

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-215-234

**ТРАНСФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ
СТЕРЖНЯ-ПОЛОСЫ, ЗАКРЕПЛЕННОГО
НА ДВУХСТОРОННИХ СКОЛЬЗЯЩИХ ОПОРАХ***

© 2024 г.

Паймушин В.Н.^{1,2}, Шишкин В.М.³

¹*Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация*

²*Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Российская Федерация*

³*Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация*

vrajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2024

Построена линейная трансформационная модель динамического деформирования стержня-полосы, концевые участки которого закреплены на двухсторонних скользящих опорах конечной длины, исключающих перемещения точек отмеченных участков в поперечном направлении. Для описания процесса деформирования закрепленных участков стержня используется сдвиговая модель С.П. Тимошенко, а незакрепленной части – классическая модель Кирхгофа – Лява. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленного участков стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, в геометрически линейном приближении получены уравнения движения, соответствующие им граничные условия, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков. На основе полученных уравнений движения построены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях рассматриваемого стержня. Показано, что в рамках используемых моделей деформирования задачи о продольных и изгибных колебаниях стержня разделяются. Из них наибольший практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие в сравнительно низком диапазоне частот. Для них проведены численные эксперименты по определению трех низших собственных форм и частот колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях на отмеченных частотах стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углерента ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показана значительная трансформация поперечных касательных напряжений при переходе через границы от незакрепленного участка стержня к участкам закрепления конечной длины, обусловленная различием моделей деформирования отмеченных участков, а также их ярко выраженная локализация в областях закрепленных участков, расположенных вблизи отмеченных границ.

* Выполнено за счет средств РНФ (проект № 23-19-00021).

Ключевые слова: колебания, стержень-полоса, участок закрепления конечной длины, скользящая опора, трансформационная модель деформирования.

Введение

При постановке и решении задач механики деформирования тонкостенных элементов конструкций реальные условия их закрепления на опорных элементах обычно заменяют граничными условиями того или иного вида (например, шарнирного опирания или жесткого защемления [1–3]), что, безусловно, вносит погрешность в решения таких задач. Так, постановка даже статических задач механики деформирования элементов конструкции с рассмотрением лишь их отдельных участков и формулировкой в концевых сечениях кинематических граничных условий защемления может иметь недостаточную степень точности, если не учесть, что места крепления конструкции всегда имеют некоторую конечную длину, в пределах которой необходимо учитывать податливость закрепленных участков.

Расчет конструкции с учетом податливости отмеченных участков закрепления конечной длины представляет собой весьма сложную и трудоемкую задачу, что обусловило разработку упрощенных моделей (применительно к балкам и удлиненным пластинам), основанных на замене реальных их участков закрепления локальными упругими и вязкоупругими опорными связями, формулируемыми в точках, а также фрикционными зажимами. Исследования такого класса нашли достаточно полное отражение во многих работах (например, [4–7] и др.).

В ранее опубликованных статьях авторов [8–13] было показано, что для описания процессов статического и динамического деформирования удлиненных элементов тонкостенных конструкций (в том числе и плоских стержней), имеющих участки закрепления конечной длины, требуется введение понятия трансформации параметров напряженно-деформированного состояния (НДС) при переходе через границу от незакрепленного участка к закрепленному (от закрепленного к незакрепленному) и применяемых для описания этих параметров математических моделей. В них рассматривался простейший тонкостенный элемент конструкции в виде стержня-полосы с участками закрепления, расположенными только на одной из лицевых поверхностей, что обычно имеет место при креплении элементов тонкостенных конструкций к опорным элементам или соединении их между собой внахлест (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов). Для таких элементов в простейшем варианте учет податливости участков закрепления конечной длины может состоять в преобразовании известной сдвиговой модели С.П. Тимошенко в другую, названную трансформационной.

Если же закрепление участка конечной длины является двухсторонним, то есть осуществляется по обеим лицевым поверхностям, то учет податливости закрепленного участка на основе отмеченной модели, как показано в статье [10], невозможен. Для этого требуется привлечение моделей деформирования более высокого порядка точности. Применительно к незакрепленным участкам тонкостенных элементов конструкций разработке таких моделей к настоящему времени посвящена обширная научная литература [14–19 и др.], критический анализ которой проведен, в частности, в статьях [20, 21].

В настоящей статье рассматривается задача модального анализа и определения динамической реакции при изгибных колебаниях стержня-полосы, имеющего по

краям участка конечной длины, закрепленные на двухсторонних скользящих опорах. В отличие от упомянутых моделей деформирования высокого порядка точности, для решения рассматриваемой задачи предлагается трансформационная модель деформирования стержня с простейшими аппроксимациями перемещений на его участках: в пределах закрепленных частей стержня используется сдвиговая модель С.П. Тимошенко, а в незакрепленной части – классическая модель Кирхгофа – Лява. Заметим, что по аналогии с предлагаемой расчетной схемой стержня, имеющего по краям двухсторонние скользящие опоры конечной длины, может быть построена трансформационная модель деформирования валов для анализа их изгибных и крутильных колебаний в уточненной постановке задачи.

1. Основные соотношения и уравнения движения стержня

Рассматривается стержень-полоса единичной ширины, имеющий на участках закрепления 1, 2 двухсторонние скользящие опоры конечной длины l (рис. 1), исключаяющие перемещения граничных поверхностей $z = \pm t/2$ отмеченных участков в направлении оси Oz , при действии поверхностной нагрузки $p = p(x, \tau)$ на незакрепленном участке 3 стержня (τ – время).

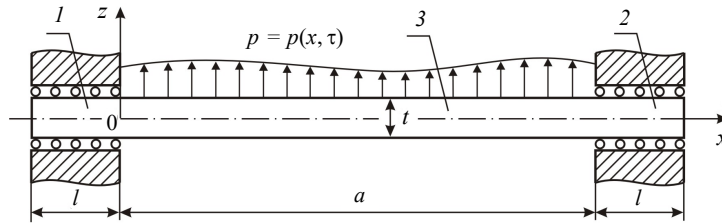


Рис. 1. Схема закрепления и нагружения стержня-полосы

Процесс деформирования закрепленных участков стержня будем описывать сдвиговой моделью С.П. Тимошенко, в соответствии с которой для перемещений $U^{(r)}, W^{(r)}$ ($r = 1, 2$) произвольных точек поперечных сечений указанных участков в направлениях осей Ox, Oz принимаются аппроксимации

$$U^{(1)} = u^{(1)} + z\gamma^{(1)}, \quad W^{(1)} \equiv 0, \quad U^{(2)} = u^{(2)} + z\gamma^{(2)}, \quad W^{(2)} \equiv 0, \quad (1)$$

где $u^{(r)}, \gamma^{(r)}$ ($r = 1, 2$) – соответственно осевые перемещения и углы поворота поперечных сечений отмеченных участков стержня (верхние индексы 1, 2 в скобках здесь и далее относятся соответственно к интервалам $-l \leq x \leq 0$ и $a \leq x \leq a+l$).

Аппроксимациям (1) в геометрически линейном приближении соответствуют осевые деформации и углы сдвига (нижний индекс x после запятой здесь и далее означает дифференцирование соответствующей величины по координате x)

$$\varepsilon_x^{(r)} = u_{,x}^{(r)} + z\gamma_{,x}^{(r)}, \quad \gamma_{xz}^{(r)} = \gamma^{(r)}, \quad r = 1, 2, \quad (2)$$

а также компоненты напряжений

$$\sigma_x^{(r)} = E_1(u_{,x}^{(r)} + z\gamma_{,x}^{(r)}), \quad \sigma_{xz}^{(r)} = G_{13}\gamma^{(r)}, \quad r = 1, 2, \quad (3)$$

где E_1, G_{13} – модули упругости материала соответственно при растяжении-сжатии в направлении оси Ox и при сдвиге в плоскости Oxz .

