

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-202-214

## ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ПЛАСТИНЫ С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ\*

© 2024 г.

Ватульян А.О., Недин Р.Д.

*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича  
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация  
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,  
Владикавказ, Российская Федерация*

aovatulyan@sfnedu.ru, rdn90@bk.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2024*

Большинство исследований в области задач оптимизации в механике деформируемого твердого тела направлено на поиск оптимальной формы элементов конструкций, что чаще всего приводит к поиску оптимальных распределений геометрических характеристик рассматриваемых объектов с целью обеспечения снижения веса объекта и улучшения прочностных характеристик. Вместе с тем с появлением современных материалов с переменными физико-механическими свойствами возникли новые актуальные отвлечения в задачах оптимизации, а также в обратных задачах реконструкции законов неоднородности переменных характеристик. В настоящем исследовании рассмотрена задача об установившихся колебаниях предварительно напряженной неоднородной круглой упругой пластины в осесимметричной постановке. Представлены вариационная и слабая постановки задачи. Исследован случай свободных колебаний шарнирно опертой по контуру пластины; показано, что задача на собственные значения является самосопряженной и вполне определенной. Рассмотрена задача поиска оптимального распределения упругого модуля пластины и соответствующей формы колебаний с целью максимизации первой собственной частоты. Предложено изопериметрическое условие для функции переменной жесткости. На основе энергетического соотношения Рэлея сформулирован принцип минимума для первого собственного значения и соответствующей собственной функции – формы колебаний пластины. На основе вариационного принципа с использованием построенного соотношения Рэлея сформулировано условие оптимальности, получено явное представление для функций оптимальной формы колебаний и оптимальной жесткости с учетом начального радиального растяжения или сжатия пластины. Определен диапазон возможных значений для величины начального напряжения. Получены и проанализированы результаты решения задачи в виде построения оптимальных законов неоднородности для функции жесткости в классе гладких функций в рассмотренном диапазоне изменения начальных напряжений.

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Южный федеральный университет).

*Ключевые слова:* пластина, переменная жесткость, неоднородность, предварительные напряжения, оптимизация, слабая постановка, вариационный принцип, соотношение Рэлея, собственная частота.

## **Введение**

В настоящее время в литературе представлено значительное число работ, посвященных изучению задач оптимизации в механике деформируемого твердого тела. Большинство этих исследований направлено на поиск оптимальной формы элементов конструкций, что чаще всего приводит к поиску оптимальных распределений геометрических характеристик рассматриваемых объектов с целью обеспечения снижения веса объекта и улучшения прочностных характеристик [1–3]. В то же время с появлением современных материалов с переменными физико-механическими свойствами (включая функционально-градиентные композиты) возникли новые актуальные ответвления в задачах оптимизации, а также в обратных задачах реконструкции законов неоднородности переменных характеристик [4].

Исследование задач оптимизации формы и материальных характеристик упругих неоднородных тел активно началось в 70-х годах прошлого столетия. В сборнике трудов [1] приведено решение цикла задач оптимизации пластин, балок и других тел в режиме установившихся колебаний и при анализе условий потери устойчивости. Целью исследований являлся поиск такого распределения геометрических или физических характеристик объектов по объему, которое приводит к максимальному значению собственной частоты колебаний либо критической нагрузки, при которой происходит потеря устойчивости. В [1] представлен единый вариационный подход к задачам оптимизации, связанным с задачами на собственные значения, в основе которого лежит вариационный анализ энергетического соотношения Рэлея. В статье [5] в рамках такого подхода рассматривается задача нахождения оптимального распределения модуля Юнга в преднапряженном шарнирно опертом стержне в режиме установившихся изгибных колебаний. Построены зависимости оптимальной нижней собственной частоты колебаний от величины осевого начального усилия, распределенного по стержню, оценена эффективность оптимизации. В [6] разработанный подход развит для исследования оптимального распределения остаточных напряжений в круглых и прямоугольных тонких пластинах в предположении о том, что геометрические и материальные характеристики постоянны. В статьях [7, 8] рассмотрены задачи нахождения оптимальной формы неоднородных по толщине дисков в различных ситуациях. В рамках аналогичной концепции в [9, 10] рассмотрены задачи оптимизации, направленные на минимизацию веса кольцевых и сплошных пластин переменной толщины в режиме изгибных колебаний при различных способах закрепления.

Тонкостенные конструкции отличаются эффективным отношением жесткости к весу по сравнению с толстостенными элементами и поэтому играют важную роль во многих отраслях производства, включая автомобиле- и самолетостроение. В последние десятилетия проектированию и топологической оптимизации тонких оболочечных конструкций уделяется все больше внимания; отметим исследования для фюзеляжей самолетов и башни Лотте [11], ортезов голеностопного сустава [12], других тонких оболочек различных топологий [13].

Интересно отметить, что во многих исследованиях проводится оптимизация трехмерной топологии тонкостенных структур, но при этом не используются геомет-

рические особенности моделей с применением соответствующих гипотез деформирования для снижения вычислительных затрат [14, 15]. С использованием некоторых дополнительных геометрических ограничений были разработаны подходы для проектирования тонкостенных структур, в том числе различных объектов с покрытиями [16], тонких металлических листов, подверженных технологическому процессу формовки листового металла [17], тонкостенных складных конструкций [18]. Отметим также разработки, посвященные проектированию функциональных тонких оболочек, где исследовалась совместная оптимизация формы и материальных характеристик оболочек [19–21], в том числе в рамках теорий связанных полей.

