \\ &\quad + E_\eta \theta_{3443} u_{4,3} + \theta_{3555} u_5, \quad h_3 = -\lambda_{33} u_{5,3}. \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнения (12) с представлениями (13) позволяют проводить детальное исследование динамики преднапряженной термоэлектрострунгой среды в условиях комплексного воздействия механических напряжений, ЭП и температуры. Эффективность этого исследования требует предварительного исследования НДС материала в условиях воздействия внешних факторов различной физической природы.

Определение НДС

В силу условий (1) и (2) НДС материала полагается однородным, создается за счет действия механических напряжений, однородного ЭП и температуры и определяется в лагранжевой системе координат тензором напряжений Кирхгофа и материальной формой вектора электрической индукции. При наличии начального ЭП компоненты в декартовой системе координат имеют вид [22, 23, 27, 28]:

$$P_{ij} = c_{ijk} S_{kk} - e_{ijk} W_k^0 - (T_1 - T_0) q_{ij}, \quad (14)$$

$$d_k = e_{kli} S_{ll} + (\varepsilon_0 v_1 v_2 v_3 v_k^{-2} \delta_{nk} + \beta_{nk}) W_n^0 + p_k (T_1 - T_0),$$

где W_k^0 – заданные компоненты вектора напряженности начального ЭП; $T_1 - T_0 = \Delta T$ определяет предварительный нагрев или охлаждение материала ($T_0 = 298$ К). В силу свойств ТЭУ материалов класса 3m система (14) принимает вид:

$$\begin{aligned} P_{11} &= c_{11} S_{11} + c_{12} S_{22} + c_{13} S_{33} + e_{22} W_2^0 - e_{31} W_3^0 - \Delta T q_{11}, \\ P_{22} &= c_{12} S_{11} + c_{11} S_{22} + c_{13} S_{33} - e_{22} W_2^0 - e_{31} W_3^0 - \Delta T q_{11}, \\ P_{33} &= c_{13} S_{11} + c_{13} S_{22} + c_{33} S_{33} - e_{33} W_3^0 - \Delta T q_{33}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$d_1 = (\varepsilon_0 v_1 v_2 v_3 v_1^{-2} + \beta_{11}) W_1^0, \quad d_2 = -e_{22} S_{11} + e_{22} S_{22} + (\varepsilon_0 v_1 v_2 v_3 v_2^{-2} + \beta_{11}) W_2^0,$$

$$d_3 = e_{31} S_{11} + e_{31} S_{22} + e_{33} S_{33} + (\varepsilon_0 v_1 v_2 v_3 v_3^{-2} + \beta_{33}) W_3^0 + p_3 \Delta T.$$

Таким образом, для определения параметров НДС получаем 6 уравнений (15), связывающих 6 компонент тензора напряжений и вектора электрической индукции с 6 компонентами тензора деформаций и вектора напряженности ЭП. Использована лицензированная программа расчета параметров НДС для ТЭУ материалов 3m [34]. Предусмотрены различные способы задания НДС: через задание деформаций v_i и вектора напряженности начального ЭП \mathbf{W} ; задание напряжений P_{kk} и вектора электрической индукции \mathbf{d} или вектора \mathbf{W} . Реализовано комбинированное задание НДС через задание вектора \mathbf{W} или вектора \mathbf{d} . Помимо компонент тензора напряжений и электростатического поля задается начальная температура ΔT . Следуя [28], рассматриваются следующие виды НДС ($P_{ii}, P_{jj}, P_{kk}; \mathbf{W} = \{W_1^0, W_2^0, W_3^0\}; \Delta T = \tau$):

- одноосные $1x_i: \mathbf{W} = \{0, 0, 0\}, \Delta T = 0, P_{ii} = P, P_{jj} = P_{kk} = 0, i \neq j \neq k;$
- двухосные $2x_i: \mathbf{W} = \{0, 0, 0\}, \Delta T = 0, P_{ii} = 0, P_{jj} = P_{kk} = P, i \neq j \neq k;$
- гидростатическое $3x: \mathbf{W} = \{0, 0, 0\}, \Delta T = 0, P_{11} = P_{22} = P_{33} = P;$
- одноосные с преднагревом $1x_1 T^\pm: \mathbf{W} = \{0, 0, 0\}, \Delta T = \pm \tau, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0;$
- одноосные с ЭП $1x_1 W_3^\pm: \mathbf{W} = \{0, 0, \pm W_3^0\}, \Delta T = 0, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0;$
- $1x_1 W_2^\pm: \mathbf{W} = \{0, \pm W_2^0, 0\}, \Delta T = 0, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0,$
- $1x_1 W_{23}^{\pm\pm}: \mathbf{W} = \{0, \pm W_2^0, \pm W_3^0\}, \Delta T = 0, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0;$
- комбинированные: $1x_1 W_3^\pm T^\pm: \mathbf{W} = \{0, 0, \pm W_3^0\}, \Delta T = \pm \tau, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0,$
- $1x_1 W_2^\pm T^\pm: \mathbf{W} = \{0, \pm W_2^0, 0\}, \Delta T = \pm \tau, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0,$
- $1x_1 W_{23}^{\pm\pm} T^\pm: \mathbf{W} = \{0, \pm W_2^0, \pm W_3^0\}, \Delta T = \pm \tau, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0.$

Особенностью пироэлектриков класса 3m является то, что наряду с тепловым расширением и пьезоэффектом они обладают пироэлектрическим эффектом. Это позволяет изменением одних параметров в рамках НДС одного типа ослаблять или усиливать действие других параметров, что, по сути, предоставляет возможность управлять параметрами НДС.