На участках закрепления вариации потенциальной энергии деформации будут определяться выражениями¹

$$\begin{aligned}\delta\Pi^{(1)} &= \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(1)} \delta\varepsilon_x^{(1)} + \sigma_{xz}^{(1)} \delta\gamma^{(1)}) dx dz, \\ \delta\Pi^{(2)} &= \int_a^{a+l} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x^{(2)} \delta\varepsilon_x^{(2)} + \sigma_{xz}^{(2)} \delta\gamma^{(2)}) dx dz,\end{aligned}\quad (4)$$

которые после подстановки в них зависимостей (2), (3) и интегрирования по переменной z можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\delta\Pi^{(1)} &= \int_{-l}^0 (T_x^{(1)} \delta u_{,x}^{(1)} + M_x^{(1)} \delta\gamma_{,x}^{(1)} + T_{xz}^{(1)} \delta\gamma^{(1)}) dx = \\ &= T_x^{(1)} \delta u^{(1)} \Big|_{x=-l}^{x=0} - \int_{-l}^0 T_{x,x}^{(1)} \delta u^{(1)} dx + M_x^{(1)} \delta\gamma^{(1)} \Big|_{x=-l}^{x=0} - \int_{-l}^0 (M_{x,x}^{(1)} - T_{xz}^{(1)}) \delta\gamma^{(1)} dx, \\ \delta\Pi^{(2)} &= \int_a^{a+l} (T_x^{(2)} \delta u_{,x}^{(2)} + M_x^{(2)} \delta\gamma_{,x}^{(2)} + T_{xz}^{(2)} \delta\gamma^{(2)}) dx = \\ &= T_x^{(2)} \delta u^{(2)} \Big|_{x=a}^{x=a+l} - \int_a^{a+l} T_{x,x}^{(2)} \delta u^{(2)} dx + M_x^{(2)} \delta\gamma^{(2)} \Big|_{x=a}^{x=a+l} - \int_a^{a+l} (M_{x,x}^{(2)} - T_{xz}^{(2)}) \delta\gamma^{(2)} dx,\end{aligned}\quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}T_x^{(r)} &= B_{11} u_{,x}^{(r)}, \quad T_{xz}^{(r)} = B_{13} \gamma^{(r)}, \quad M_x^{(r)} = D_{11} \gamma_{,x}^{(r)}, \quad r = 1, 2, \\ B_{11} &= E_1 t, \quad B_{13} = G_{13} t, \quad D_{11} = E_1 t^3 / 12.\end{aligned}\quad (6)$$

В соответствии с (1) выражения для вариации работы инерционных сил закрепленных участков будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\delta K^{(1)} &= - \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} \rho \ddot{U}^{(1)} \delta U^{(1)} dx dz = -\rho \int_{-l}^0 \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{u}^{(1)} + z \ddot{\gamma}^{(1)}) (\delta u^{(1)} + z \delta\gamma^{(1)}) dx dz = \\ &= -\rho t \int_{-l}^0 \ddot{u}^{(1)} \delta u^{(1)} dx - \frac{\rho t^3}{12} \int_{-l}^0 \ddot{\gamma}^{(1)} \delta\gamma^{(1)} dx, \\ \delta K^{(2)} &= - \int_a^{a+l} \int_{-t/2}^{t/2} \rho \ddot{U}^{(2)} \delta U^{(2)} dx dz = -\rho \int_a^{a+l} \int_{-t/2}^{t/2} (\ddot{u}^{(2)} + z \ddot{\gamma}^{(2)}) (\delta u^{(2)} + z \delta\gamma^{(2)}) dx dz = \\ &= -\rho t \int_a^{a+l} \ddot{u}^{(2)} \delta u^{(2)} dx - \frac{\rho t^3}{12} \int_a^{a+l} \ddot{\gamma}^{(2)} \delta\gamma^{(2)} dx.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь ρ – плотность материала стержня.

Процесс деформирования незакрепленного участка стержня будем описывать классической моделью Кирхгофа – Лява, в соответствии с которой для перемещений $U^{(3)}$, $W^{(3)}$ произвольных точек поперечных сечений этого участка в направлениях осей Ox , Oz принимаются аппроксимации

¹Здесь и ниже по тексту значения энергии, сил, а также моментов сил приходятся на единицу ширины стержня.

$$U^{(3)} = u^{(3)} - zw_{,x}^{(3)}, \quad W^{(3)} = w^{(3)}, \quad (8)$$

где $u^{(3)}$, $w^{(3)}$ – соответственно продольные перемещения и прогибы точек, расположенных на оси Ox отмеченного участка стержня (верхний индекс 3 здесь и далее относится к интервалу $0 \leq x \leq a$). Аппроксимациям (8) в геометрически линейном приближении соответствуют осевые деформации и нормальные напряжения

$$\varepsilon_x^{(3)} = u_{,x}^{(3)} - zw_{,xx}^{(3)}, \quad \sigma_x^{(3)} = E_1 \varepsilon_x^{(3)} = E_1 (u_{,x}^{(3)} - zw_{,xx}^{(3)}). \quad (9)$$

Вариация потенциальной энергии деформации указанного участка будет определяться выражением

$$\delta\Pi^{(3)} = \int_{-l}^0 \int_{-l/2}^{l/2} \sigma_x^{(3)} \delta\varepsilon_x^{(3)} dx dz = E_1 \int_{-l}^0 \int_{-l/2}^{l/2} (u_{,x}^{(3)} - zw_{,xx}^{(3)}) (\delta u_{,x}^{(3)} - z \delta w_{,xx}^{(3)}) dx dz, \quad (10)$$

которое после интегрирования по переменной z можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta\Pi^{(3)} &= \int_0^a (T_x^{(3)} \delta u_{,x}^{(3)} - M_x^{(3)} \delta w_{,xx}^{(3)}) dx = \\ &= (T_x^{(3)} \delta u^{(3)} - M_x^{(3)} \delta w_{,x}^{(3)} + Q_z^{(3)} \delta w^{(3)}) \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a (T_{x,x}^{(3)} \delta u^{(3)} + Q_{z,x}^{(3)} \delta w^{(3)}) dx, \end{aligned} \quad (11)$$

где $T_x^{(3)}$, $M_x^{(3)}$, $Q_z^{(3)}$ – соответственно осевая сила, изгибающий момент и поперечная сила в произвольном сечении незакрепленной части стержня, определяемые соотношениями упругости

$$T_x^{(3)} = B_{11} u_{,x}^{(3)}, \quad M_x^{(3)} = -D_{11} w_{,xx}^{(3)}, \quad Q_z^{(3)} = M_{x,x}^{(3)} = -D_{11} w_{,xxx}^{(3)}. \quad (12)$$

В соответствии с (8) запишем выражение для вариации работы инерционных сил:

$$\begin{aligned} \delta K^{(3)} &= -\rho \int_0^a \int_{-l/2}^{l/2} [(\ddot{u}^{(3)} - z \ddot{w}_{,x}^{(3)}) (\delta u^{(3)} - z \delta w_{,x}^{(3)}) + \ddot{w}^{(3)} \delta w^{(3)}] dx dz = \\ &= -\rho t \int_0^a \left(\ddot{u}^{(3)} \delta u^{(3)} + \frac{t^2}{12} \ddot{w}_{,x}^{(3)} \delta w_{,x}^{(3)} + \ddot{w}^{(3)} \delta w^{(3)} \right) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Пренебрегая в (13) подчеркнутым слагаемым, обусловленным силами инерции при повороте поперечного сечения стержня, приходим к выражению

$$\delta K^{(3)} = -\rho t \int_0^a (\ddot{u}^{(3)} \delta u^{(3)} + \ddot{w}^{(3)} \delta w^{(3)}) dx. \quad (14)$$

Подчинив аппроксимации (1) и (8) условиям непрерывности перемещений стержня в сечениях $x = 0$ и $x = a$, записываемым в виде

$$U^{(1)} \Big|_{x=0} = U^{(3)} \Big|_{x=0}, \quad W^{(1)} \Big|_{x=0} = W^{(3)} \Big|_{x=0}, \quad U^{(2)} \Big|_{x=a} = U^{(3)} \Big|_{x=a}, \quad W^{(2)} \Big|_{x=a} = W^{(3)} \Big|_{x=a},$$

путем приравнивания соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях z получим кинематические условия сопряжения участков

$$\begin{aligned} u^{(1)} \Big|_{x=0} &= u^{(3)} \Big|_{x=0}, \quad \gamma^{(1)} \Big|_{x=0} = -w_{,x}^{(3)} \Big|_{x=0}, \quad w^{(3)} \Big|_{x=0} = 0, \\ u^{(2)} \Big|_{x=a} &= u^{(3)} \Big|_{x=a}, \quad \gamma^{(2)} \Big|_{x=a} = -w_{,x}^{(3)} \Big|_{x=a}, \quad w^{(3)} \Big|_{x=a} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Для вывода уравнений движения рассматриваемого стержня (см. рис. 1) воспользуемся принципом Гамильтона – Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\sum_{m=1}^3 (\delta\Pi^{(m)} - \delta K^{(m)}) - \delta A \right] d\tau = 0. \quad (16)$$

При действии на незакрепленную часть стержня поверхностной нагрузки $p = p(x, \tau)$ вариация работы этой нагрузки определяется равенством

$$\delta A = \int_0^a p \delta w^{(3)} dx. \quad (17)$$

Из уравнения (16) после подстановки в него составленных соотношений (5), (7), (11), (14), (17) и последующего учета условий сопряжения (15) в силу произвольности вариаций $\delta u^{(r)}$, $\delta \gamma^{(r)}$ ($r = 1, 2$), $\delta u^{(3)}$ и $\delta w^{(3)}$, а также отличия их от нуля следуют уравнения движения закрепленных участков стержня:

$$T_{x,x}^{(r)} - \rho t \ddot{u}^{(r)} = 0, \quad M_{x,x}^{(r)} - T_{xz}^{(r)} - \frac{\rho t^3}{12} \ddot{\gamma}^{(r)} = 0, \quad r = 1, 2, \quad (18)$$