При исследовании топологической оптимизации часто прибегают к помощи конечно-элементного анализа, это приводит к тому, что процесс оптимизации занимает много времени [22]. С развитием вычислительных технологий появились метаэвристические алгоритмы оптимизации; такие алгоритмы довольно широко используются для оптимизации конструкции материалов композитных слоистых пластин [23, 24]. Кроме того, в настоящее время активно ведутся исследования в области развития генетических алгоритмов с целью применения к задачам оптимизации [25].

Для изготовления элементов конструкций, выполненных из функционально-градиентных композитов, часто используются высокотемпературные технологии, в результате применения которых после остывания в образцах часто образуются поля предварительных напряжений (ПН), оказывающих значительное влияние на динамические характеристики конструкций и критерии разрушения [26]. В связи с этим, наряду с задачами оптимизации, исследование проблем мониторинга и идентификации ПН в элементах конструкций в рамках методов неразрушающего контроля представляет несомненную практическую значимость [27, 28].

В настоящей статье рассматривается задача об осесимметричных установившихся колебаниях тонкой круглой упругой пластины при наличии поля ПН радиального растяжения или сжатия. На основе вариационного принципа Гамильтона – Остроградского построены вариационная и слабая формулировки задачи. Для постановки задачи о свободных колебаниях шарнирно опертой по контуру пластины с использованием слабой формулировки показана самосопряженность соответствующего дифференциального оператора. На основе энергетического соотношения Рэлея сформулирован принцип минимума для первого собственного значения и соответствующей собственной функции. Исследована задача поиска оптимального распределения жесткости пластины и соответствующей формы колебаний с целью максимизации первой собственной частоты. Сформулировано условие оптимальности, получены представления для функций оптимальной формы колебаний и оптимальной жесткости с учетом рассмотренного начального напряженного состояния. Найдены границы диапазона значений для величины начального напряжения, построены оптимальные законы распределения переменной жесткости в классе гладких функций.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об установившихся осесимметричных изгибных колебаниях тонкой упругой изотропной пластины толщиной  $H$  с переменной жесткостью в условиях предварительного напряженного состояния – радиального растяжения или сжатия (рис. 1).

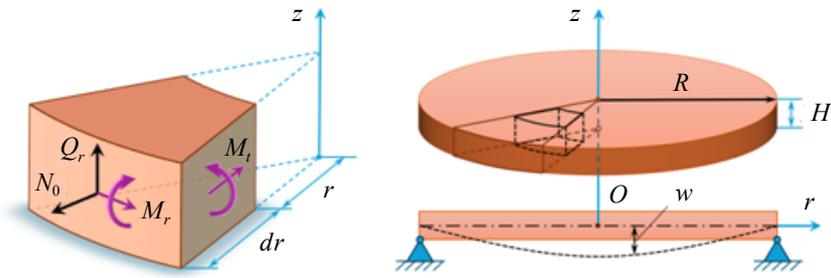


Рис. 1. Бесконечно малый элемент с равнодействующими величинами и пластина

Уравнение движения имеет вид [1, 6, 29]

$$\left( r \left[ D \left( w'' + \frac{w'}{r} \right)' + D' \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) - N_0 w' \right] \right)' = \rho \omega^2 H w r, \quad (1)$$

где  $D = EH^3/(12(1 - \nu^2))$  – цилиндрическая жесткость;  $w$  – функция прогиба;  $r$  – радиальная координата;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $N_0 = H\sigma_0$  – величина начальной нагрузки, действующей в срединной плоскости пластины в радиальном направлении;  $\sigma_0$  – соответствующая величина ПН;  $\rho$  – плотность;  $\omega$  – круговая частота установившихся колебаний;  $E$  – модуль Юнга; штрихи означают производные по  $r$ . Введем обозначения для равнодействующих радиального и углового изгибающих моментов и перерезывающей силы на единицу длины:

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right), & M_t &= -D \left( \nu w'' + \frac{w'}{r} \right), \\ Q_r &= -D \left( w'' + \frac{w'}{r} \right)' - D' \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) + N_0 w'. \end{aligned} \quad (2)$$

Тогда уравнение движения можно записать в виде  $(rQ_r)' + \rho\omega^2 Hwr = 0$ . Рассмотрим условия шарнирного опирания по внешнему контуру пластины:

$$w'(0) = 0, \quad w(R) = 0, \quad Q_r(0) = 0, \quad M_r(R) = 0, \quad (3)$$

где  $R$  – радиус пластины.

Система (1)–(3) представляет собой постановку краевой задачи, которая в случае постоянной жесткости и отсутствия ПН имеет аналитическое решение, а при постоянных ПН может быть сведена к исследованию трансцендентного частотного уравнения, приведенного, например, в [29].

Рассмотрим для описанной модели задачу оптимизации, состоящую в определении оптимального закона распределения жесткости по радиальной координате, при котором первая собственная частота колебаний является максимальной, и в нахождении значения этой частоты, а также соответствующей формы колебаний. При этом будем следовать технике, описанной в [5–8] и основанной на использовании соотношения Рэлея и вывода условия оптимальности с помощью вариационного метода.