Численный анализ

Проведено исследование влияния начальных параметров (температура, напряженность электростатического поля) на НДС ТЭУ материала класса 3m. В качестве последнего использовался пироэлектрик LiNbO_3 [33, 35]: $\rho_0 = 4700$ кг/м³, $c_{11} =$

$= 20,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{12} = 5,3 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{13} = 7,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{14} = 0,9 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{33} =$
 $= 24,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{44} = 6,0 \cdot 10^{10}$ Н/м², $c_{66} = 7,5 \cdot 10^{10}$ Н/м², $e_{15} = 3,7$ Кл/м², $e_{22} =$
 $= 2,5$ Кл/м², $e_{31} = 0,2$ Кл/м², $e_{33} = 1,3$ Кл/м², $\varepsilon_{11}/\varepsilon^{(0)} = 44$, $\varepsilon_{33}/\varepsilon^{(0)} = 29$, $q_{11} = q_{22} =$
 $= 4,57 \cdot 10^6$ Н/м²/К, $q_{33} = 4,134 \cdot 10^6$ Н/м²/К, $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 4,4$ Вт/м/К, $\lambda_{33} = 4,5$ Вт/м/К,
 $p_3 = -6,5 \cdot 10^{-5}$ Кл/м²/К, $c_\varepsilon = 619$ Дж/кг/К.

При расчете параметров НДС (1), (2), (14), (15) величину наведенных начальных деформаций определяют механические напряжения P_{ii} , действующие вдоль главных осей, изменение температуры относительно исходной T_0 и электростатическое поле \mathbf{W} . Следует отметить, что в представлении линеаризованного тензора напряжений Пиолы – Максвелла, вектора индукции, потока тепла и энтропии (7), (8) участвуют все компоненты вектора \mathbf{W} . Их наличие приводит к появлению новых элементов в матрице связи, значения которых, однако, невелики. Рисунок 1 иллюстрирует связь начальной деформации с механическим напряжением и электрической индукцией при различных НДС: на рис. 1а–в – в отсутствие предварительного нагрева, на рис. 1г–е – при наличии предварительного нагрева.

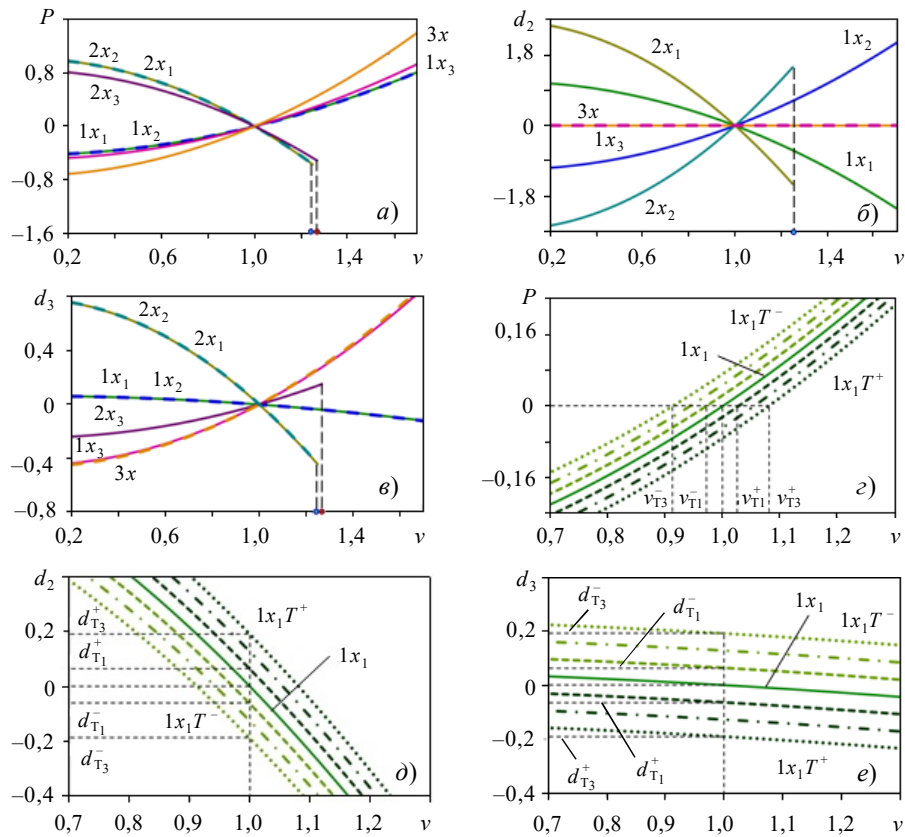


Рис. 1. Влияние начальной деформации на напряжения и индукцию без учета температуры при различных НДС (а–в) и с учетом температуры в НДС (г–е)

Начальное ЭП отсутствует. Точками на рис. 1а–в отмечены максимально допустимые растяжения для двухосных НДС, при превышении которых материал теряет устойчивость. Сплошная, штриховая, штрихпунктирная и пунктирная линии на

рис. 1г–е отвечают значениям $\tau = 0, \pm 0,04, \pm 0,08, \pm 0,12$ ($\tau = 0,04$ соответствует изменению температуры на 12°) вне зоны фазовых переходов.

