

УДК 539.3; 534-16; 534-18

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-192-201

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ В ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОМ ВЯЗКОУПРУГОМ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ СЛОЕ*

© 2024 г.

Пшеничнов С.Г.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

serp56@yandex.ru

Поступила в редакцию 27.04.2024

Исследуется распространение нестационарных возмущений в плоскопараллельном слое бесконечной протяженности, которые возникают в результате нормального динамического нагружения одной из его поверхностей при неподвижности другой поверхности. Материал слоя предполагается функционально-градиентным и вязкоупругим. Наследственные свойства такого материала учитываются с помощью линейных интегральных соотношений Больцмана – Вольтерра с регулярными ядрами в виде частичных сумм рядов Прони. Особенностью является то, что параметры ядер релаксации считаются непрерывными функциями поперечной координаты так же, как и другие физико-механические характеристики. Использован метод, который состоит в замене функционально-градиентного материала аппроксимирующей слоисто-однородной структурой с условиями непрерывности на контакте однородных слоев. Решение нестационарной динамической задачи линейной вязкоупругости для пакета плоских однородных вязкоупругих слоев представлено в специальной форме, которая существенно упрощает его численную реализацию, особенно при большом числе слоев с разными наследственными свойствами. Это дало возможность успешно применить указанный метод и провести серию расчетов, используя эффективный алгоритм.

Исследованы переходные волновые процессы в случае, когда параметры функционально-градиентного материала являются немонотонными функциями поперечной координаты, симметричными относительно срединной плоскости слоя. Проведено сравнение переходных волновых процессов при различных видах этих функций. Подтверждена сходимость результатов вычислений с увеличением числа аппроксимирующих однородных слоев при непрерывной зависимости внешней нагрузки от времени. Установлено существенное влияние на нестационарные волновые процессы как неоднородности, так и вязкости материала.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы, волновые процессы, вязкоупругость, динамика слоистых тел, неоднородный слой.

*Выполнено за счет гранта РФФИ №24-29-00164, <https://rscf.ru/project/24-29-00164/>.

Введение

Функционально-градиентные материалы (ФГМ) с непрерывной зависимостью физико-механических параметров от пространственных координат находят все большее применение в самых различных областях техники, поэтому исследование поведения таких материалов при динамических воздействиях становится все более актуальным. Регулярное изучение динамики непрерывно-неоднородных упругих тел с помощью аналитических и численно-аналитических методов началось еще несколько десятилетий назад [1–4], обзор современного состояния исследований по этой теме содержится в статьях [5–7]. При изучении волновых процессов в ФГМ используются матричные методы [8], методы степенных рядов, ортогональных полиномов, полу-аналитический метод конечных элементов и другие, описанные в обзорах [5, 6]. Достигнуты успехи в решении задач дифракции гармонических звуковых волн на твердых телах с ФГ упругими и термоупругими покрытиями [9]. Для исследования гармонических волн в ФГМ неоднородность часто аппроксимируется слоисто-однородной структурой с условиями непрерывности между слоями. Таким способом изучались стационарные волновые процессы в упругих [10] и пьезоэластичных ФГМ [11]. Отметим, что среди публикаций по исследованию ФГМ большинство посвящено стационарным процессам, хотя изучение нестационарных волн в упругих ФГМ началось достаточно давно [1–3] и потом продолжалось [12].

Количество публикаций по динамике вязкоупругих ФГМ относительно невелико. В основном исследовались стационарные волны в рамках модели Кельвина – Фойгта [13, 14] и моделей с дробными производными [15, 16], а также гармонические колебания и волны для стандартного вязкоупругого тела [17], список таких работ можно продолжить. Публикации по нестационарной динамике вязкоупругих ФГМ практически отсутствуют за исключением нескольких с участием автора, среди которых отметим [18, 19].

Целью настоящей статьи является исследование переходных процессов в слое из ФГМ, свойства которого, включая наследственные, изменяются в поперечном направлении, с помощью упомянутого метода аппроксимации слоисто-однородным пакетом и с учетом новой формы представления решения для такого пакета.