## 2. Энергетические соотношения

Для вывода слабой постановки задачи (1)–(3) рассмотрим пробную функцию  $v$ , удовлетворяющую главным граничным условиям из (3). Пользуясь стандартной

техники, домножим уравнение движения (1) на гладкую пробную функцию  $v$  и проинтегрируем результат по радиальной координате. Применяя формулу интегрирования по частям и граничные условия (3), получим:

$$W^{wv} - \omega^2 K^{wv} = 0, \quad (4)$$

где

$$W^{wv} = 2\pi \int_0^R \left( D \left[ w'' v'' + v \left( w'' \frac{v'}{r} + \frac{w'}{r} v'' \right) + \frac{w'}{r} \frac{v'}{r} \right] + N_0 w' v' \right) r dr,$$

$$K^{wv} = 2\pi \int_0^R \rho H w v r dr.$$

Рассматривая в качестве пробной функции основную функцию прогиба, нетрудно сформулировать вариационный принцип Гамильтона – Остроградского

$$\delta \Lambda = 0, \quad \Lambda = W^w - \omega^2 K^w, \quad (5)$$

где

$$W^w = \pi \int_0^R \left( D \left[ w'^2 + 2\nu w'' \frac{w'}{r} + \left( \frac{w'}{r} \right)^2 \right] + N_0 w'^2 \right) r dr - \text{потенциальная энергия,}$$

$$\omega^2 K^w = \pi \omega^2 \int_0^R \rho H w^2 r dr - \text{кинетическая энергия.}$$

Приведем еще два альтернативных представления для выражения в квадратных скобках в представлении потенциальной энергии:

$$\left( w'' + \frac{w'}{r} \right)^2 - 2(1-\nu) w'' \frac{w'}{r} = (1-\nu) \left( w'^2 + \left( \frac{w'}{r} \right)^2 \right) + \nu \left( w'' + \frac{w'}{r} \right)^2 \geq 0.$$

Второе представление удобно тем, что оно наглядно демонстрирует неотрицательность соответствующего выражения под знаком интеграла энергии. Связь между компонентами вариационного принципа и слабой постановки определяется соотношениями

$$W^w = \frac{W^{wv}}{2}, \quad K^w = \frac{K^{wv}}{2}.$$

Обозначая  $\lambda = \omega^2$ , на основе слабой постановки (4) рассмотрим задачу на собственные значения вида  $W^{wv} = \lambda K^{wv}$  (при отсутствии внешних силовых воздействий). Очевидно, что эта задача является самосопряженной в силу выполнения условий  $W^{wv} - W^{vw} = 0, K^{wv} - K^{vw} = 0$ . Также отметим, что задача является вполне определенной, поскольку  $W^{wv} > 0, K^{wv} > 0$ .

Выпишем соотношение Рэля, определяемое через вариационный принцип (5):

$$\lambda[w] = \frac{W^w}{K^w} = \frac{\int_0^R D T^w r dr}{\int_0^R \rho H w^2 r dr} + \frac{\int_0^R N_0 w'^2 r dr}{\int_0^R \rho H w^2 r dr}, \quad (6)$$

где введено

$$T^w = w'^2 + 2\nu w'' \frac{w'}{r} + \left( \frac{w'}{r} \right)^2.$$

Отметим, что соотношение (6) имеет место не только для рассмотренных граничных условий (3), но также и для случая опертой в центре пластины и жесткого защемления по контуру. Принцип минимума Рэлея описывается неравенством  $\lambda_1 \leq \lambda[u]$ , где  $\lambda_1$  – минимальное собственное значение, а функция  $u = u(r)$  – соответствующая собственная функция, удовлетворяющая граничным условиям (3).

### 3. Поиск оптимальной формы колебаний

Рассмотрим изопериметрическое условие для функции жесткости  $D(r)$  в виде

$$\int_0^R D(r)rdr = \frac{D_0 R^2}{2}. \quad (7)$$

Задача оптимизации состоит в определении оптимального закона распределения  $D(r)$ , подчиняющегося (7), с целью максимизации собственного значения  $\lambda_1$ . Далее применим подход к исследованию задач оптимизации, основанный на вариационном анализе отношения Рэлея. Рассмотрим семейство функций  $D(r, \varepsilon)$ , включающее в себя  $D(r, 0)$  – оптимальное распределение жесткости, и семейство функций собственных форм  $u(r, \delta)$ , где  $\varepsilon, \delta$  – малые формальные параметры.

Рассматривая функцию собственной формы  $u(r, \delta)$ , произведем в выражении  $T^w$  подстановку  $w \rightarrow u$ ; тогда

$$T^u(r, \delta) = u''^2(r, \delta) + 2\nu u''(r, \delta) \frac{u'(r, \delta)}{r} + \left( \frac{u'(r, \delta)}{r} \right)^2.$$

Соответственно отношение Рэлея (6) запишется в виде

$$\lambda(\varepsilon, \delta) = \frac{\int_0^R (D(r, \varepsilon)T^u(r, \delta) + N_0 u'^2(r, \delta))rdr}{\int_0^R \rho H u^2(r, \delta)rdr}. \quad (8)$$

При  $\varepsilon = \delta$  собственное значение, отвечающее  $D(r, \varepsilon)$ ,  $\lambda(\varepsilon, \varepsilon) = \lambda_1(\varepsilon)$ . Полагая  $\varepsilon = \delta = 0$ , получим, что  $\lambda(0, 0) = \lambda_1(0)$  – искомое оптимальное собственное значение, таким образом,  $d\lambda_1/d\varepsilon|_{\varepsilon=\delta=0} = 0$ . При этом полная производная

$$\frac{d\lambda}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\delta=0} = \frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\delta=0} + \frac{\partial\lambda}{\partial\delta}\Big|_{\varepsilon=\delta=0} \cdot \frac{d\delta}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\delta=0} = 0. \quad (9)$$