Из рис. 1а видно, что с механической стороны поведение материалов класса 3m тригональной сингонии лишь количественно отличается от поведения пиропьезо-электриков симметрии 6mm гексагональной сингонии [28]. С электрической стороны поведение этих материалов сильно различается. Прежде всего наряду с нормальной компонентой индукции d_3 в материале 3m возникает горизонтальная компонента d_2 . В материалах 6mm в НДС 3х пьезоэффект отсутствует, в то время как в материалах 3m в условиях гидростатической деформации пьезоэффект имеет место [36]. При этом компоненты индукции в НДС 1х₃ и НДС 3х в материале 3m почти неразличимы. По-другому ведет себя компонента d_2 . Эти компоненты в НДС 1х₁ и 1х₂, равно как и в НДС 2х₁ и 2х₂, по модулю равны, но противоположны по знаку. В НДС 1х₃ и 2х₃, равно как и в НДС 3х, компонента d_2 полностью отсутствует. Следует отметить, что рис. 1б, в иллюстрируют прямой пьезоэлектрический эффект, когда электрическая индукция наводится в материале за счет механического воздействия. Из рис. 1д, е видно влияние начальной температуры и механического воздействия на электрическую индукцию при НДС 1х₁. В частности, проиллюстрирован пирозлектрический эффект, при котором в отсутствие механической деформации ($v = 1$) в материале наводится электрическая индукция d_{T1}^\pm, d_{T3}^\pm . Ее величина пропорциональна величине начальной температуры. Из рис. 1г видно, что начальная температура в отсутствие механических напряжений ($P = 0$) наводит в материале деформацию v_T^\pm . При $P \neq 0$ изменение начальной температуры приводит либо к усилению, либо к ослаблению действия напряжений.

Рисунок 2а иллюстрирует возможность управления электростатическим полем. Сплошной линией представлена зависимость $P-v_i$ в отсутствие поля. Другими линиями отмечены НДС 1х₁W₃[±] (штриховые линии), 1х₁W₂[±] (длинные штриховые линии), 1х₁W₂₃⁺⁺ и 1х₁W₂₃⁻⁻ (пунктирные линии), 1х₁W₂₃⁺⁻ и 1х₁W₂₃⁻⁺ (штрихпунктирные линии). Как следует из графиков, влияние W₂ на зависимость $P-v_i$ намного превосходит влияние W₃. Рисунок 2б иллюстрирует возможность комплексного управления зависимостью $P-v_i$ за счет изменения ЭП и температуры. Группы кривых 1–4 соответствуют зависимости $P-v_i$ в НДС 1х₁W₃⁺T[±] (кривые 1), 1х₁W₃⁻T[±] (кривые 2), 1х₁W₂⁺T[±] (кривые 3) и 1х₁W₂⁻T[±] (кривые 4). Сплошными линиями представлены зависимости без учета температуры, штриховые и штрихпунктирные с двумя точками линии отвечают $\tau = -0,04$ и $0,04$. Для оценки эффективности управления зависимостью $P-v_i$ полем и температурой приведены кривые 5 (пунктирная 1х₁W₂₃⁺⁺, штрихпунктирная 1х₁W₂₃⁻⁺) и кривые 6 (пунктирная 1х₁W₂₃⁻⁻, штрихпунктирная 1х₁W₂₃⁻⁺). Здесь $W_2^0 = W_3^0 = W^0 = \pm 0,1$ ($W^0 = 0,1$ соответствует напряженности порядка 10^6 В/м).

Рисунок 2а, б иллюстрирует существенное влияние характера и направленности начального ЭП и температуры на зависимость $P-v_i$. В рамках НДС 1х₁ минимальное влияние оказывает W₃[±], значительно большее влияние оказывает W₂[±]. Начальнодеформированное состояние 1х₁W₂₃⁺⁻, 1х₁W₂₃⁺⁺ незначительно ослабляют, а 1х₁W₂₃⁺⁺, 1х₁W₂₃⁻⁻ усиливают действие НДС 1х₁W₂⁺ и 1х₁W₂⁻ (см. рис. 2а). Из рис. 2б видна роль начальной температуры, которая может либо ослабить (штрихпунктирные с двумя точками линии, группы кривых 1 и 2) либо усилить влияние электростатического поля (группы кривых 3, 4).