1. Постановка задачи

Рассмотрим плоский функционально-градиентный слой неограниченной протяженности с непрерывно изменяющимися свойствами вдоль поперечной координаты X . Исследуем распространение в нем нестационарных продольных возмущений, возникающих в результате нормального динамического воздействия нагрузки $P(t)$ на одну из его поверхностей при неподвижности другой (рис. 1а). Выберем в качестве безразмерных величин следующие:

$$x = \frac{X}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad u(x, \tau) = \frac{u_X}{L}, \quad \sigma_1(x, \tau) = \frac{\sigma_X}{2G_0(x)},$$
$$\gamma_S(x, \tau) = t_0 T_S, \quad \gamma_V(x, \tau) = t_0 T_V, \quad P_0 f(\tau) = \frac{P}{2G_0(1)},$$

где L – толщина слоя, $t_0 = L/c(1)$; $u_X(X, t)$, $\sigma_X(X, t)$ – перемещение и напряжение; $G_0(x)$, $\nu_0(x)$, $\rho(x)$, $T_S(X, t)$, $T_V(X, t)$ – мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, плотность, а также ядра сдвиговой и объемной релаксации; P_0 –

безразмерная константа, $c(x)$ – скорость продольных упругих волн, $f(\tau)$ – функция нагрузки.

Рассмотрим такую же задачу для слоистого пакета толщиной L (рис. 1б), состоящего из N однородных вязкоупругих слоев, $N \gg 1$, с условиями непрерывности на их контакте (при $X = X_m$, $m = 1, 2, \dots, N-1$). Обозначим через $G_0^{(n)}$, $v_0^{(n)}$, ρ_n , c_n , $T_S^{(n)}(t)$, $T_V^{(n)}(t)$ мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, плотность, скорость продольных упругих волн и наследственные ядра в n -м слое.

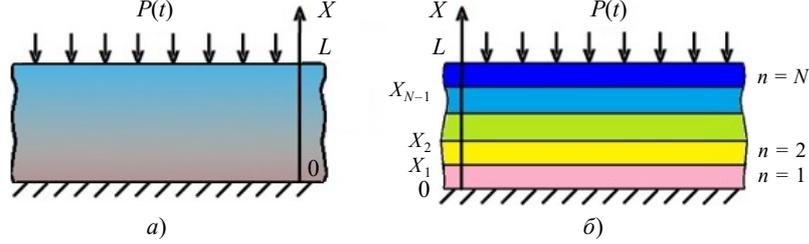


Рис. 1. Схема нагружения: а) слой из ФГМ, б) кусочно-однородный слой

Введем характерное время $t^* = L/c_N$ и безразмерные величины ($n = 1, 2, \dots, N$):

$$x = \frac{X}{L}, \quad x_n = \frac{X_n}{L} \quad (x_0 = 0, \quad x_N = 1), \quad \tau = \frac{t}{t_*}, \quad \gamma_V^{(n)}(\tau) = t_* T_V^{(n)}, \quad \gamma_S^{(n)}(\tau) = t_* T_S^{(n)},$$

$$u^{(n)}(x, \tau) = \frac{u_X^{(n)}}{L}, \quad \sigma_1^{(n)}(x, \tau) = \frac{\sigma_X^{(n)}}{2G_0^{(n)}}, \quad P_0 f(\tau) = \frac{P(t)}{2G_0^{(N)}},$$

где $u_X^{(n)}$, $\sigma_X^{(n)}$ – перемещение и напряжение в n -м слое. Параметры ФГМ будем аппроксимировать следующим образом:

$$G_0^{(n)} = 0,5[G_0(x_{n-1}) + G_0(x_n)], \quad \rho_n = 0,5[\rho(x_{n-1}) + \rho(x_n)],$$

$$v_0^{(n)} = 0,5[v_0(x_{n-1}) + v_0(x_n)], \quad \gamma_S^{(n)}(\tau) = 0,5[\gamma_S(x_{n-1}, \tau) + \gamma_S(x_n, \tau)],$$

$$\gamma_V^{(n)}(\tau) = 0,5[\gamma_V(x_{n-1}, \tau) + \gamma_V(x_n, \tau)], \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

откуда при $N \rightarrow \infty$ и стремлении к нулю толщины N -го слоя получим $t_* \rightarrow t_0$. В настоящей статье толщины всех слоев предполагались одинаковыми, равными $1/N$.