При  $\varepsilon = 0$  правая часть отношения Рэлея (8) соответствует оптимальной функции  $D(r, 0)$ ; это отношение минимизируется соответствующей собственной функцией  $u(r, 0)$ . Поэтому  $d\lambda/d\delta|_{\varepsilon=\delta=0} = 0$ , и необходимым условием для нахождения  $D(r, 0)$ , в силу (9), является  $d\lambda/d\varepsilon|_{\varepsilon=\delta=0} = 0$ . Распишем это условие, произведя дифференцирование по параметру  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\delta=0} = \frac{\int_0^R D'_\varepsilon T^u r dr}{\int_0^R \rho H u^2 r dr} = 0,$$

откуда с учетом положительности интеграла в знаменателе следует  $\int_0^R D'_\varepsilon T^u r dr = 0$ . Учитывая при этом выполнение изопериметрического условия (7), заключаем, что выражение  $T^u$  не зависит от переменной  $r$ , поэтому

$$u''^2 + 2\nu u'' \frac{u'}{r} + \left(\frac{u'}{r}\right)^2 = a^2, \quad (10)$$

где  $a \in \mathbb{R}$  – постоянная. Рассматривая главные граничные условия из (3) для собственной функции  $u(R) = 0$ ,  $u'(0)$ , получим краевую задачу для определения оптимальной формы колебаний. Точное решение задачи имеет вид

$$w^{\text{opt}}(r) = u(r) = -\frac{a\sqrt{2}(R^2 - r^2)}{2\sqrt{\nu + 1}}. \quad (11)$$

#### 4. Поиск оптимального распределения жесткости и оптимальной собственной частоты

Запишем уравнение движения (1) относительно функции жесткости:

$$\begin{aligned} D'' \left( w'' + \nu \frac{w'}{r} \right) + \frac{D'}{r} \left( 2rw''' + (\nu + 2)w'' - \frac{w'}{r} \right) + \frac{D}{r^2} \left( r^2 w'''' + 2rw''' - w'' + \frac{w'}{r} \right) = \\ = \rho\omega^2 Hw + \frac{1}{r} (rN_0 w')'. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем далее рассматривать случай постоянных ПН:  $N_0 = \text{const}$ . Для найденной оптимальной формы колебаний (11) уравнение (12) примет вид

$$D'' + \frac{D'}{r} = -\kappa(R^2 - r^2) + \frac{2N_0}{\nu + 1}, \quad (13)$$

где введен частотный параметр  $\kappa = \omega^2 \rho H / [2(1 + \nu)]$ .

Соответствующие момент и перерезывающая сила (2) запишутся в виде:

$$M_r(r) = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\nu + 1} D(r), \quad Q_r(r) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{\nu + 1} \left( -D'(r) + \frac{N_0}{\nu + 1} r \right),$$

поэтому соответствующие граничные условия  $M_r(R) = 0$ ,  $Q_r(0) = 0$  из (3) примут вид

$$D(R) = 0, \quad D'(0) = 0. \quad (14)$$

Краевая задача (13), (14) имеет аналитическое решение, описывающее оптимальное распределение жесткости пластины

$$D^{\text{opt}} = \frac{\kappa}{16} (3R^2 - r^2)(R^2 - r^2) - \frac{N_0}{2(\nu + 1)} (R^2 - r^2). \quad (15)$$

Заметим, что первое слагаемое в (15) всегда неотрицательно.

Выражения  $W^w$  и  $K^w$  из вариационного принципа (5) при оптимальном распределении жесткости (15) запишутся в виде

$$W^{\text{opt}} = W^w \Big|_{w=w^{\text{opt}}} = \frac{\pi R^2 a^2}{8(1 + \nu)} (4(1 + \nu)D_0 + R^2 N_0) = \frac{\pi R^2 a^2}{2} D_0 + \frac{\pi R^4 a^2}{8(1 + \nu)} N_0,$$

$$K^{\text{opt}} = K^w \Big|_{w=w^{\text{opt}}} = \frac{\pi R^6 a^2 \rho H}{48(1 + \nu)}.$$

В выражении  $W^{\text{opt}}$  также учтено изопериметрическое условие (7).

Оптимальная первая собственная частота колебаний при этом может быть найдена из отношения Рэлея (6):

$$\lambda^{\text{opt}} = (\omega^{\text{opt}})^2 = \frac{W^{\text{opt}}}{K^{\text{opt}}} = \frac{24(1+\nu)D_0}{\rho R^4 H} + \frac{6N_0}{\rho R^2 H} = \frac{6}{\rho R^4 H} (4(1+\nu)D_0 + R^2 N_0). \quad (16)$$

Отсюда находим соответствующее значение для

$$\kappa^{\text{opt}} = \frac{\lambda^{\text{opt}} \rho H}{2(1+\nu)} = \frac{3}{R^4(1+\nu)} (4(1+\nu)D_0 + R^2 N_0).$$

Подставляя его в выражение для (15), находим в итоге

$$\begin{aligned} D^{\text{opt}}(r, N_0) &= \frac{3}{4} \frac{D_0}{R^4} (3R^2 - r^2)(R^2 - r^2) + \frac{N_0}{16R^2(\nu+1)} (R^2 - 3r^2)(R^2 - r^2) = \\ &= \frac{3}{4} D_0 \left[ \left( \frac{r}{R} \right)^4 - 4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 3 \right] + \frac{N_0 R^2}{16(\nu+1)} \left[ 3 \left( \frac{r}{R} \right)^4 - 4 \left( \frac{r}{R} \right)^2 + 1 \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

## 5. Определение диапазона значений для ПН

Полученная формула (17) выражает оптимальную жесткость пластины как функцию от параметра ПН  $N_0$ . Определим границы диапазона значений величины  $N_0$ .