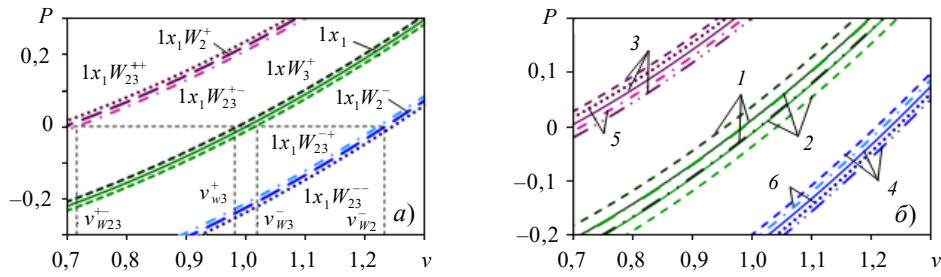


Рис. 2. Влияние ЭП на зависимость напряжение–деформация без учета температуры (а) и с учетом температуры (б)

На рис. 3, 4 в рамках НДС $1x_1$ представлена зависимость $P-v_i$ в отсутствие (рис. 3а) и при наличии начального нагрева (рис. 3б). На рис. 4а–е приведено влияние характера и направленности начального электростатического поля (см. рис. 2в, г) и температуры на величину наведенных деформаций. Сплошная, штрихпунктирная и штриховая линии на рисунках отвечают значениям $\tau = 0, 0,04, -0,04$. Компоненты вектора напряженности начального ЭП равны соответственно $W_2^0 = W_3^0 = W^0 = -0,1$ и $0,1$.

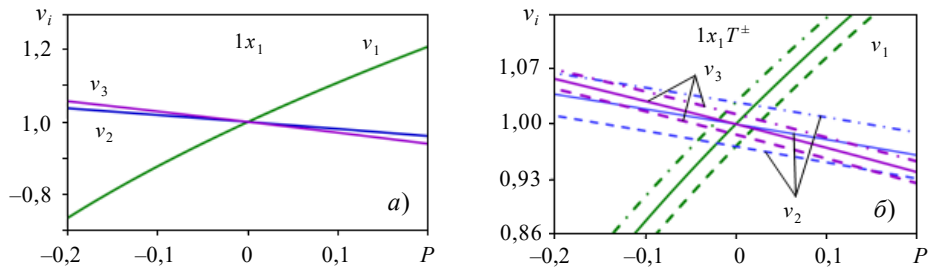


Рис. 3. Зависимость наведенных деформаций от напряжений при НДС $1x_1$: а) в отсутствие начального нагрева; б) при наличии начального нагрева

Рисунок 3 иллюстрирует влияние температуры на диаграмму $P-v_i$ в отсутствие (см. рис. 3а) и при наличии начального нагрева (см. рис. 3б). Как следует из рисунков, влияние температуры на v_3 несколько меньше, чем на v_1 и v_2 . В целом влияние температуры (вне фазовых переходов) приводит к изменениям значений деформаций, характер которых определяется видом и величиной начальных механических воздействий. Иное воздействие оказывает начальное ЭП (рис. 4а–е). В случае НДС $1x_1W_3^{\pm}T^{\pm}$ (рис. 4а, б) наибольшим качественным изменениям подвержены v_3 , характер которых зависит от направления W_3^0 . Деформации v_1 и v_2 меняются незначительно и определяются типом начальных механических воздействий (см. рис. 3а). В случае НДС $1x_1W_2^{\pm}T^{\pm}$ (рис. 4в, г) наблюдаются значительные качественные изменения v_1 и v_2 , их характер определяется направленностью поля. При этом величина изменений при НДС $1x_1W_2^{\pm}T^{\pm}$ существенно превышает изменения при $1x_1W_3^{\pm}T^{\pm}$. Деформации v_3 меняются незначительно.