и соответствующие им граничные условия на краях $x = -l$, $x = a + l$

$$T_x^{(1)} \Big|_{x=-l} = 0, \quad M_x^{(1)} \Big|_{x=-l} = 0, \quad T_x^{(2)} \Big|_{x=a+l} = 0, \quad M_x^{(2)} \Big|_{x=a+l} = 0; \quad (19)$$

уравнения движения незакрепленного участка

$$T_{x,x}^{(3)} - \rho t \ddot{u}^{(3)} = 0, \quad Q_{z,x}^{(3)} - \rho t \dot{w}^{(3)} + p = 0, \quad (20)$$

а также силовые условия сопряжения участков, формулируемые в сечениях $x = 0$ и $x = a$,

$$\begin{aligned} (T_x^{(1)} - T_x^{(3)}) \Big|_{x=0} &= 0, & (M_x^{(1)} - M_x^{(3)}) \Big|_{x=0} &= 0, \\ (T_x^{(2)} - T_x^{(3)}) \Big|_{x=a} &= 0, & (M_x^{(2)} - M_x^{(3)}) \Big|_{x=a} &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

На основе полученных уравнений движения закрепленных и незакрепленного участков стержня (18), (20) с учетом условий (15), (19) и (21) можно ставить и решать две основные задачи, состоящие в определении требуемого спектра собственных форм и частот колебаний рассматриваемого стержня, а также его динамической реакции при действии заданной нагрузки $p = p(x, \tau)$.

2. Определение собственных форм и частот колебаний стержня (модальный анализ)

При использовании (6) уравнения (18) для закрепленных участков стержня принимают вид

$$B_{11} u_{,xx}^{(r)} - \rho t \ddot{u}^{(r)} = 0, \quad D_{11} \gamma_{,xx}^{(r)} - B_{13} \gamma^{(r)} - \rho t^3 \ddot{\gamma}^{(r)} / 12 = 0, \quad r = 1, 2. \quad (22)$$

Их решения будем искать в форме

$$u^{(r)} = \tilde{u}^{(r)} \exp i\omega t, \quad \gamma^{(r)} = \tilde{\gamma}^{(r)} \exp i\omega t, \quad r = 1, 2, \quad (23)$$

где i – мнимая единица, ω – круговая частота. Подставляя (23) в (22), получаем уравнения

$$\tilde{u}_{,xx}^{(r)} + k_u^2 \tilde{u}^{(r)} = 0, \quad \tilde{\gamma}_{,xx}^{(r)} - k^2 \tilde{\gamma}^{(r)} = 0, \quad r = 1, 2, \quad (24)$$

с коэффициентами

$$k_u^2 = \frac{\rho t \omega^2}{B_{11}}, \quad k^2 = k_0^2 - \frac{\rho \omega^2}{E_1}, \quad k_0^2 = \frac{12 G_{13}}{E_1 t^2}.$$

Общие решения уравнений (24) имеют вид

$$\tilde{u}^{(r)} = c_1^{(r)} \cos k_u x + c_2^{(r)} \sin k_u x, \quad \tilde{\gamma}^{(r)} = d_1^{(r)} \exp kx + d_2^{(r)} \exp(-kx), \quad r = 1, 2. \quad (25)$$

Здесь $c_1^{(r)}, c_2^{(r)}, d_1^{(r)}, d_2^{(r)}$ – постоянные интегрирования.

В соответствии с представлениями (23) усилия $T_x^{(r)}, T_{xz}^{(r)}$ и моменты $M_x^{(r)}$ в закрепленных частях стержня будут определяться выражениями

$$T_x^{(r)} = \tilde{T}_x^{(r)} \exp i\omega t, \quad T_{xz}^{(r)} = \tilde{T}_{xz}^{(r)} \exp i\omega t, \quad M_x^{(r)} = \tilde{M}_x^{(r)} \exp i\omega t, \quad r = 1, 2, \quad (26)$$

в которых величины $\tilde{T}_x^{(r)}, \tilde{T}_{xz}^{(r)}, \tilde{M}_x^{(r)}$ на основании соотношений (6) и полученных решений (25) определяются по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x^{(r)} &= B_{11} \tilde{u}_{,x}^{(r)} = B_{11} k_u [-c_1^{(r)} \sin k_u x + c_2^{(r)} \cos k_u x], \\ \tilde{T}_{xz}^{(r)} &= B_{13} \tilde{\gamma}^{(r)} = B_{13} [d_1^{(r)} \exp kx + d_2^{(r)} \exp(-kx)], \\ \tilde{M}_x^{(r)} &= D_{11} \tilde{\gamma}_{,x}^{(r)} = D_{11} k [d_1^{(r)} \exp kx - d_2^{(r)} \exp(-kx)]. \end{aligned} \quad (27)$$

При анализе свободных колебаний стержня в уравнениях (20) для его незакрепленной части 3 (см. рис. 1) следует принять условие $p = 0$. С учетом этого условия и соотношений (12) вместо (20) получаем уравнения

$$B_{11} u_{,xx}^{(3)} - \rho t \ddot{u}^{(3)} = 0, \quad D_{11} w_{,xxxx}^{(3)} + \rho t \ddot{w}^{(3)} = 0. \quad (28)$$

Решения уравнений будем искать в виде

$$u^{(3)} = \tilde{u}^{(3)} \exp i\omega t, \quad w^{(3)} = \tilde{w}^{(3)} \exp i\omega t, \quad (29)$$

что приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\tilde{u}_{,xx}^{(3)} + k_u^2 \tilde{u}^{(3)} = 0, \quad \tilde{w}_{,xxxx}^{(3)} - k_w^4 \tilde{w}^{(3)} = 0, \quad (30)$$

где k_u^2 – коэффициент, введенный в первом уравнении (24), а $k_w^4 = \rho t \omega^2 / D_{11}$. Полученные уравнения (30) имеют решения

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(3)} &= c_1^{(3)} \cos k_u x + c_2^{(3)} \sin k_u x, \\ \tilde{w}^{(3)} &= g_1 \sin k_w x + g_2 \cos k_w x + g_3 \exp k_w x + g_4 \exp(-k_w x), \end{aligned} \quad (31)$$

где $c_1^{(3)}, c_2^{(3)}, g_1, \dots, g_4$ – постоянные интегрирования.

В соответствии с (29) введем представления

$$T_x^{(3)} = \tilde{T}_x^{(3)} \exp i\omega t, \quad M_x^{(3)} = \tilde{M}_x^{(3)} \exp i\omega t, \quad Q_z^{(3)} = \tilde{Q}_z^{(3)} \exp i\omega t, \quad (32)$$

в которых величины $\tilde{T}_x^{(3)}, \tilde{M}_x^{(3)}, \tilde{Q}_z^{(3)}$ на основании соотношений (12) и полученных решений (31) будут определяться по формулам

$$\begin{aligned} \tilde{T}_x^{(3)} &= B_{11} \tilde{u}_{,x}^{(3)} = B_{11} k_u [-c_1^{(3)} \sin k_u x + c_2^{(3)} \cos k_u x], \\ \tilde{M}_x^{(3)} &= -D_{11} k_w^2 [-g_1 \sin k_w x - g_2 \cos k_w x + g_3 \exp k_w x + g_4 \exp(-k_w x)], \\ \tilde{Q}_z^{(3)} &= -D_{11} k_w^3 [-g_1 \cos k_w x + g_2 \sin k_w x + g_3 \exp k_w x - g_4 \exp(-k_w x)]. \end{aligned} \quad (33)$$

Согласно (19) и представлениям (26), в торцевых сечениях $x = -l$, $x = a + l$ стержня должны выполняться условия

$$\tilde{T}_x^{(1)}\Big|_{x=-l} = 0, \quad \tilde{M}_x^{(1)}\Big|_{x=-l} = 0, \quad \tilde{T}_x^{(2)}\Big|_{x=a+l} = 0, \quad \tilde{M}_x^{(2)}\Big|_{x=a+l} = 0, \quad (34)$$

которые с учетом (27) дают четыре алгебраических уравнения

$$\begin{aligned} -c_1^{(1)} \sin(-k_u l) + c_2^{(1)} \cos(-k_u l) &= 0, & d_1^{(1)} \exp(-kl) - d_2^{(1)} \exp kl &= 0, \\ -c_1^{(2)} \sin[k_u(a+l)] + c_2^{(2)} \cos[k_u(a+l)] &= 0, & & \\ d_1^{(2)} \exp[k(a+l)] - d_2^{(2)} \exp[-k(a+l)] &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