Динамика слоистого пакета описывается безразмерными уравнениями:

$$(1 - \hat{\gamma}^{(n)})[u^{(n)}(x, \tau)]'' - \alpha_n^2 \dot{u}^{(n)}(x, \tau) = 0, \quad \alpha_n = \frac{c_N}{c_n}, \quad (1)$$

$$x_{n-1} \leq x \leq x_n \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

с начальными и граничными условиями:

$$u^{(n)}(x, 0) = 0, \quad \dot{u}^{(n)}(x, 0) = 0, \quad u^{(1)}(0, \tau) = 0, \quad \sigma_1^{(N)}(1, \tau) = -P_0 f(\tau), \quad (2)$$

а также условиями непрерывности на контакте слоев ($m = 1, 2, \dots, N-1$):

$$u^{(m)}(x_m, \tau) = u^{(m+1)}(x_m, \tau), \quad G_0^{(m)} \sigma_1^{(m)}(x_m, \tau) = G_0^{(m+1)} \sigma_1^{(m+1)}(x_m, \tau) \quad (3)$$

и определяющими соотношениями:

$$\sigma_1^{(n)}(x, \tau) = w_n (1 - \hat{\gamma}^{(n)})[u^{(n)}(x, \tau)]', \quad w_n = \frac{1 - v_0^{(n)}}{1 - 2v_0^{(n)}}, \quad (4)$$

$$\hat{\gamma}^{(n)}\xi(\tau) = \int_0^{\tau} \gamma^{(n)}(\tau - \chi)\xi(\chi)d\chi,$$

$$\gamma^{(n)}(\tau) = \frac{1}{3(1 - v_0^{(n)})} [(1 + v_0^{(n)})\gamma_V^{(n)}(\tau) + 2(1 - 2v_0^{(n)})\gamma_S^{(n)}(\tau)],$$

где $\xi(\tau)$ – функция, введенная для пояснения действия оператора $\hat{\gamma}^{(n)}$. Производные по τ и x всюду обозначены соответственно точкой и штрихом.

2. Метод исследования

Решение задачи (1)–(4) строится с применением интегрального преобразования Лапласа по времени и последующего обращения. Изображения $U^{(n)}(x, s)$, $S_1^{(n)}(x, s)$ функций $u^{(n)}$, $\sigma_1^{(n)}$ содержатся в статье [18].

Пусть наследственные ядра $\gamma_S^{(n)}$, $\gamma_V^{(n)}$ принадлежат классу функций:

$$\sum_{k=1}^K a_k \exp(-b_k \tau), \quad a_k > 0, \quad b_k > 0, \quad \sum_{k=1}^K \frac{a_k}{b_k} < 1, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (5)$$

где константы a_k , b_k и K свои у каждого ядра. Пусть нагрузку характеризует $f(\tau) = h(\tau)$ – функция Хевисайда. Тогда с учетом свойств решений задач такого типа в изображениях [20], а также асимптотических исследований $U^{(n)}$, $S_1^{(n)}$ при $s \rightarrow \infty$ и вблизи конечных предельных точек множества их полюсов оригиналы $u^{(n)}$, $\sigma_1^{(n)}$ представляются в виде рядов по вычетам (ограничимся формулой для напряжений):

$$\sigma_1^{(n)}(x, \tau) = -\frac{G_0^{(N)}}{G_0^{(n)}} P_0 + \sum_{\{\eta_l \neq 0\}} \text{Res} [S_1^{(n)} \exp(s\tau)] + 2 \sum_{\{z_j\}} \text{Re} \{ \text{Res} [S_1^{(n)} \exp(s\tau)] \},$$

$$n = 1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Здесь $z_j = r_j + i\omega_j$; $r_j, \omega_j, \eta_l \in R$, $\omega_j > 0$ ($j, l = 1, 2, 3, \dots$). Объединением ненулевых действительных η_l и комплексных $r_j \pm i\omega_j$ полюсов изображений является множество E собственных значений задачи о свободных колебаниях слоистого пакета. При других $f(\tau)$ решение строится с помощью выражений (6) и интеграла Дюамеля.