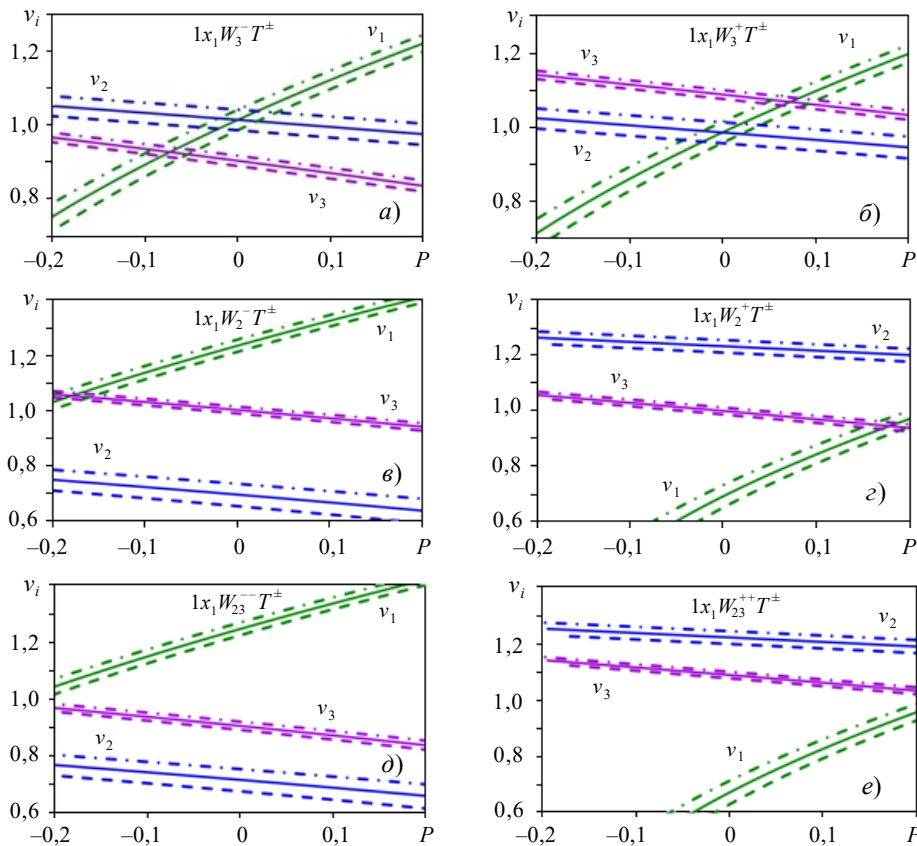


Рис. 4. Влияние электростатического поля и температуры на зависимости $P-v_i$

Заключение

В рамках линеаризованной теории термоэлектроупругости разработана модель пиропьезоэлектрической среды тригональной сингонии класса $3m$, подверженной начальным механическим, электростатическим и тепловым воздействиям. Предполагается, что наведенное в материале НДС однородно, начальная температура не превышает температуры фазовых переходов, начальное ЭП задано вектором напряженности. В рамках сделанных предположений приведена трехмерная постановка динамических задач для термоэлектроупругих материалов, подверженных начальным механическим, электростатическим и тепловым воздействиям. Исследовано раздельное и совместное влияние начальных воздействий на величину наводимых деформаций. Показано характерное для рассматриваемого класса пирозлектриков наличие пьезо- и пирозэффектов: появление электрической индукции при действии механических напряжений вдоль осей и появление электрической индукции под тепловым воздействием в отсутствие механических напряжений. Установлены виды механических воздействий, приводящих к максимальным значениям электрической индукции. Показано, что при совместном тепловом и механическом воздействии определяющую роль в характере наведенных деформаций играют механические напряжения; наличие начальных тепловых воздействий может как компенсировать, так и усилить влияние ЭП. При совместном механическом и электростатическом воздействии наличие

начального ЭП большой напряженности в зависимости от его направленности приводит к качественным изменениям характера деформаций и, как следствие, к значительным изменениям свойств преднапряженного материала.

Список литературы

1. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*. SIAM, Philadelphia. 1961. P. 282–290.
2. Седов Л.И. *Введение в механику сплошной среды*. М.: Физматлит, 1962. 284 с.
3. Nowacki W. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 1965. Vol. 6. No 1. P. 3–12.
4. Tiersten H.F. On the non-linear equations of thermoelastoelectricity. *International Journal of Engineering Science*. 1971. Vol. 9. Iss. 7. P. 587–604.
5. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermo-piezoelectric plate. *International Journal of Solids and Structures*. 1974. Vol. 10. Iss. 6. P. 625–637. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
6. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 1978. Vol. 1. Iss. 2. P. 171–182.
7. Chandrasekharaiah D.S. A temperature rate dependent theory of piezoelectricity. *Journal of Thermal Stresses*. 1984. Vol. 7. P. 293–306. DOI: 10.1080/01495738408942213.
8. Chandrasekharaiah D.S. A generalized linear thermoelastoelectricity theory of piezoelectric media. *Acta Mechanica*. 1988. Vol. 71. Iss. 1–4. P. 39–49. DOI: 10.1007/bf01173936.
9. Sharma M.D. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermo-elastic media. *Acta Mechanica*. 2010. Vol. 215. Iss. 1–4. P. 307–318. DOI: 10.1007/s00707-010-0336-3.
10. Biswas S. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mechanica*. 2020. Vol. 232. Iss. 2. P. 373–387. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:228828992>.
11. Kuang Z.-B., Yuan X.-G. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *Journal of Sound and Vibration*. 2011. Vol. 330. Iss. 6. P. 1111–1120. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.026>.
12. Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2023. Vol. 30. Iss. 14. P. 2941–2952. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2066232>.
13. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для термо-электроупругих сред с разрывными граничными условиями. *Доклады Академии наук*. 2007. Т. 412. №6. С. 753–758.
14. Бабешко В.А., Ратнер С.В., Сыромятников П.В. О смешанных задачах для многослойных анизотропных композитов. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2006. Т. 2. №4. С. 5–11.
15. Othmani C., Khelifa T. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials. *Mechanics Research Communications*. 2023. Vol. 127. Article No 104037. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104037>.
16. Othmani C., Zhang H., Lü C. Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial expansion approach. *Applied Mathematical Modelling*. 2020. Vol. 78. P. 148–168. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.017>.
17. Kumar D., Kundu S. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media*. 2023. Vol. 33. DOI: 10.1080/17455030.2022.2164093.
18. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г. Об описании влияния конечных деформаций на скорости распространения упругих волн. *Докл. АН СССР*. 1971. Т. 198. №2. С. 316–318.
19. Гринфельд М.А., Мовчан А.А. Влияние предварительного деформирования на распространение упругих волн. *Изв. АН СССР. Сер. Физика Земли*. 1975. Т. 8. С. 29–35.
20. Лурье А.И. *Нелинейная теория упругости*. М.: Наука, 1980. 512 с.

21. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
22. Калинин В.В., Белянкова Т.И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел*. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
23. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Шейдаков Д.Н. Уравнения динамики преднапряженной электро-термоупругой среды. *Вестник ЮНЦ РАН*. 2011. Т. 7. № 2. С. 3–10.
24. Белянкова Т.И., Калинин В.В. О влиянии электростатического поля на ПАВ в предварительно напряженных сегнетоэлектрических гетероструктурах. *Известия РАН. Механика твердого тела*. 2020. № 6. С. 101–110. DOI: 10.31857/S0572329920050037.
25. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Волны Рэлея в электроупругой среде с преднапряженным неоднородным покрытием. *Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия*. 2023. Т. 10(68). №4. С. 600–615. <https://doi.org/10.21638/spbu01.2023.402>.
26. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Функция Грина преднапряженного термоэлектроупругого функционально-градиентного слоя. *Вестник Южного научного центра РАН*. 2014. Т. 10. № 4. С. 5–15.
27. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52(1). P. 95–110. <https://doi.org/10.3103/S0025654417010113>.
28. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В. Влияние начальных механических, электростатических и температурных воздействий на свойства пиропьезоэлектриков гексагональной сингонии. *Наука юга России*. 2023. Т. 19. № 4. С. 3–17. DOI: 10.7868/S25000640230401.
29. Pluta M., Buttler M., Habib A. et.al. Modeling of Coulomb coupling and acoustic wave propagation in LiNbO₃. *Ultrasonic*. 2008. Vol. 48. Iss. 6-7. P. 583–586. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.07.008.
30. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Shilkina L.A., Razumovskaya O.N., Dudkina S.I., Gadzhiev G.G., Kallaev S.N., Omarov Z.M. Properties of Na_{0.875}Li_{0.125}NbO₃ ceramics. *Inorganic Materials*. 2008. Vol. 44. Iss. 10. P. 1135–1150. DOI:10.1134/S002016850810021X.
31. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Fomenko D.S. Dielectric properties of Na_{1-x}K_xNbO₃ and Na_{1-x}Li_xNbO₃ ceramics and Na_{1-x}Li_xNbO₃ ceramics. *Inorganic Materials*. 2011. Vol. 47. Iss. 5. P. 561–569. DOI: 10.1134/S0020168511050141.
32. Palatnikov M.N., Shcherbina O.B., Efremov V.V., Sidorov N.V., Salak A.N. Microstructure and Young's modulus of high-pressure Li_xNa_{1-x}Ta_yNb_{1-y}O₃ ceramics. *Inorganic Materials*. 2011. Vol. 47. Iss. 6. P. 686–689. DOI: 10.1134/S0020168511050189.
33. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on LiNbO₃. *Journal of Advanced Dielectrics*. 2021. Vol. 11. No 5. Article No 2160007. <https://doi.org/10.1142/S2010135X21600079>.
34. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Ломакина Л.В. Расчет однородного начально-деформированного состояния, наведенного в термоэлектроупругих материалах тригональной системы класса 3m за счет механических, электрических и температурных воздействий. *Свидетельство о регистрации программы для ЭВМ*. Номер свидетельства: RU 2023614530. Патентное ведомство: Россия, номер заявки 2023613291, дата регистрации: 21.02.2023; опублик. 02.03.2023.
35. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*. 1967. Vol. 6. No 2. P. 151. DOI: 10.1143/JJAP.6.151.
36. Най Дж. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц*. М.: Мир, 1967. 385 с.

References

1. Mindlin R.D. On the equations of motion of piezoelectric crystals. In: *Problems of Continuum Mechanics: Contributions in Honor of the Seventieth Birthday of Academician N.I. Muskhelishvili*. SIAM, Philadelphia. 1961. P. 282–290.