При использовании аппроксимаций (1) и (8) в сечениях $x = 0$, $x = a$ стержня должны выполняться кинематические условия сопряжения (15), которые с учетом представлений (23), (29), а также полученных решений (25) и (31) в дополнение к (35) доставляют еще шесть алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_1^{(1)} - c_1^{(3)} &= 0, & d_1^{(1)} + d_2^{(1)} + k_w(g_1 + g_3 - g_4) &= 0, & g_2 + g_3 + g_4 &= 0, \\ (c_1^{(2)} - c_1^{(3)}) \cos k_u a + (c_2^{(2)} - c_2^{(3)}) \sin k_u a &= 0, & d_1^{(2)} \exp ka + d_2^{(2)} \exp(-ka) + & \\ + k_w [g_1 \cos k_w a - g_2 \sin k_w a + g_3 \exp k_w a - g_4 \exp(-k_w a)] &= 0, & & \\ g_1 \sin k_w a + g_2 \cos k_w a + g_3 \exp k_w a + g_4 \exp(-k_w a) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

И, наконец, кроме условий (15) в сечениях $x = 0$, $x = a$ стержня необходимо также удовлетворить силовым условиям сопряжения (21), которые с учетом представлений (26), (32), а также полученных зависимостей (27), (33) и решений (24), (29) дают еще четыре уравнения:

$$\begin{aligned} c_2^{(1)} - c_2^{(3)} &= 0; & k(d_1^{(1)} - d_2^{(1)}) + k_w^2(-g_2 + g_3 + g_4) &= 0, \\ (-c_1^{(2)} + c_1^{(3)}) \sin k_u a + (c_2^{(2)} - c_2^{(3)}) \cos k_u a &= 0, & & \\ k[d_1^{(2)} \exp ka - d_2^{(2)} \exp(-ka)] + & & & \\ + k_w^2[-g_1 \sin k_w a - g_2 \cos k_w a + g_3 \exp k_w a + g_4 \exp(-k_w a)] &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Полученные уравнения (35)–(37) относительно постоянных интегрирования $c_1^{(m)}$, $c_2^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), $d_1^{(r)}$, $d_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$), g_j ($j = 1, 4$), как и следовало ожидать, распадутся на две независимые системы: первая система содержит постоянные интегрирования $c_1^{(m)}$, $c_2^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), соответствующие свободным продольным колебаниям стержня, а вторая – только постоянные $d_1^{(r)}$, $d_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$), g_j ($j = 1, 4$), соответствующие формам поперечных (изгибных) колебаний. При этом практический интерес представляет последний тип колебаний, происходящих в сравнительно низком диапазоне частот.

Систему однородных уравнений относительно постоянных интегрирования $d_1^{(r)}$, $d_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$), g_j ($j = 1, 4$), можно представить в виде

$$[A]\{X\} = \{0\}, \quad (38)$$

где $[A]$, $\{X\}$ – соответственно квадратная матрица и столбец, состоящие из элементов (неотмеченные элементы матрицы $[A]$ имеют нулевые значения):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \exp(-kl), & a_{12} &= -\exp kl, & a_{22} &= \exp[k(a+l)], & a_{23} &= -\exp[-k(a+l)], \\ a_{31} &= a_{32} = 1, & a_{35} &= a_{37} = k_w, & a_{38} &= -k_w, & a_{46} &= a_{47} = a_{48} = 1, & a_{53} &= \exp ka, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{54} &= \exp(-ka), & a_{55} &= k_w \cos k_w a, & a_{56} &= -k_w \sin k_w a, & a_{57} &= k_w \exp k_w a, \\
a_{58} &= -k_w \exp(-k_w a), & a_{65} &= \sin k_w a, & a_{66} &= \cos k_w a, & a_{67} &= \exp k_w a, \\
a_{68} &= \exp(-k_w a), & a_{71} &= k, & a_{72} &= -k, & a_{76} &= -k_w^2, & a_{77} &= a_{78} = k_w^2, & a_{83} &= k \exp ka, \\
a_{84} &= -k \exp(-ka), & a_{85} &= -k_w^2 \sin k_w a, & a_{86} &= -k_w^2 \cos k_w a, & a_{87} &= k_w^2 \exp k_w a, \\
a_{88} &= k_w^2 \exp(-k_w a), & x_1 &= d_1^{(1)}, & x_2 &= d_2^{(1)}, & x_3 &= d_1^{(2)}, & x_4 &= d_2^{(2)}, \\
x_5 &= g_1, & x_6 &= g_2, & x_7 &= g_3, & x_8 &= g_4.
\end{aligned} \tag{39}$$

Система уравнений (38) имеет нетривиальное решение $\{X\} \neq \{0\}$ при условии равенства нулю определителя матрицы $[A]$ ($\det [A] = 0$), из которого можно определить интересующие собственные частоты ω_s ($s = 1, 2, 3, \dots$), каждой из которых соответствует некоторое ненулевое решение $\{X\}_s$. Так как уравнения (38) являются однородными, то это решение находится с точностью до множителя. Для этого все неизвестные обычно выражаются через некоторую одну неизвестную величину, которой впоследствии задается какое-то произвольное значение. Однако такой прием требует проведения длительных неформальных преобразований структуры исходной системы уравнений, которые трудно поддаются автоматизации вычислений. Наиболее простой способ получения нетривиального решения системы (38) (без преобразования ее структуры) может состоять в применении известного правила Пэйна – Айронса [22, 23]. Согласно этому правилу выбирается наибольший по модулю диагональный элемент a_{ii} матрицы $[A]$, который умножается затем на параметр штрафа $\alpha = 10^{10} - 10^{12}$, а элементу с номером i правой части системы вместо нуля присваивается значение $a_{ii}\alpha q$, где $q \ll \alpha$ – некоторая произвольная величина. Тогда уравнение с номером i системы (38) становится таким:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ii}\alpha x_i + \dots + a_{i8}x_8 = a_{ii}\alpha q. \tag{40}$$

Слагаемое $a_{ii}\alpha x_i$ в (40) получается по модулю примерно в α раз больше всех остальных. Это дает $x_i \approx q$ (с точностью до $10^{-10} - 10^{-12}$), а все остальные неизвестные при решении отмеченной системы получаются выраженными через x_i .

Описанную методику определения постоянных интегрирования $d_1^{(r)}, d_2^{(r)}$ ($r = 1, 2$), g_j ($j = \overline{1, 4}$) при необходимости можно применить и к нахождению постоянных $c_1^{(m)}, c_2^{(m)}$ ($m = 1, 2, 3$), соответствующих свободным продольным колебаниям закрепленных и незакрепленного участков стержня. Однако стоит заметить, что в силу особенностей условий закрепления стержня на опорных элементах конечной длины l (см. рис. 1) первые уравнения в (24) и (30) можно заменить одним эквивалентным уравнением

$$\tilde{u}_{,xx} + k_u^2 \tilde{u} = 0, \quad -l \leq x \leq a + l,$$

описывающим продольные колебания всех трех участков стержня. Его общее решение имеет вид

$$\tilde{u} = c_1 \cos k_u x + c_2 \sin k_u x,$$

что дает амплитуду осевой силы

$$\tilde{T}_x = B_{11} \tilde{u}_{,x} = B_{11} k_u [-c_1 \sin k_u x + c_2 \cos k_u x].$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 находятся из граничных условий

$$\tilde{T}_x|_{x=-l} = 0, \quad \tilde{T}_x|_{x=a+l} = 0,$$

приводящих к системе линейных однородных уравнений

$$\left[\begin{array}{c|c} -\sin(-k_u l) & \cos(-k_u l) \\ \hline -\sin[k_u(a+l)] & \cos[k_u(a+l)] \end{array} \right] \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

из которой можно стандартно определить собственные частоты и формы свободных продольных колебаний стержня.