### 1. Минимальное значение ПН

Левая граница диапазона ПН может быть найдена из условия равенства нулю оптимального значения собственной частоты, при которой происходит потеря устойчивости предварительно сжатой пластины:  $N_0^{\min} = N_0|_{\lambda^{\text{opt}}=0}$ . Приравнявая нулю выражение (16), получим выражение для критической начальной силы радиального сжатия пластины  $N_0^{\min} = -\alpha$ , где  $\alpha = (4(\nu+1)/R^2)D_0$ . Соответствующий закон оптимального распределения жесткости шарнирно опертой пластины при потере устойчивости имеет вид

$$D^{\text{opt}}|_{N_0^{\min}} = \frac{2D_0}{R^2} (R^2 - r^2).$$

### 2. Максимальное значение ПН

Правую границу диапазона ПН определим из условия неотрицательности функции жесткости  $D^{\text{opt}}(r, N_0) \geq 0$ . В этом случае получим

$$N_0^{\max}(r) = \frac{12(1+\nu)D_0}{R^2} \frac{3R^2 - r^2}{3r^2 - R^2}, \quad N_0^{\max}(R) = \frac{12(1+\nu)D_0}{R^2} = 3\alpha.$$

Таким образом, диапазон возможных значений ПН имеет вид  $N_0 = [-\alpha, 3\alpha]$ .

## 6. Численные расчеты. Анализ эффективности оптимального решения

Для оценки эффективности полученного закона оптимального распределения жесткости пластины проведем сравнение первой собственной частоты  $\omega^{\text{opt}} = \sqrt{\lambda^{\text{opt}}}$  в зависимости от величины ПН  $N_0$  в найденном диапазоне изменения  $[-\alpha, 3\alpha]$  с аналогичными значениями первой собственной частоты  $\omega$  из задачи для однородной пластины с постоянной жесткостью  $D_0$ . Частота  $\omega$  в зависимости от величины ПН может быть определена согласно закону  $\omega(N_0) = \omega_0 \sqrt{1 - N_0/N_{\text{cr}}}$ , где  $\omega_0 = \beta/R^2 \times \sqrt{D_0/(\rho H)}$  представляет собой первую собственную частоту для рассмотренной

однородной пластинки без ПН (при  $N_0 = 0$ ). В случае свободного опирания с граничными условиями (3) значение  $\beta = 4,977$  приведено, например, в [29]; значение соответствующей критической силы сжатия при потере устойчивости приведено, например, в [30] и равно  $N_{cr} = -4,2D_0/R^2$ .

На рис. 2 приведены графики оптимального распределения жесткости  $D^{opt}(r, N_0)$  при различных значениях величины ПН  $N_0$  в указанном выше диапазоне при следующих параметрах пластины:  $R = 1,37$  м,  $H = 0,05R$ ,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0,29$ ,  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>; штриховая линия – постоянная жесткость  $D_0$ . Границы диапазона значений ПН по отношению к упругому модулю составили  $\sigma_0/E = N_0/(EH) \in [-0,0012, 0,0035]$ ; соответствующее значение  $\alpha \approx 1,61 \cdot 10^7$  Н/м.

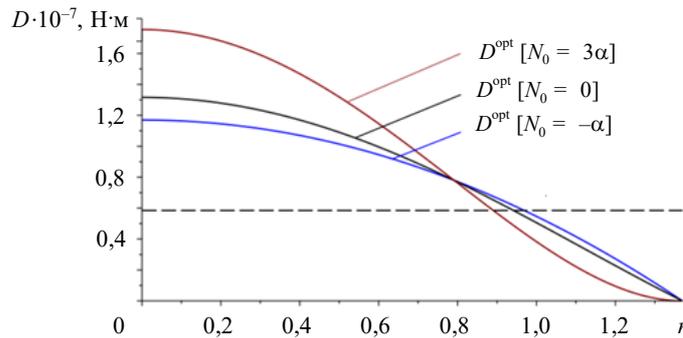


Рис. 2. Оптимальная цилиндрическая жесткость пластинки  $D^{opt}(r, N_0)$  при различных значениях радиальных ПН  $N_0$

На рис. 3 представлены зависимости оптимальной первой собственной частоты  $\omega^{opt}$  и частоты  $\omega$  для однородной пластины от величины ПН  $N_0$  (верхняя часть рисунка), а также эффективность оптимального решения в процентном соотношении, вычисленная по формуле  $I = (\omega^{opt} - \omega)/\omega^{opt} \cdot 100\%$  (нижняя часть рисунка). Значения для частот для рассмотренной пластины при отсутствии ПН:  $\omega^{opt} = 309,18$  рад/с,  $\omega_0 = 276,56$  рад/с. Отношение значений критической силы для оптимального и однородного случаев  $N_{cr}^{opt}/N_0^{min} \approx 1,23$ . Шкалы обеих осей абсцисс приведены в едином масштабе.