Конечные предельные точки множества E являются корнями уравнений

$$1 - \Theta^{(n)}(s) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

где $\Theta^{(n)}(s)$ – изображения по Лапласу ядер $\gamma^{(n)}$. При условиях (5) все эти корни простые и лежат на действительной оси. Так как $N \gg 1$, а ядра $\gamma^{(n)}$ не одинаковы, то для расчетов с учетом формулы (6) предложим ее модификацию и следующий алгоритм. Вычислим некоторое количество комплексных z_j (начиная с наименьшего по модулю) методом итераций Ньютона, взяв в качестве начального приближения мнимые элементы спектра для случая упругих слоев ($\gamma^{(n)} \equiv 0$). Затем найдем границы локализации корней уравнений (7) на действительной оси, а сумму вычетов в действительных полюсах $s = \eta_l$ из окрестностей этих корней заменим на интеграл по такому замкнутому контуру L вокруг них, чтобы все z_j и $s = 0$ остались вне L (контур обходится против часовой стрелки):

$$\sigma_1^{(n)}(x, \tau) = -\frac{G_0^{(N)}}{G_0^{(n)}} P_0 + \frac{1}{2\pi i} \oint_L S_1^{(n)} \exp(s\tau) ds + 2 \sum_{\{z_j\}} \text{Re} \{ \text{Res} [S_1^{(n)} \exp(s\tau)] \},$$

$$n = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

При конкретных исходных данных с непрерывной $f(\tau)$ сходимость результатов для $u^{(n)}$ и $\sigma_1^{(n)}$ с ростом числа аппроксимирующих слоев N подтверждена расчетами. Для рассмотренных видов неоднородностей N изменялось вплоть до 150. Оказалось, что с увеличением N от 80 и выше результаты вычислений практически не меняются.

3. Результаты расчетов

С помощью численной реализации решения задачи (1)–(4) в форме (8) исследованы переходные процессы в слое из ФГМ с различными свойствами. На рис. 2–4 отражены лишь отдельные результаты для функции нагрузки в виде сглаженной ступеньки: $f(\tau) = 1 - \exp(-50\tau)$, $\tau > 0$. В этом случае $P(t) \rightarrow 2G_0(1)P_0$ при $t \rightarrow \infty$ и для слоя из ФГМ удобно анализировать относительное напряжение:

$$\kappa(x, \tau) = \frac{G_0(x)\sigma_1(x, \tau)}{G_0(1)P_0} = \frac{\sigma_x}{2G_0(1)P_0},$$

которое приближается относительным напряжением в соответствующем слое пакета:

$$\kappa^{(n)}(x, \tau) = \frac{G_0^{(n)}\sigma_1^{(n)}(x, \tau)}{G_0^{(N)}P_0} = \frac{\sigma_x^{(n)}}{2G_0^{(N)}P_0}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, N.$$

Рассмотрены ФГМ, характеризующиеся следующими параметрами:

$$v_0 \equiv 0,3, \quad \frac{G_0(x)}{G_0(0,5)} = \frac{\rho(x)}{\rho(0,5)} = 1 + 3|2x - 1|^q, \quad (9)$$

$$\gamma_V \equiv 0, \quad \gamma_S(x, \tau) = a(x)\exp(-\tau), \quad a(x) = 0,4(1 - 0,75|2x - 1|^q), \quad q = \text{const},$$