3. Определение динамической реакции при вынужденных изгибных колебаниях стержня

Предположим, что действующая на незакрепленную часть стержня поверхностная нагрузка $p = p(x, \tau)$ (см. рис. 1) меняется по гармоническому закону

$$p = \tilde{p}(x) \exp i\omega\tau. \quad (41)$$

Тогда в соответствии с (20) вместо второго уравнения в (30) будем иметь неоднородное дифференциальное уравнение

$$\tilde{w}_{,xxxx}^{(3)} - k_w^4 \tilde{w}^{(3)} = \frac{\tilde{p}(x)}{D_{11}}, \quad (42)$$

решение которого имеет вид

$$\tilde{w}^{(3)} = g_1 \sin k_w x + g_2 \cos k_w x + g_3 \exp k_w x + g_4 \exp(-k_w x) + \hat{w}^{(3)}(x), \quad (43)$$

где g_j ($j = \overline{1, 4}$) – постоянные интегрирования с обозначениями предыдущего раздела, но имеющие вполне определенные значения, а $\hat{w}^{(3)}(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения, зависящее от характера зависимости $\tilde{p}(x)$. Представим эту зависимость в виде

$$\tilde{p}(x) = p_n \sin(n\pi x/a), \quad (44)$$

где n – целое число, принимающее значение 1 или 2; p_n – соответствующие коэффициенты, имеющие размерность поверхностной нагрузки $p = p(x, \tau)$. В этом случае частное решение $\hat{w}^{(3)}(x)$ будет таким:

$$\hat{w}^{(3)}(x) = \frac{p_n}{D_{11}[(n\pi/a)^4 - k_w^4]} \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (45)$$

В соответствии с (44) распределение $\tilde{p}(x)$ и, соответственно, формы поперечных колебаний незакрепленной части стержня при $n = 1$ и произвольной частоте ω будут симметричными относительно сечения $x = a/2$, при $n = 2$ – антисимметричными, а в случае совпадения ω с одной из собственных частот ω_s ($s = 1, 2, 3, \dots$) имеет место резонанс, при котором форма колебаний отмеченной части стержня должна совпадать с соответствующей собственной формой.

Необходимо заметить, что при определении динамической реакции стержня от нагрузки $p = \tilde{p}(x) \exp i\omega\tau$ продольные и изгибные колебания стержня так же, как и при модальном анализе, будут по-прежнему независимыми. При этом практический интерес представляют изгибные колебания, происходящие, как уже отмечалось выше, в сравнительно низком диапазоне частот, определяемые постоянными интегрирования

$d_1^{(r)}, d_2^{(r)} (r = 1, 2), g_j (j = \overline{1, 4})$ (в обозначениях предыдущего раздела), которые можно найти из системы линейных неоднородных уравнений

$$[A]\{X\} = \{B\}. \quad (46)$$

Матрица $[A]$ и столбец $\{X\}$ по-прежнему состоят из элементов (39), а столбец $\{B\}$ в соответствии с зависимостью (45) и условиями (15), (21) содержит элементы

$$\begin{aligned} b_1 = b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{P_n}{D_{11}} \cdot \frac{n\pi/a}{(n\pi/a)^4 - k_w^4}, \quad b_4 = 0, \\ b_5 = -\frac{P_n}{D_{11}} \cdot \frac{n\pi/a}{(n\pi/a)^4 - k_w^4} (-1)^n, \quad b_6 = b_7 = b_8 = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Решение $\{X\} = [A]^{-1}\{B\}$ системы (46) в конечном итоге полностью определяет параметры НДС при изгибно-сдвиговых колебаниях стержня. Однако следует заметить, что разработанная методика определения динамической реакции стержня от гармонической нагрузки $p = \tilde{p}(x) \exp i\omega t$ не учитывает демпфирующие свойства материала и поэтому может давать корректное решение только при частотах, находящихся вдали от резонансной зоны, в то время как наибольшие амплитуды колебаний обычно имеют место в резонансных режимах нагружения, при которых демпфирующие свойства материала необходимо обязательно учитывать [24]. При гармоническом законе деформирования стержня это можно сделать с использованием известной гипотезы комплексного внутреннего трения [25–27 и др.], заменяя величины E_1 и G_{13} комплексными модулями упругости

$$E_1^* = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad G_{13}^* = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi}, \quad (48)$$

где δ_1, δ_{13} – логарифмические декременты колебаний материала при растяжении-сжатии в направлении оси Ox и при сдвиге в плоскости Oxz .

4. Численные эксперименты

Эксперимент 1. Проведен модальный анализ рассматриваемого стержня (см. рис. 1), выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углерента ЭЛУР-П и связующего ХТ-118 с характеристиками [28]: $E_1 = 104,7$ ГПа, $G_{13} = 1,0$ ГПа, $\rho = 1500$ кг/м³, $\delta_1 = 0,05$, $\delta_{13} = 0,10$. Размеры стержня: $l = 50$ мм, $a = 300$ мм, $t = 2,9$ мм. Частотное уравнение $\det [A(\omega)] = 0$ решалось методом половинного деления [29] до выполнения условия $\omega_{\max}^{(k)} - \omega_{\min}^{(k)} \leq \psi$, где $\omega_{\max}^{(k)}, \omega_{\min}^{(k)}$ – границы текущего интервала поиска, в котором расположен корень частотного уравнения; k – номер текущей итерации; ψ – заданная точность. После выполнения этого условия был найден искомый корень $\omega = (\omega_{\max}^{(k)} + \omega_{\min}^{(k)})/2$. Начальный интервал поиска соответствовал частотам, полученным в случаях шарнирного опирания и жесткого защемления концов стержня с использованием известной формулы [30]

$$\omega_s = \beta_s^2 \sqrt{EI / (m_0 a^4)}, \quad (49)$$

где EI – жесткость стержня на изгиб, m_0 – погонная масса, β_s – безразмерный коэффициент, зависящий от способа закрепления концов стержня: при шарнирном опирании $\beta_s = s\pi$ ($s = \overline{1, \infty}$); при жестком защемлении $\beta_1 = 4,73004$, $\beta_2 = 7,85320$, $\beta_s = (2s + 1)\pi/2$ ($s \geq 3$). Для стержня-полосы в формуле (49) вместо EI и m_0 следует брать соответственно величины D_{11} и rt .

В таблице 1 приведены значения трех низших циклических частот $f_s = \omega_s / (2\pi)$, $s = 1, 2, 3$, свободных колебаний стержня при различных видах закрепления его концов. Значения ω_s для стержня со скользящими опорами были получены при точности $\psi = 0,001$. Для достижения заданной точности при вычислении частоты f_1 потребовалось 18 итераций, а при нахождении частот f_2 и f_3 – 19 итераций.

Таблица 1

Частоты свободных колебаний стержня-полосы

Вид закрепления стержня	Частоты		
	f_1 , Гц	f_2 , Гц	f_3 , Гц
Шарнирное опирание	122,071	488,284	1098,639
Жесткое защемление	276,721	762,792	1495,368
Скользящие опоры	250,759	696,451	1374,255

На рис. 2 представлены нормированные амплитуды прогибов $\bar{w}^{(m)} = \tilde{w}^{(m)} / \tilde{w}_{\max}$ ($m = 1, 2, 3$) при колебаниях стержня на собственных частотах $f_1 = 250,759$ Гц и $f_2 = 696,451$ Гц (1 соответствует $\bar{w}^{(1)}$, $2 - \bar{w}^{(2)}$, $3 - \bar{w}^{(3)}$).

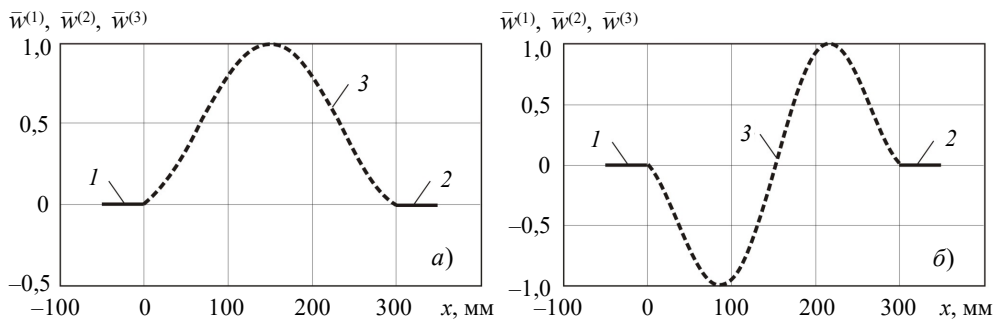


Рис. 2. Нормированные амплитуды прогибов $\bar{w}^{(m)}$ оси стержня при колебаниях его по первой (а) и второй (б) собственным формам

На рис. 3, 4 приведены, соответственно, нормированные амплитуды нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x^{(m)} = \tilde{\sigma}_x^{(m)} / \tilde{\sigma}_{x,\max}$ на поверхности $z = -t/2$ стержня и нормированные амплитуды касательных напряжений $\bar{\sigma}_{xz}^{(m)} = \tilde{\sigma}_{xz}^{(m)} / \tilde{\sigma}_{xz,\max}$, полученные при отмеченных частотах f_1, f_2 .