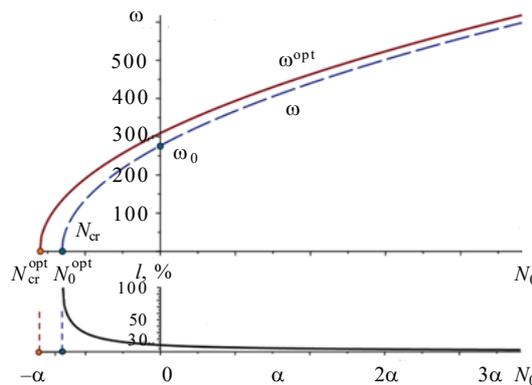


Рис. 3. Зависимости оптимальной первой собственной частоты  $\omega^{opt}$ , частоты  $\omega$  для однородной пластины и эффективности оптимального решения в процентном соотношении от величины ПН  $N_0$

## Заключение

Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что увеличение начальной радиальной растягивающей силы в круглой шарнирно опертой пластине приводит к снижению эффективности оптимизированной первой собственной частоты по причине снижения влияния цилиндрической жесткости пластины как оптимизационного параметра (управляющей функции). В случае начального напряженного состояния сжатия пластины оптимизация является более эффективной.

### Список литературы

1. Ольхофф Н. Оптимальное проектирование конструкций: Вопросы вибрации и потери устойчивости. *Механика. Новое в зарубежной науке: Сб. статей*. Вып. 27. М.: Мир, 1981. 277 с.
2. Баничук Н.В. *Оптимизация форм упругих тел*. М.: Наука, 1980. 256 с.
3. Баничук Н.В. *Введение в оптимизацию конструкций*. М.: Наука, 1986. 304 с.
4. Ватульян А.О. *Кoeffициентные обратные задачи механики*. М.: Физматлит, 2019. 272 с.
5. Rammerstorfer F.G. On the optimal distribution of the Young's modulus of a vibrating prestressed beam. *Journal of Sound and Vibration*. 1974. Vol. 37. P. 140–145. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80064-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80064-7).
6. Rammerstorfer F.G. Increase of the first natural frequency and buckling load of plates by optimal fields of initial stresses. *Acta Mechanica*. 1977. Vol. 27. P. 217–238. <https://doi.org/10.1007/BF01180087>.
7. Niordson F. Optimal disks in vibration. *International Journal of Solids and Structures*. 1997. Vol. 34. No 23. P. 2957–2968. DOI: 10.1016/s0020-7683(97)00186-8.
8. Niordson F. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. *International Journal of Solids and Structures*. 1983. Vol. 19. Iss. 2. P. 141–151. DOI: 10.1016/0020-7683(83)90005-7.
9. Аристов М.В., Троицкий В.А. Упругая кольцевая пластина минимального веса. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1975. №3. С. 172–176.
10. Гура Н.М., Сейранян А.П. Оптимальная круглая пластинка при ограничениях по жесткости и частоте собственных колебаний. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1977. №1. С. 138–145.
11. Träff E.A., Sigmund O., Aage N. Topology optimization of ultra high resolution shell structures. *Thin-Walled Structures*. 2021. Vol. 160. Article 107349-1 – 107349-16. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107349.
12. Otani T., Sumihira W., Kobayashi Y., Tanaka M. Density-based topology optimization of thin plate structure with geometric nonlinearity using a three-dimensional corotational triangle element formulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2022. Vol. 65. Iss. 10. Article No 282. DOI: 10.1007/s00158-022-03399-3.
13. Jiang X., Zhang W., Liu C., Du Z., Guo X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Applied Mathematical Modelling*. 2023. Vol. 113. P. 613–639. DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.028.
14. Bendsøe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 2003. 370 p.
15. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48. Iss. 6. P. 1031–1055. DOI: 10.1007/s00158-013-0978-6.
16. Wang Y., Kang Z. A level set method for shape and topology optimization of coated structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 329. P. 553–574.
17. Dienemann R., Schumacher A., Fiebig S. Topology optimization for finding shell structures manufactured by deep drawing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2017. Vol. 56. No 2. P. 473–485. DOI: 10.1007/s00158-017-1661-0.
18. Zhou Y., Nomura T., Dede E.M., Saitou K. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures. *Structural*

and Multidisciplinary Optimization. 2022. Vol. 65. No 8. P. 118. DOI: 10.1007/s00158-022-03219-8.

19. Skouras M., Thomaszewski B., Bickel B., Gross M. Computational design of rubber balloons. *Computer Graphics Forum: Proceedings of Eurographics*. Cagliari, Italy. 13–18 May 2012. Vol. 31. No 2. Wiley Online Library, 2012. P. 835–844.

20. Chen X., Ni X., Zhu B., Wang B., Chen B. Simulation and optimization of magnetoelastic thin shells. *ACM Transaction Graphics*. 2022. Vol. 41. Iss. 4. P. 61-1 – 62-18. <https://doi.org/10.1145/3528223.3530142>.

21. Gil-Ureta F., Pietroni N., Zorin D. Reinforcement of general shell structures. *ACM Transaction Graphics*. 2020. Vol. 39. No 5. P. 1-1 – 1-19.