то есть $\rho(x)$, $G_0(x)$ – функции, симметричные относительно срединной плоскости слоя $x = 0,5$. Скорость продольных упругих волн от x не зависит, что удобно при анализе волновых процессов. Параметр $a(x)$ – функция с монотонностью, противоположной $\rho(x)$ и $G_0(x)$. Представленные результаты расчетов для всех ФГМ получены при $N = 80$ с учетом в формуле (8) 100 комплексных значений z_j . Все корни уравнений (7) лежат на интервале $(-0,97; -0,83)$, и в качестве контура L взята окружность с центром на действительной оси в точке $s_0 = -0,7$ и радиусом $r_0 = 0,5$. Отрицательные $\kappa(x, \tau)$ соответствуют сжатию (считаем $P_0 > 0$).

Рассмотрим изменение во времени относительного напряжения $\kappa(0, \tau)$ в заделке. На рис. 2 красная линия 1 показывает его для случая вязкоупругого ФГМ при кусочно-линейном изменении свойств ($q = 1$). Синяя линия 2 получена для упругого ФГМ при сохранении прочих параметров (9), зеленая 3 относится к однородному упругому слою.

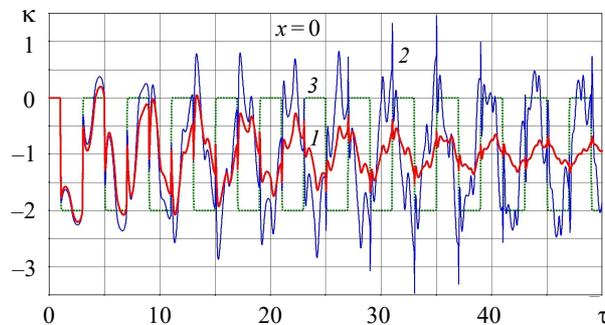


Рис. 2. Графики $\kappa(0, \tau)$ для слоев из ФГМ ($q = 1$) и для упругого однородного слоя

На рис. 3 представлены аналогичные кривые 1, 2 при квадратичном изменении свойств ФГМ при $q = 2$, на рис. 4 – при $q = 4$. Графики 2 на рис. 2–4 имеют схожий характер (как и графики 1), но сильно отличаются от графика для однородного упругого слоя. Отметим появление в упругих ФГМ ощутимых растягивающих напряжений. По поводу не представленных здесь перемещений заметим, что для $q = 1, 2, 4$ их возмущения во внутренних точках слоя (не вблизи заделки) как в отсутствие вязкости, так и при ее наличии в целом существенно различаются между собой, причем наибольшие возмущения наблюдаются при $q = 4$, наименьшие – при $q = 1$, что вполне естественно.

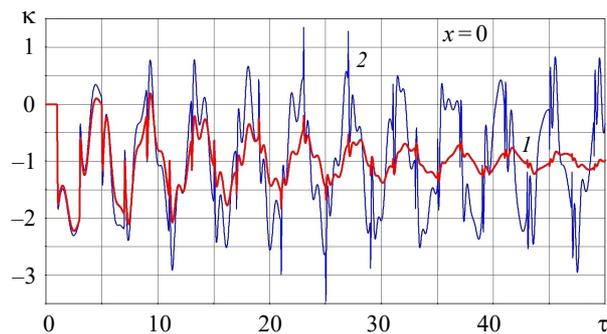


Рис. 3. Графики $\kappa(0, \tau)$ с учетом и без учета вязкости ФГМ, $q = 2$

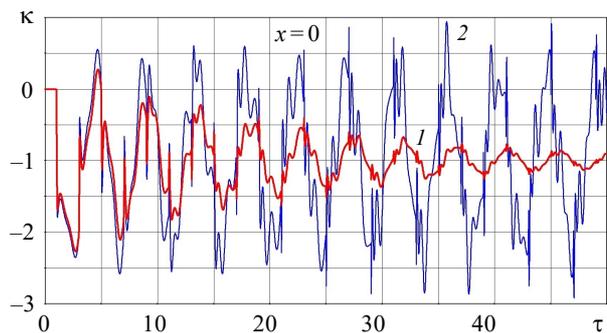


Рис. 4. Графики $\kappa(0, \tau)$ с учетом и без учета вязкости ФГМ, $q = 4$

Результаты расчетов демонстрируют влияние вязкоупругих свойств ФГМ на переходный процесс. При небольших временах вязкость практически не успевает проявиться, но затем в вязкоупругих ФГМ происходит постепенное затухание возмущений. При рассмотренной внешней нагрузке решение с течением времени стремится к решению статической задачи теории упругости, в которой свойства материала определяются длительными модулями, что соответствует теории [20].