2. Sedov L.I. *Vvedenie v mekhaniku sploshnoy sredy* [Introduction to Continuum Mechanics]. Moscow. Fizmatlit Publ. 1962. 284 p. (In Russian).
3. Nowacki W. A reciprocity theorem for coupled mechanical and thermoelectric fields in piezoelectric crystals. *Proceedings of Vibration Problems*. 1965. Vol. 6. No 1. P. 3–12.
4. Tiersten H.F. On the non-linear equations of thermoelectroelasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 1971. Vol. 9. Iss. 7. P. 587–604. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(71\)90062-0](https://doi.org/10.1016/0020-7225(71)90062-0).
5. Mindlin R.D. Equations of high frequency vibrations of thermo-piezoelectric plate. *Int. J. Solids Struct.* 1974. Vol. 10. Iss. 6. P. 625–637. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(74\)90047-X](https://doi.org/10.1016/0020-7683(74)90047-X).
6. Nowacki W. Some general theorems of thermo-piezoelectricity. *J. Therm. Stresses*. 1978. Vol. 1. Iss. 2. P. 171–182.
7. Chandrasekharaiah D.S. A temperature rate dependent theory of piezoelectricity. *J. Therm. Stresses*. 1984. Vol. 7. P. 293–306. DOI: 10.1080/01495738408942213.
8. Chandrasekharaiah D.S. A generalized linear thermoelasticity theory of piezoelectric media. *Acta Mech.* 1988. Vol. 71. Iss. 1–4. P. 39–49. DOI: 10.1007/bf01173936.
9. Sharma M.D. Propagation of inhomogeneous waves in anisotropic piezo-thermo-elastic media. *Acta Mech.* 2010. Vol. 215. Iss. 1–4. P. 307–318. DOI: 10.1007/s00707-010-0336-3.
10. Biswas S. Surface waves in piezothermoelastic transversely isotropic layer lying over piezothermoelastic transversely isotropic half-space. *Acta Mech.* 2020. Vol. 232. Iss. 2. P. 373–387. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:228828992>.
11. Kuang Z.-B., Yuan X.-G. Reflection and transmission of waves in pyroelectric and piezoelectric materials. *J. Sound Vib.* 2011. Vol. 330. Iss. 6. P. 1111–1120. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2010.09.026>.
12. Singh P., Singh A.K., Paswan B., Chattopadhyay A. Mathematical study on reflection and transmission of plane waves in a rotating piezo-thermo-elastic composite structure. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2023. Vol. 30. Iss. 14. P. 2941–2952. <https://doi.org/10.1080/15376494.2022.2066232>.
13. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. O smeshannykh zadachakh dlya termoelektrouprugikh sred s razryvnymi granichnymi usloviyami [On mixed problems for thermoelectroelastic media with discontinuous boundary conditions]. *Doklady Akademii nauk* [Proceedings of the Academy of Sciences]. 2007. Vol. 412. No 6. P. 753–758 (In Russian).
14. Babeshko V.A., Ratner S.V., Syromyatnikov P.V. O smeshannykh zadachakh dlya mnogoslonykh anizotropnykh kompozitov [About combined boundary-value problems in anisotropic multilayered composites]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN*. 2006. Vol. 2. No 4. P. 5–11 (In Russian).
15. Othmani C., Khelifa T. Effect of graded pre-stress on the propagation of guided waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials. *Mech. Res. Commun.* 2023. Vol. 127. Article No 104037. <https://doi.org/10.1016/j.mechrescom.2022.104037>.
16. Othmani C., Zhang H., Lü C. Effects of initial stresses on guided wave propagation in multilayered PZT-4/PZT-5A composites: A polynomial expansion approach. *Appl. Math. Model.* 2020. Vol. 78. P. 148–168. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.10.017>.
17. Kumar D., Kundu S. Effect of initial stresses on the surface wave propagation in highly anisotropic piezoelectric composite media. *Waves in Random and Complex Media*. 2023. Vol. 33. DOI: 10.1080/17455030.2022.2164093.
18. Guz A.N., Makhort F.G. Ob opisaniy vliyaniya konechnykh deformatsiy na skorosti rasprostraneniya uprugikh voln [Description of the effect of finite deformations on the velocity of propagation of elastic waves]. *Doklady Akademii Nauk SSSR*. 1971. Vol. 198. No 2. P. 316–318 (In Russian).
19. Grinfeld M.A., Movchan A.A. Vliyanie predvaritelnogo deformirovaniya na rasprostranenie uprugikh voln [The influence of preliminary deformation on propagation of elastic waves]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Fizika Zemli*. 1975. T. 8. P. 29–35 (In Russian).
20. Lurie A.I. *Nelineynaya teoriya uprugosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 512 p. (In Russian).
21. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [Waves in Continuous Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).
22. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritelno*

napryazhennykh elektrouprugikh tel [Dynamic Contact Problems for Prestressed Electroelastic Media]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 272 p. (In Russian).

23. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Sheydakov D.N. Uravneniya dinamiki prednapryazhennoy elektro-termouprugoy sredy [Dynamics equations for prestressed electro-thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN*. 2011. Vol. 7. No 2. P. 3–10.

24. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Influence of an electrostatic field on saw in prestressed ferroelectric heterostructures. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. No 6. P. 844–851.

25. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Volny Releya v elektrouprugoy srede s prednapryazhennym neodnorodnym pokrytiem [Rayleigh waves in an electroelastic medium with prestressed inhomogeneous coating]. *Vestnik SPbGU. Matematika. Mekhanika. Astronomiya* [Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy]. 2023. Vol. 10(68). No 4. P. 600–615. (In Russian).

26. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Funktsiya Grina prednapryazhennogo termoelektro-uprugogo funktsionalno-gradientnogo sloya [Green's function of a prestressed thermoelectroelastic functionally graded layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra RAN*. 2014. Vol. 10. No 4. P. 5–15 (In Russian).

27. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 2017. Vol. 52(1). P. 95–110. <https://doi.org/10.3103/S0025654417010113>.

28. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. Vliyanie nachalnykh mekhanicheskikh, elektrostaticheskikh i temperaturnykh vozdeystviy na svoystva piropiezoelektrikov geksagonalnoy singonii [The influence of initial mechanical, electrostatic and temperature effects on the properties of pyropiezoelectrics of the hexagonal system]. *Nauka yuga Rossii* [Science in the South of Russia]. 2023. Vol. 19. No 4. P. 3–17 (In Russian).

29. Pluta M., Buttlar M., Habib A. et al. Modeling of Coulomb coupling and acoustic wave propagation in LiNbO₃. *Ultrasonic*. 2008. Vol. 48. Iss. 6-7. P. 583–586. DOI: 10.1016/j.ultras.2008.07.008.

30. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Shilkina L.A., Razumovskaya O.N., Dudkina S.I., Gadzhiev G.G., Kallaev S.N., Omarov Z.M. Properties of Na_{0.875}Li_{0.125}NbO₃ ceramics. *Inorg. Mater*. 2008. Vol. 44. Iss. 10. P. 1135–1150. DOI:10.1134/S002016850810021X.

31. Kravchenko O.Yu., Reznichenko L.A., Fomenko D.S. Dielectric properties of Na_{1-x}K_xNbO₃ and Na_{1-x}Li_xNbO₃ ceramics. *Inorg. Mater*. 2011. Vol. 47. Iss. 5. P. 561–569. DOI: 10.1134/S0020168511050141.

32. Palatnikov M.N., Shcherbina O.B., Efremov V.V., Sidorov N.V., Salak A.N. Microstructure and Young's modulus of high-pressure Li_xNa_{1-x}Ta_yNb_{1-y}O₃ ceramics. *Inorg. Mater*. 2011. Vol. 47. Iss. 6. P. 686–689. DOI: 10.1134/S0020168511050189.

33. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Tukodova O.M. Specific features of SH-waves propagation in structures with prestressed inhomogeneous coating made of piezoceramics based on LiNbO₃. *J. Adv. Dielectr*. 2021. Vol. 11. No 5. Article No 2160007. <https://doi.org/10.1142/S2010135X21600079>.

34. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V. Raschet odnorodnogo nachalno-deformirovannogo sostoyaniya, navedennogo v termoelektrouprugikh materialakh trigonalnoy sistemy klassa 3m za schet mekhanicheskikh, elektricheskikh i temperaturnykh vozdeystviy [Calculation of a homogeneous initial deformed state induced in thermoelectroelastic materials of a class 3m trigonal system due to mechanical, electrical and temperature influences]. *Svidetelstvo o registratsii programmy dlya EVM*. Nomer svidetelstva: RU 2023614530. Patentnoe vedomstvo: Rossiya, nomer zayavki 2023613291, data registratsii: 21.02.2023; opubl. 02.03.2023 [Certificate of registration of a computer program. Certificate number: RU 2023614530. Patent office: Russia, application number 2023613291, registration date: 2023/02/21; publ. 2023/03/02].

35. Yamada T., Niizeki N., Toyoda H. Piezoelectric and elastic properties of lithium niobate single crystals. *Japanese Journal of Applied Physics*. 1967. Vol. 6. No 2. P. 151. DOI: 10.1143/JJAP.6.151.

36. Nye J.F. *Physical Properties of Crystals, their Representation by Tensors and Matrices*. Oxford. Clarendon Press. 1964. 352 p.

FEATURES OF THE INITIAL DEFORMED STATE OF PYROPEZOELECTRICS OF TRIGONAL SYSTEM*

Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lomakina L.V.

*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
Rostov-on-Don, Russian Federation*

ssc-ras@ssc-ras.ru

Received by the Editor 2024/03/22

A model of a prestressed thermoelectroelastic medium under conditions of initial mechanical stress, electrostatic field and temperature is proposed. Within the framework of the coupled theory of thermoelectroelasticity, linearized constitutive relations and equations of motion of a prestressed thermoelectroelastic medium are constructed. It is assumed that the initial deformed state induced in the material is homogeneous, the initial temperature does not exceed the temperature of phase transitions, and the initial electrostatic field is specified by the electric field strength vector. Within the framework of the assumptions made, a three-dimensional formulation of dynamic problems for prestressed semi-bounded media made of the materials under consideration is given. Using operational calculus methods, the problem is reduced to a system of ordinary differential equations, the solution of which is presented in matrix form and allows one to analyze the influence of external factors of various natures on the dynamics of a prestressed thermoelectroelastic medium. Particular attention is paid to a detailed study of the initial deformed state of the material under conditions of separate and combined exposure to mechanical stress, electrostatic field and temperature. The presence of piezo- and pyro-effects, characteristic of the class of pyroelectrics under consideration, is shown: the appearance of electrical induction under the action of mechanical stresses along the axes, and the appearance of electrical induction under thermal influence in the absence of mechanical stresses. The types of mechanical influences leading to maximum values of electrical induction have been established. It is shown that under combined temperature and mechanical influences, mechanical stresses play a decisive role in the nature of the induced deformations. The presence of an initial temperature can either weaken or strengthen the influence of the electrostatic field. With a combined mechanical and electrostatic effect, the presence of an initial electrostatic field of high intensity, depending on its direction, leads to qualitative changes in the nature of the stress-strain state.

The research results are presented in dimensionless parameters, presented in the form of graphs and may be of particular interest in the development, design and optimization of pyro piezoelectric materials used in the creation of new micro- and nano-sized devices and devices for general purposes.

Keywords: thermoelectroelasticity, prestressed thermoelectroelastic medium, initial mechanical stresses, initial electrostatic field, preheating, trigonal system, symmetry class 3m, lithium niobate.

*This study was carried out within the state task implementation of Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences (state registration number 122020100343-4).