22. Muc A. Optimal design of composite multilayered plated and shell structures. *Thin-Walled Structures*. 2007. Vol. 45. Iss. 10-11. P. 816–820. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.08.042>.

23. Koide R.M., Franca G., Luersen M.A. An ant colony algorithm applied to lay-up optimization of laminated composite plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. Iss. 3. P. 491–504. DOI: 10.1590/S1679-78252013000300003.

24. Ghashochi-Bargh H., Sadr M.H. PSO algorithm for fundamental frequency optimization of fiber metal laminated panels. *Structural Engineering and Mechanics*. 2013. Vol. 47. Iss. 5. P. 713–727. DOI: 10.12989/sem.2013.47.5.713.

25. Adan J. A hybrid genetic algorithm for parallel machine scheduling with setup times. *Journal of Intelligent Manufacturing*. 2022. Vol. 33. P. 2059–2073. DOI: 10.1007/s10845-022-01959-4.

26. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. *Предварительные напряжения: моделирование и идентификация*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 205 с.

27. Ватульян А.О., Недин Р.Д., Юров В.О. Моделирование и анализ начального напряженного состояния в тонкостенном цилиндре с переменными характеристиками. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №2. С. 189–205. DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-2-189-205.

28. Ватульян А.О., Недин Р.Д. О чувствительности и реконструкции двумерного начального напряженного состояния тонкой пластины. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2023. Т. 16. №1. С. 61–77. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2023.16.1.5>.

29. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем*. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

39. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки*. М.: Наука, 1966. 635 с.

#### References

1. Olkhoff N. Optimalnoe proektirovanie konstruksiy: Voprosy vibratsii i poteri ustoychivosti [Optimal design of structures. Issues of vibration and loss of stability]. In: *Mekhanika. Novoe v zarubezhnoy nauke* [Mechanics. New in Foreign Science]. Iss. 27. Moscow. Mir Publ. 1981. 277 p. (In Russian).

2. Banichuk N.V. *Optimizatsiya form uprugikh tel* [Optimization of Forms of Elastic Bodies]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 256 p. (In Russian).

3. Banichuk N.V. *Vvedenie v optimizatsiyu konstruksiy* [Introduction to Optimization of Structures]. Moscow. Nauka Publ. 1986. 304 p. (In Russian).

4. Vatulyan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 272 p. (In Russian).

5. Rammerstorfer F.G. On the optimal distribution of the Young's modulus of a vibrating prestressed beam. *Journal of Sound and Vibration*. 1974. Vol. 37. P. 140–145. [https://doi.org/10.1016/S0022-460X\(74\)80064-7](https://doi.org/10.1016/S0022-460X(74)80064-7).

6. Rammerstorfer F.G. Increase of the first natural frequency and buckling load of plates by optimal fields of initial stresses. *Acta Mech*. 1977. Vol. 27. P. 217–238. <https://doi.org/10.1007/BF01180087>.

7. Niordson F. Optimal disks in vibration. *Int. J. Solids Struct*. 1997. Vol. 34. No 23. P. 2957–2968. DOI: 10.1016/s0020-7683(97)00186-8.

8. Niordson F. Optimal design of elastic plates with a constraint on the slope of the thickness function. *Int. J. Solids Struct*. 1983. Vol. 19. Iss. 2. P. 141–151. DOI: 10.1016/0020-7683(83)90005-7.