Достоверность результатов подтверждается выполнением с высокой точностью начальных условий при численной реализации формулы (8). Так, на рис. 2–4 отражено состояние покоя до прихода первого фронта возмущения в рассматриваемую точку.

Заключение

Решение нестационарной динамической задачи для пакета плоских однородных вязкоупругих слоев при равномерно распределенном нормальном нагружении его поверхности представлено в специальной форме, существенно упрощающей его

численную реализацию при большом количестве слоев. Вместе с аппроксимацией свойств ФГМ слоисто-однородной структурой это позволило впервые исследовать переходные волновые процессы в слое из ФГМ, наследственные свойства которого, наряду с прочими, непрерывно изменяются в поперечном направлении. Подтверждена сходимость результатов вычислений с ростом числа аппроксимирующих однородных слоев при непрерывной по времени нагрузке. Исследовано влияние на нестационарные волновые процессы неоднородности и вязкости ФГМ. Фактически на рассмотренном примере продемонстрирован модифицированный вариант метода спектрального разложения, нацеленный на эффективное применение в задачах нестационарной динамики неоднородных вязкоупругих тел.

Список литературы

1. Senitskii Yu.É. Inhomogeneous anisotropic cylinder and sphere under an arbitrary radially symmetric dynamic load. *Soviet Applied Mechanics*. 1978. Vol. 14. No 5. P. 451–456.
2. Саакян С.Г. О волнах в неоднородных упругих средах. *Доклады АН СССР*. 1986. Т. 290. №6. С. 1324–1327.
3. Булычев Г.Г., Пшеничнов С.Г. Осесимметричная задача динамики длинного упругого неоднородного цилиндра. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1989. №4. С. 35–37.
4. Ohyoshi T. New stacking layer elements for analyses of reflection for transmission of elastic waves to inhomogeneous layers. *Mechanics Research Communication*. 1993. Vol. 20. Iss. 4. P. 353–359. DOI: 10.1016/0093-6413(93)90050-X.
5. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 1. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2021. Т. 27. №2. С. 227–260. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2021.27.02.227_260.06.
6. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: Методы решения (обзор). Часть 2. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2022. Т. 28. №1. С. 36–86. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2022.28.01.036_086.03.
7. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya Sk., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D. State of the art in functionally graded materials. *Composite Structures*. 2021. Vol. 262. Article No 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>.
8. Kuznetsov S.V. Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution. *Journal of Mechanics*. 2020. Vol. 36. Iss.1. P. 1–6. DOI: 10.1017/jmech.2019.12.
9. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. Sound scattering by a thermoelastic ball with a continuously inhomogeneous coating in a heat-conducting fluid. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2019. Vol. 11. No 6. P. 1007–1018. DOI: 10.1134/s2070048219060139.
10. Kielczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials. *Ultrasonics*. 2016. Vol. 65. P. 220–227. DOI: 10.1016/j.ultras.2015.10.001.
11. Ezzin H., Wang B., Qian Z. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation. *Mechanics of Materials*. 2020. Vol. 148. Article No 103492. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103492>.
12. Медведский А.Л. Задача о дифракции нестационарных упругих волн на неоднородной трансверсально изотропной сфере. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2008. Т. 14. №3. С. 473–489.
13. Yu J.G. Viscoelastic shear horizontal wave in graded and layered plates. *International Journal of Solids and Structures*. 2011. Vol. 48. Iss. 16-17. P. 2361–2372. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.04.011.
14. Cao X., Jiang H., Ru Y., Shi J. Asymptotic solution and numerical simulation of Lamb waves in functionally graded viscoelastic film. *Materials*. 2019. Vol. 12. No 2. P. 268–284. <https://doi.org/10.3390/ma12020268>.
15. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. The fractional Kelvin–Voigt model for circumferential

guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 89. Part 1. P. 299–313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>.

16. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo – Fabrizio fractional derivative model. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 2019. Vol. 16. Iss. 2. P. 137–146.

17. Ватульян А.О., Юров В.О. Волны в вязкоупругом цилиндрическом волноводе с дефектом. *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2021. Т. 21. Вып. 3. С. 352–367. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-3-352-367.

18. Pshenichnov S., Ivanov R., Datcheva M. Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures. *Mathematics*. 2022. Vol. 10. Iss. 23. P. 4505-1 – 4505-18. DOI: 10.3390/math10234505.

19. Пшеничников С.Г. Нестационарные волновые процессы в цилиндре из функционально-градиентного вязкоупругого материала. *Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика*. 2024. №2. С. 37–44. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-65-2-5.

20. Пшеничников С.Г. Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел. *Известия РАН. МТТ*. 2016. №1. С. 79–89.

References

1. Senitskii Yu.É. Inhomogeneous anisotropic cylinder and sphere under an arbitrary radially symmetric dynamic load. *Soviet Applied Mechanics*. 1978. Vol. 14. No 5. P. 451–456.

2. Saakyan S.G. O volnakh v neodnorodnykh uprugikh sredakh [Waves in inhomogeneous elastic media]. *Doklady AN SSSR [Proceedings of the USSR Academy of Sciences]*. 1986. Vol. 290. No 6. P. 1324–1327 (In Russian).

3. Bulychov G.G., Pshenichnov S.G. Osesimmetrichnaya zadacha dinamiki dlinnogo uprugogo neodnorodnogo tsilindra [Axisymmetric problem of the long elastic inhomogeneous cylinder dynamics]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy [Structural Mechanics and Analysis of Constructions]*. 1989. No 4. P. 35–37 (In Russian).

4. Ohyoshi T. New stacking layer elements for analyses of reflection for transmission of elastic waves to inhomogeneous layers. *Mech. Res. Commun*. 1993. Vol. 20. Iss. 4. P. 353–359. DOI: 10.1016/0093-6413(93)90050-X.

5. Zhavoronok S.I. Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: Metody resheniya (obzor). Chast 1 [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: Methods of solution (a review). Part I]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy [Mechanics of Composite Materials and Structures]*. 2021. Vol. 27. No 2. P. 227–260 (In Russian).

6. Zhavoronok S.I. Zadachi o dispersii voln v neodnorodnykh volnovodakh: Metody resheniya (obzor). Chast 2 [Wave dispersion in heterogeneous waveguides: methods of solution (a review). Part II]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy [Mechanics of Composite Materials and Structures]*. 2022. Vol. 28. No 1. P. 36–86 (In Russian).

7. Boggarapu V., Gujjala R., Ojha S., Acharya Sk., Venkateswara babu P., Chowdary S., Gara D. State of the art in functionally graded materials. *Compos. Struct*. 2021. Vol. 262. Article No 113596. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113596>.

8. Kuznetsov S.V. Lamb waves in anisotropic functionally graded plates: a closed form dispersion solution. *J. Mech*. 2020. Vol. 36. Iss.1. P. 1–6. DOI: 10.1017/jmech.2019.12.

9. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. Sound scattering by a thermoelastic ball with a continuously inhomogeneous coating in a heat-conducting fluid. *Math. Models Comput. Simul*. 2019. Vol. 11. No 6. P. 1007–1018. DOI: 10.1134/s2070048219060139.

10. Kielczynski P., Szalewski M., Balcerzak A., Wieja K. Propagation of ultrasonic Love waves in nonhomogeneous elastic functionally graded materials. *Ultrasonics*. 2016. Vol. 65. P. 220–227. DOI: 10.1016/j.ultras.2015.10.001.