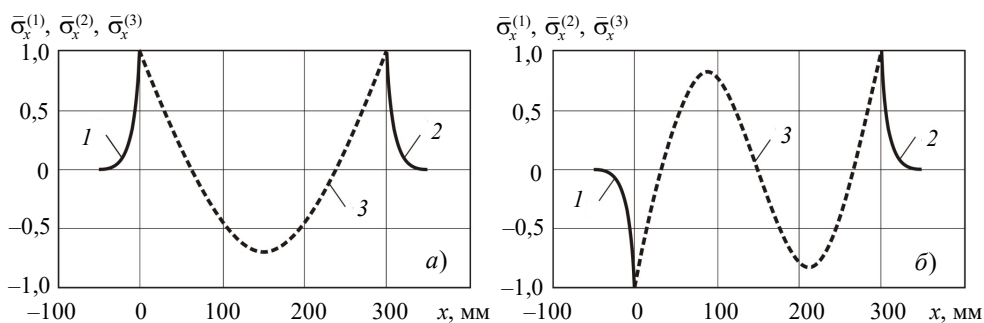


Рис. 3. Нормированные амплитуды нормальных напряжений $\bar{\sigma}_x^{(m)}$ на поверхности $z = -t/2$ стержня при колебаниях его по первой (а) и второй (б) собственным формам (1 соответствует $\bar{\sigma}_x^{(1)}$, $2 - \bar{\sigma}_x^{(2)}$, $3 - \bar{\sigma}_x^{(3)}$)

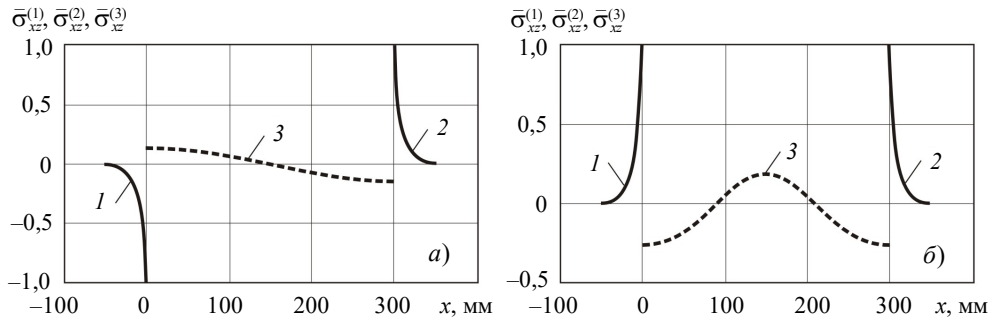


Рис. 4. Нормированные амплитуды касательных напряжений $\bar{\sigma}_{xz}^{(m)}$ при колебаниях стержня по первой (а) и второй (б) собственным формам (1 соответствует $\bar{\sigma}_{xz}^{(1)}$, 2 – $\bar{\sigma}_{xz}^{(2)}$, 3 – $\bar{\sigma}_{xz}^{(3)}$)

Значения $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ и $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$, $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$ найдены в соответствии с зависимостями (3). Для нахождения $\tilde{\sigma}_x^{(3)}$ использовалась вторая зависимость в (9), а усредненные по толщине стержня значения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(3)}$ определялись как $\tilde{\sigma}_{xz}^{(3)} = \tilde{Q}_z^{(3)} / t$.

Представленные на рис. 3, 4 результаты показывают, что при рассматриваемом способе закрепления концов стержня и используемых моделях деформирования (1), (8) нормированные нормальные напряжения $\bar{\sigma}_x$ в сечениях $x = 0$ и $x = a$ при переходе от закрепленных участков к незакрепленному участку получают одинаковыми, что находится в соответствии с условиями сопряжения (21). Нормированные касательные напряжения $\bar{\sigma}_{xz}$ в указанных сечениях испытывают значительную трансформацию, обусловленную различием моделей деформирования отмеченных участков стержня, а также ярко выраженную их локализацию в областях закрепленных частей, расположенных вблизи сечений $x = 0$ и $x = a$.

Эксперимент 2. Определялась динамическая реакция прежнего стержня при резонансных колебаниях на частотах $f_1 = 250,759$ Гц и $f_2 = 696,451$ Гц (см. табл. 1), возбуждаемых поперечной нагрузкой $p = \tilde{p}(x) \exp i\omega_s \tau$ ($s = 1, 2$), распределенной по закону (44) с величинами $p_1 = p_2 = 420$ Н/м². На рис. 5, 6, 7 приведены, соответственно, амплитуды прогибов $\tilde{w}^{(m)}$, амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(m)}$ на поверхности $z = -t/2$ и амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}$ в поперечных сечениях участков $m = 1, 2, 3$ стержня (см. рис. 1) при колебаниях на отмеченных частотах f_1, f_2 .

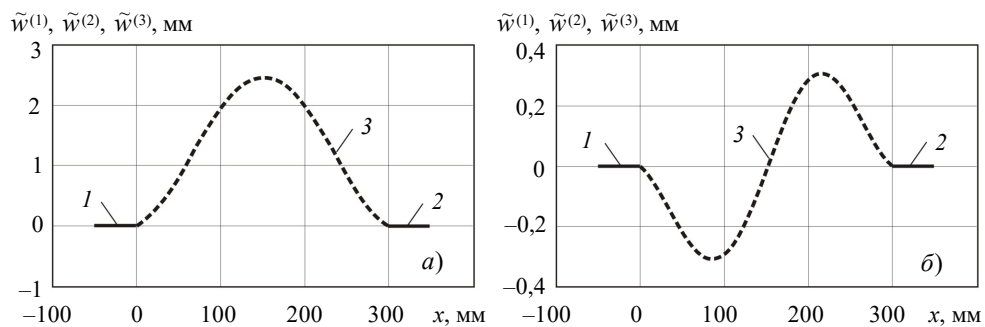


Рис. 5. Амплитуды прогибов $\tilde{w}^{(m)}$ оси стержня при резонансных колебаниях на частотах f_1 (а) и f_2 (б): 1 – $\tilde{w}^{(1)}$, 2 – $\tilde{w}^{(2)}$, 3 – $\tilde{w}^{(3)}$

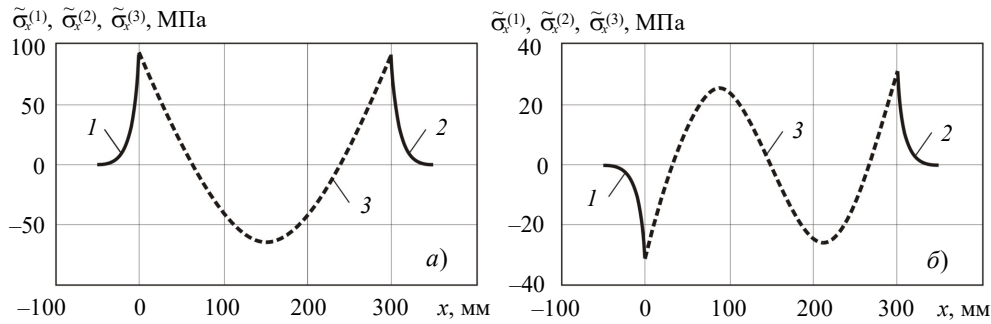


Рис. 6. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^{(m)}$ на поверхности $z = -t/2$ стержня при резонансных колебаниях на частотах f_1 (а) и f_2 (б): 1 – $\tilde{\sigma}_x^{(1)}$, 2 – $\tilde{\sigma}_x^{(2)}$, 3 – $\tilde{\sigma}_x^{(3)}$

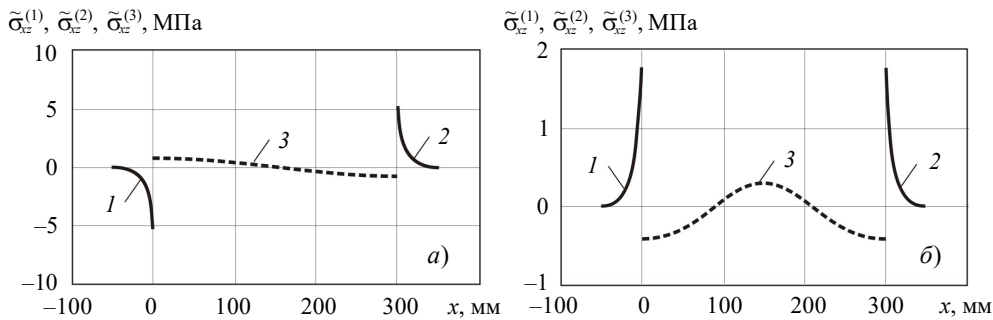


Рис. 7. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}$ в поперечных сечениях стержня при резонансных колебаниях на частотах f_1 (а) и f_2 (б): 1 – $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$, 2 – $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$, 3 – $\tilde{\sigma}_{xz}^{(3)}$

Из рис. 5 видно, что резонансные колебания стержня на частотах f_1 и f_2 происходят по формам, совпадающим с соответствующими формами свободных колебаний (см. рис. 2), что находится в соответствии с известным в теории колебаний положением о подобии отмеченных форм. При переходе от незакрепленного участка стержня к участкам закрепления конечной длины наблюдается трансформация амплитуд касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^{(m)}$ (рис. 7а, 7б), обусловленная различием моделей деформирования указанных участков стержня, причем наиболее значительной она является при резонансных колебаниях стержня на частоте f_1 (см. рис. 7а), при которой максимальные по модулю значения $\tilde{\sigma}_{xz}^{(1)}$ и $\tilde{\sigma}_{xz}^{(2)}$ в закрепленных частях стержня примерно в семь раз превышают максимальное значение $\tilde{\sigma}_{xz}^{(3)}$ в незакрепленной части, что важно при расчете композитных стержней, разрушение которых обычно происходит за счет напряжений поперечного сдвига σ_{xz} .