9. Aristov M.V., Troitskiy V.A. Uprugaya koltsevaya plastina minimalnogo vesa [Elastic ring plate of minimum weight]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1975. No 3. P. 172–176 (In Russian).
10. Gura N.M., Seyranyan A.P. Optimalnaya kruglaya plastinka pri ogranicheniyakh po zhestkosti i chastote sobstvennykh kolebaniy [Optimal round plate with restrictions on stiffness and frequency of natural oscillations]. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 1977. No 1. P. 138–145 (In Russian).
11. Träff E.A., Sigmund O., Aage N. Topology optimization of ultra high resolution shell structures. *Thin-Walled Structs*. 2021. Vol. 160. Article No 107349-1 – 107349-16. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107349.
12. Otani T., Sumihira W., Kobayashi Y., Tanaka M. Density-based topology optimization of thin plate structure with geometric nonlinearity using a three-dimensional corotational triangle element formulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2022. Vol. 65. Iss. 10. Article No 282. DOI: 10.1007/s00158-022-03399-3.
13. Jiang X., Zhang W., Liu C., Du Z., Guo X. An explicit approach for simultaneous shape and topology optimization of shell structures. *Appl. Math. Model.* 2023. Vol. 113. P. 613–639. DOI: 10.1016/j.apm.2022.09.028.
14. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin. Heidelberg. New York. Springer Verlag. 2003. 370 p.
15. Sigmund O., Maute K. Topology optimization approaches: A comparative review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2013. Vol. 48. Iss. 6. P. 1031–1055. DOI: 10.1007/s00158-013-0978-6.
16. Wang Y., Kang Z. A level set method for shape and topology optimization of coated structures. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2018. Vol. 329. P. 553–574. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2017.09.017>.
17. Dienemann R., Schumacher A., Fiebig S. Topology optimization for finding shell structures manufactured by deep drawing. *Struct. Multidiscipl. Optim.* 2017. Vol. 56. No 2. P. 473–485. DOI: 10.1007/s00158-017-1661-0.
18. Zhou Y., Nomura T., Dede E.M., Saitou K. Topology optimization with wall thickness and piecewise developability constraints for foldable shape-changing structures. *Struct. Multidiscipl. Optim.* 2022. Vol. 65. No 8. P. 118. DOI: 10.1007/s00158-022-03219-8.
19. Skouras M., Thomaszewski B., Bickel B., Gross M. Computational design of rubber balloons. *Computer Graphics Forum: Proceedings of Eurographics*. Cagliari, Italy. 13–18 May 2012. Vol. 31. No 2. Wiley Online Library. 2012. P. 835–844.
20. Chen X., Ni X., Zhu B., Wang B., Chen B. Simulation and optimization of magnetoelastic thin shells. *ACM Transaction Graphics*. 2022. Vol. 41. Iss. 4. P. 61-1 – 62-18. <https://doi.org/10.1145/3528223.3530142>.
21. Gil-Ureta F., Pietroni N., Zorin D. Reinforcement of general shell structures. *ACM Transaction Graphics*. 2020. Vol. 39. No 5. P. 1-1 – 1-19.
22. Muc A. Optimal design of composite multilayered plated and shell structures. *Thin Wall Struct.* 2007. Vol. 45. Iss. 10-11. P. 816–820. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.08.042>.
23. Koide R.M., Franca G., Luersen M.A. An ant colony algorithm applied to lay-up optimization of laminated composite plates. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013. Vol. 10. Iss. 3. P. 491–504. DOI: 10.1590/S1679-78252013000300003.
24. Ghashochi-Bargh H., Sadr M.H. PSO algorithm for fundamental frequency optimization of fiber metal laminated panels. *Structural Engineering and Mechanics*. 2013. Vol. 47. Iss. 5. P. 713–727. DOI: 10.12989/sem.2013.47.5.713.
25. Adan J. A hybrid genetic algorithm for parallel machine scheduling with setup times. *J. Intell. Manuf.* 2022. Vol. 33. P. 2059–2073. DOI: 10.1007/s10845-022-01959-4.
26. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. *Predvaritelnye napryazheniya: modelirovanie i identifikatsiya* [Preliminary Stresses: Modeling and Identification]. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2014. 205 p. (In Russian).
27. Vatulyan A.O., Nedin R.D., Yurov V.O. Modelirovanie i analiz nachalnogo napryazhenogo sostoyaniya v tonkostennom tsilindre s peremennymi kharakteristikami [Modelling and analysis of initial stress state in a thin-wall cylinder with variable characteristics]. *Problemy*

*prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2023. Vol. 85. No 2. P. 189–205 (In Russian).

28. Vatulyan A.O., Nedin R.D. O chuvstvitelnosti i rekonstruktsii dvumernogo nachalnogo napryazhennogo sostoyaniya tonkoy plastiny [On the sensitivity and reconstruction of 2D prestress state in a thin plate]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred [Computational Mechanics of Continuous Media]*. 2023. Vol. 16. No 1. P. 61–77 (In Russian).

29. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyykh system [Vibrations of Deformable Systems]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1970. 734 p. (In Russian).

30. Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S. *Theory of Plates and Shells*. New York. Mc Graw-Hill. 1959. 581 p.

## ON AN OPTIMIZATION PROBLEM FOR A PRESTRESSED PLATE WITH VARIABLE STIFFNESS\*

Vatulyan A.O., Nedin R.D.

*Southern Federal University, I.I. Vorovich Institute of Mathematics,  
Mechanics and Computer Science, Rostov-on-Don, Russian Federation  
Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the RAS,  
Russian Federation*

aovatulyan@srfedu.ru, rdn90@bk.ru

*Received by the Editor 2024/05/16*

Most studies in the field of optimization problems in the mechanics of the deformable solid body are aimed at finding the optimal shape of structural elements, which most often leads to the search for the optimal distributions of geometric characteristics for the considered objects in order to ensure reducing the objects' weight and improve their strength characteristics. At the same time, with the advent of modern materials with variable physical and mechanical properties, new relevant branches arose in the optimization problems, as well as the inverse problems on the reconstruction of non-uniform variable characteristics. In this study, the problem of steady-state oscillations of a prestressed inhomogeneous round elastic plate in an axisymmetric formulation is considered. Variational and weak problem statements are presented. The case of free oscillations of a plate simply supported along the contour is investigated; it is shown that the eigenvalue problem is self-adjoint and quite definite. The problem of finding the optimal distribution of the plates' elastic modulus and the corresponding oscillation shape in order to maximize the first natural frequency is considered. An isoperimetric condition for the variable stiffness function is proposed. Based on the Rayleigh energy ratio, the minimum principle for the first eigenvalue and the corresponding eigenfunction is formulated. On the basis of the variational principle, using the constructed Rayleigh ratio, the optimality condition is formulated, and an explicit representation is obtained for the functions of the optimal oscillation shape and optimal stiffness, taking into account the initial radial stretching or compression of the plate. The range of possible values for the initial stress is determined. The results of solving the problem via constructing optimal inhomogeneity laws for the stiffness function in the class of smooth functions in the considered range of changes in initial stresses are obtained and analyzed.

*Keywords:* plate, variable stiffness, inhomogeneity, prestress, optimization, weak formulation, variational principle, Rayleigh's ratio, natural frequency.

---

\* The study was supported by the Russian Science Foundation (grant No 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/>, Southern Federal University).