Для подтверждения достоверности полученных результатов выполнен тестовый расчет стержня на основе метода конечных элементов (МКЭ) без учета податливости закрепленных участков, что равносильно предположению о жестком защемлении концов нагруженного участка 3 стержня (см. рис. 1). Этот участок разбивался на двести балочных элементов одинаковой длины, работающих в рамках модели Кирхгофа – Лява. В результате модального анализа, проведенного на основе метода итераций в подпространстве [31], были получены собственные частоты $f_1 = 276,721$ Гц и $f_2 = 762,793$ Гц колебаний по конечно-элементной модели рассматриваемого участка стержня, которые практически полностью совпали с соответствующими частотами, найденными ранее по формуле (49) для жестко защемленной по концам балки (см. таблицу 1).

Для нахождения амплитуд узловых перемещений конечно-элементной модели нагруженного участка стержня использовалась система разрешающих уравнений [32]:

$$[K]^* \{r\}^* = \{R\}, \quad (50)$$

где $[K]^* = [K] - \omega^2[M] - i\omega[C]$ – комплексная матрица динамической жесткости, содержащая матрицу жесткости $[K]$, матрицу масс $[M]$ и матрицу вязкого демпфирования $[C]$; $\{r\}^*$, $\{R\}$ – соответственно комплексный вектор узловых перемещений и вектор внешних узловых сил модели.

В таблице 2 приведены максимальные амплитуды прогибов $\tilde{w}_{1,\max}^{(3)}$ и $\tilde{w}_{2,\max}^{(3)}$ нагруженного участка стержня при резонансных колебаниях на частотах f_1, f_2 , найденные при аналитическом решении задачи. В последних двух столбцах таблицы 2 для сравнения приведены приближенные значения амплитуд прогибов $\tilde{w}_{1,\max}$ и $\tilde{w}_{2,\max}$ отмеченного участка стержня, найденные на основе МКЭ.

Таблица 2
Максимальные амплитуды прогибов нагруженного участка стержня при резонансных колебаниях на частотах f_1, f_2

Аналитическое решение		МКЭ	
$\tilde{w}_{1,\max}^{(3)}$, мм	$\tilde{w}_{2,\max}^{(3)}$, мм	$\tilde{w}_{1,\max}$, мм	$\tilde{w}_{2,\max}$, мм
2,451	0,305	2,222	0,275

Из таблицы 2 видно, что амплитуды прогибов $\tilde{w}_{1,\max}$, $\tilde{w}_{2,\max}$ получились несколько ниже (для $\tilde{w}_{1,\max}$ приблизительно на 9,3%, а для $\tilde{w}_{2,\max}$ на 9,9%) соответствующих значений $\tilde{w}_{1,\max}^{(3)}$ и $\tilde{w}_{2,\max}^{(3)}$. Этот факт можно объяснить невозможностью учета податливости закрепленных участков в используемой тестовой конечно-элементной модели стержня, что, как и следовало ожидать, приводит к некоторому занижению амплитуд прогибов нагруженного участка по сравнению с тем, что получено при аналитическом решении задачи. Однако с учетом того, что различие между амплитудами $\tilde{w}_{1,\max}$, $\tilde{w}_{2,\max}$, полученными на основе МКЭ, и соответствующими амплитудами $\tilde{w}_{1,\max}^{(3)}$, $\tilde{w}_{2,\max}^{(3)}$ при аналитическом решении является весьма незначительным, в итоге можно сделать заключение о достоверности разработанной методики определения динамической реакции стержня (см. раздел 3) и полученных на ее основе результатов (см. рис. 5–7).

Заключение

Построена трансформационная модель деформирования стержня-полосы, закрепленного по краям на двухсторонних скользящих опорах конечной длины. Сформулированы условия кинематического сопряжения закрепленных и незакрепленной частей стержня, при учете которых, исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского, получены уравнения движения, соответствующие им граничные условия, а также силовые условия сопряжения отмеченных участков стержня. На основе полученных уравнений движения построены точные аналитические решения задач о свободных и вынужденных гармонических колебаниях рассматриваемого стержня.

Проведены численные эксперименты по определению собственных форм и частот изгибных колебаний, а также динамической реакции при резонансных колебаниях

указанного стержня-полосы, выполненного из однонаправленного волокнистого композита на основе углеродной ЭЛУР-П и связующего ХТ-118. Показана значительная трансформация касательных напряжений σ_{xz} при переходе через границы от незакрепленного участка стержня к участкам закрепления конечной длины, обусловленная различием моделей деформирования отмеченных участков, причем наиболее существенной она является при резонансных колебаниях стержня на низшей частоте f_1 , при которой максимальные значения σ_{xz} в закрепленных частях стержня примерно в семь раз превышают их максимальные значения в незакрепленной части стержня.

Полученные результаты могут быть использованы при постановке соответствующих задач механики плоских стержней, закрепленных на двухсторонних скользящих опорах конечной длины.

Список литературы

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.
2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.
3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P. et al. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. Iss. 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.
4. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Applied Mathematical Modelling*. 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.
5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *Journal of Applied Mechanics*. 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.
6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *Journal of Sound and Vibration*. 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.
7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.
8. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и аналитические решения характерных задач. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №2. С. 207–224. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-207-224.
9. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. Transforming deformation model of flat beams with finite length fastening areas located on one of the front-face surfaces. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Cham, Switzerland: Springer Cham, 2023. P. 185–200. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_13.
10. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.
11. Паймушин В.Н., Шишкин В.М., Газизуллин Р.К., Нуриев А.Н. Исследование прохождения вибраций через закрепленный участок удлиненной пластины при действии осевой силы на торце. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №3. С. 356–374. DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-356-374.
12. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with

a finite-length fixed region on an outer surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024. Vol. 65. No 1. P. 165–175. DOI: 10.1134/S0021894424010176.

13. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. Article No e202300214. DOI: 10.1002/zamm.202300214.

14. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for small strains and moderate rotations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).

15. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.

16. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *International Journal of Engineering Science*. 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M.

17. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *International Journal of Solids and Structures*. 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.

18. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.

19. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Computational Mechanics*. 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.

20. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity. Theory 1. General theories of high order. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.

21. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity. Theory 2. Particular low-order theories. *Mechanics of Composite Materials*. 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.

22. Норри Д., де Фриз Ж. *Введение в метод конечных элементов*. М.: Мир, 1981. 304 с.

23. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике*. М.: Мир, 1975. 541 с.

24. Цейтлин А.И. Об учете внутреннего трения в нормативных документах по динамическому расчету сооружений. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1981. №4. С. 33–38.

25. Сорокин Е.С. *К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем*. М.: Гостройиздат, 1960. 129 с.

26. Василенко Н.В. Учет несовершенной упругости материала при механических колебаниях методом комплексных модулей. *Рассеяние энергии при колебаниях механических систем: Матер. X Всесоюз. науч.-техн. совещания*. Киев, дек. 1974. Киев: Наукова думка, 1976. С. 5–12.

27. Рикардс Р.Б., Барканов Е.Н. Определение динамических характеристик вибропоглощающих покрытий методом конечных элементов. *Механика композитных материалов*. 1991. №5. С. 823–830.

28. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. No 1. P. 2–12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.

29. Шуп Т. *Решение инженерных задач на ЭВМ*. М.: Мир, 1982. 238 с.

30. Хазанов Х.С. *Механические колебания систем с распределенными параметрами*. Самара: СГАУ, 2002. 80 с.

31. Бате К., Вильсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.

32. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 2. Конечно-элементные модели и численные эксперименты. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 311–330. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-3-311-330.

References

1. Algazin S.D., Selivanov I.A. Natural vibration of a rectangular plate with mixed boundary conditions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2021. Vol. 62. Iss. 2. P. 238–244. <https://doi.org/10.1134/S0021894421020073>.

2. Algarray A.F.A., Jun H., Mahdi I.-E.M. Effects of end conditions of cross-ply laminated composite beams on their dimensionless natural frequencies. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 6. P. 1108–1114. <https://doi.org/10.1134/S0021894417060177>.

3. Krylova E.Yu., Papkova I.V., Erofeev N.P. et al. Complex fluctuations of flexible plates under longitudinal loads with account for white noise. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016. Vol. 57. Iss. 4. P. 714–719. <https://doi.org/10.1134/S0021894416040167>.

4. Tüfekci M., Dear J.P., Salles L. Forced vibration analysis of beams with frictional clamps. *Appl. Math. Model.* 2024. Vol. 128. P. 450–469. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2024.01.031>.

5. Banks H.T., Inman D.J. On damping mechanisms in beams. *J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. Iss. 3. P. 716–723. <https://doi.org/10.1115/1.2897253>.

6. Asadi K., Ahmadian H., Jalali H. Micro/macro-slip damping in beams with frictional contact interface. *J. Sound Vib.* 2012. Vol. 331. Iss. 21. P. 4704–4712. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2012.05.026>.

7. Ferri A.A., Bindemann A.C. Damping and vibrations of beams with various types of frictional support conditions. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. 1992. Vol. 114. Iss. 3. P. 289–296. <https://doi.org/10.1115/1.2930260>.

8. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsiy v tonkostennykh karkasirovannykh konstruksiyakh. 1. Osnovnye sootnosheniya i reshenie kharakternykh zadach [Mathematical modeling of the vibrations propagation in thinwall framework structures. 1. Basic relations and analytical solutions of typical problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 2. P. 207–224 (In Russian).

9. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. Transforming deformation model of flat beams with finite length fastening areas located on one of the front-face surfaces. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Cham, Switzerland. Springer Cham. 2023. P. 185–200. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_13.

10. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. Iss. 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.

11. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Gazizullin R.K., Nuriev A.N. Issledovanie prokhozheniya vibratsiy cherez zakreplenny uchastok udlinennoy plastiny pri deystvii osevoy sily na tortse [Study of the passage of vibrations through a fixed section of an elongated plate under the action of an axial force at the end]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2023. Vol. 85. No 3. P. 356–374 (In Russian).

12. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Refined model of dynamic deformation of a flat rod with a finite-length fixed region on an outer surface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2024. Vol. 65. No 1. P. 165–175. DOI: 10.1134/S0021894424010176.

13. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M., Gazizullin R.K. Transformational deformation models of continuous thin-walled structural elements with support elements of finite sizes: Theoretical foundations, computational, and physical experiments. *J. Appl. Math. Mech.* 2023. Vol. 104. Iss. 2. Article No e202300214. DOI: 10.1002/zamm.202300214

14. Librescu L., Schmidt R. Refined theories of elastic anisotropic shells accounting for

- small strains and moderate rotations. *Int. J. Non Linear Mech.* 1988. Vol. 23. Iss. 3. P. 217–229. [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(88\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(88)90013-3).
15. Reddy J.N. A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness. *Int. J. Non Linear Mech.* 1990. Vol. 25. Iss. 6. P. 677–686. DOI: 10.1016/0020-7462(90)90006-U.
16. Librescu L., Schmidt R. Substantiation of a shear-deformable theory of anisotropic composite laminated shells accounting for the interlaminar continuity conditions. *Int. J. Eng. Sci.* 1991. Vol. 29. Iss. 6. P. 669–683. DOI: 10.1016/0020-7225(91)90097-M
17. Basar Y., Ding Y., Schultz R. Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations. *Int. J. Solids Struct.* 1993. Vol. 30. Iss. 19. P. 2611–2638. DOI: 10.1016/0020-7683(93)90102-D.
18. Gruttmann F., Wagner W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2005. Vol. 194. Iss. 39–41. P. 4279–4300. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.11.005>.
19. Gruttmann F., Wagner W. Structural analysis of composite laminates using a mixed hybrid shell element. *Comput. Mech.* 2006. Vol. 37. Iss. 6. P. 479–497. DOI: 10.1007/S00466-005-0730-1.
20. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity. Theory 1. General theories of high order. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 3. P. 271–290. DOI: 10.1007/s11029-020-09880-8.
21. Yankovskii A.P. Critical analysis of the equations of statics in the bending theories of composite plates obtained on the basis of variational principles of elasticity. Theory 2. Particular low-order theories. *Mech. Compos. Mater.* 2020. Vol. 56. Iss. 4. P. 437–454. DOI: 10.1007/s11029-020-09895-1.
22. Norrie D.H., de Vries G. *An Introduction to Finite Element Analysis*. London. New York. San Francisco. Academic Press. 1987. 301 p.
23. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
24. Tseytlin A.I. Ob uchete vnutrennego treniya v normativnykh dokumentakh po dinamicheskomu raschetu sooruzheniy [On accounting for internal friction in regulatory documents on the dynamic calculation of structures]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy* [Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings]. 1981. No 4. P. 33–38 (In Russian).
25. Sorokin E.S. *K teorii vnutrennego treniya pri kolebaniyakh uprugikh system* [On the Theory of Internal Friction during Vibrations of Elastic Systems]. Moscow. Gosstroyzdat Publ. 1960. 129 p. (In Russian).
26. Vasilenko N.V. Uchet nesovershennoy uprugosti materiala pri mekhanicheskikh kolebaniyakh metodom kompleksnykh module [Accounting for imperfect elasticity of a material during mechanical vibrations using the complex modulus method]. *Rasseyaniye energii pri kolebaniyakh mekhanicheskikh sistem: Materialy X Vsesoyuznogo nauchno-tekhnicheskogo soveshchaniya*. [Energy Dissipation during Vibrations of Mechanical Systems: Materials of the X All-Union Scientific and Technical Meeting]. Kiev, Dec. 1974. Kiev. Naukova Dumka Publ. 1976. P. 5–12 (In Russian).
27. Rikards R.B., Barkanov E.N. Opredelenie dinamicheskikh kharakteristik vibropogloshchayushchikh pokrytiy metodom konechnykh elementov [Dynamic analysis of damping coatings by the finite element method]. *Mekhanika kompozitnykh materialov* [Mech. Compos. Mater]. 1991. No 5. P. 823–830 (In Russian).
28. Paimushin V.N., Kholmogorov S.A. Physical-mechanical properties of a fiber-reinforced composite based on an ELUR-P carbon tape and XT-118 binder. *Mech. Compos. Mater.* 2018. Vol. 54. No 1. P. 2–12. DOI: 10.1007/s11029-018-9712-1.
29. Shoup T.E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall Inc. 1979. 255 p.
30. Khazanov Kh.S. *Mekhanicheskie kolebaniya sistem s raspredelennymi parametrami* [Mechanical Vibrations of Systems with Distributed Parameters]. Samara. SGAU Publ. 2002. 80 p. (In Russian).

31. Bathe K-J., Vilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, NJ. Prentice-Hall Inc. 1976. 528 p.

32. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsiy v tonkostennykh karkasirovannykh konstruksiyakh. 2. Konechnoelementnye modeli i chislennye eksperimenty [Mathematical modeling of the vibrations propagation in thin wall framework structures. 2. Finite element models and numerical experiments]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 3. P. 311–330 (In Russian).

TRANSFORMATIONAL MODEL OF A PLANE ROD DEFORMATION, RESTRAINED ON DOUBLE-SIDED SLIDING SUPPORTS*

Paimushin V.N.^{1,2}, Shishkin V.M.³

¹*Kazan National Research Technical University named after A.N.Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Kazan Federal University, Kazan, Russian Federation*

³*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2024/05/16

A linear transformational model of the dynamic deformation of a plane rod is constructed. The end sections of the plane rod are restrained on two-sided sliding supports of finite length, excluding the displacements of the surface points of end sections in the transverse direction. To describe the deformation process of restrained sections of the rod, the S.P. Timoshenko's shear model is used. For unfixed part the classical Kirchhoff–Love model is used. The conditions for the kinematic coupling of the restrained and free sections of the rod are formulated. Based on the Hamilton–Ostrogradsky variational principle, the equations of motion, the corresponding boundary conditions, as well as the force conditions for the coupling of the sections are obtained in a geometrically linear approximation. Based on the obtained equations of motion, exact analytical solutions of free and forced harmonic oscillations problem of the plane rod were constructed. It is shown that within the framework of the deformation models used, the problems of longitudinal and bending vibrations of the rod are separated. Of these, bending vibrations occurring in a relatively low frequency range are of greatest practical interest. For them, numerical experiments were carried out to determine the three lower natural modes and frequencies of vibrations, as well as the dynamic response during resonant vibrations of a plane rod on the marked frequencies made of a unidirectional fiber composite based on ELUR-P carbon fiber and XT-118 epoxy. A significant transformation of transverse tangential stresses is shown during the transition through the boundaries from the free section of the rod to restrained one. Such transformation due to the difference in deformation models of the marked areas, as well as their pronounced localization in the areas of restrained areas located near the marked boundaries.

Keywords: vibrations, plane rod, restrained section of finite length, sliding support, transformational deformation model.

* This paper has been supported by the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021).