11. Ezzin H., Wang B., Qian Z. Propagation behavior of ultrasonic Love waves in functionally graded piezoelectric-piezomagnetic materials with exponential variation. *Mech. Mater*. 2020. Vol. 148. Article No 103492. <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2020.103492>.

12. Medvedskiy A.L. Zadacha o difraktsii nestatsionarnykh uprugikh voln na neodnorod-

noy transversalno izotropnoy sfere [The diffraction problem of unsteady elastic waves on an inhomogeneous transversely isotropic sphere]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsey* [Mechanics of Composite Materials and Structures]. 2008. Vol. 14. No 3. P. 473–489 (In Russian).

13. Yu J.G. Viscoelastic shear horizontal wave in graded and layered plates. *Int. J. Solids Struct.* 2011. Vol. 48. Iss. 16-17. P. 2361–2372. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2011.04.011.

14. Cao X., Jiang H., Ru Y., Shi J. Asymptotic solution and numerical simulation of Lamb waves in functionally graded viscoelastic film. *Materials*. 2019. Vol. 12. No 2. P. 268–284. <https://doi.org/10.3390/ma12020268>.

15. Zhang X., Li Z., Wang X., Yu J.G. The fractional Kelvin–Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder. *Appl. Math. Model.* 2021. Vol. 89. Part 1. P. 299–313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>

16. Almbaidin A., Abu-Alshaikh I. Vibration of functionally graded beam subjected to moving oscillator using Caputo – Fabrizio fractional derivative model. *Romanian Journal of Acoustics and Vibration*. 2019. Vol. 16. Iss. 2. P. 137–146.

17. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Volny v vyazkouprugom tsilindricheskom volnovode s defektom [Waves in a viscoelastic cylindrical waveguide with a defect]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2021. Vol. 21. Iss. 3. P. 352–367 (In Russian).

18. Pshenichnov S., Ivanov R., Datcheva M. Transient wave propagation in functionally graded viscoelastic structures. *Mathematics*. 2022. Vol. 10. Iss. 23. P. 4505-1–4505-18. DOI: 10.3390/math10234505.

19. Pshenichnov S.G. Nestatsionarnye volnovye protsessy v tsilindre iz funktsionalno-gradientnogo vyazkouprugogo materiala [Unsteady wave processes in a cylinder made of a functionally graded viscoelastic material]. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Mekhanika*. 2024. No 2. P. 37–44 (In Russian).

20. Pshenichnov S.G. Dinamicheskie zadachi lineynoy vyazkouprugosti dlya kusochno-odnorodnykh tel [Dynamic linear viscoelasticity problems for piecewise homogeneous bodies]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2016. No 1. P. 79–89 (In Russian).

NON-STATIONARY WAVES IN A FUNCTIONALLY GRADED VISCOELASTIC PLANE-PARALLEL LAYER²

Pshenichnov S.G.

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

serp56@yandex.ru

Received by the Editor 2024/04/27

The propagation of nonstationary disturbances in a plane-parallel layer of infinite extent, which arise as a result of normal dynamic loading of one of its surfaces when the other surface is stationary, is investigated. The material of the layer is assumed to be functionally graded and, at the same time, viscoelastic. The hereditary properties of such a material are taken into account using linear integral Boltzmann–Volterra relations with regular kernels in the form of partial sums of the Prony's series. The peculiarity of this work is that here the parameters of the relaxation kernels are considered continuous functions of the transverse coordinate in the same way as other physical and mechanical characteristics. A method was used for the study,

²The research was supported by the Russian Science Foundation, grant No 24-29-00164, <https://rscf.ru/en/project/24-29-00164/>.

which consists in replacing a functionally graded material with an approximating layered homogeneous structure with continuity conditions at the contact of homogeneous layers. The solution of the nonstationary dynamic linear viscoelasticity problem for a package of plane homogeneous viscoelastic layers is presented in a special form, which greatly simplifies its numerical implementation, especially with a large number of layers with different hereditary properties. This made it possible to successfully apply this method and carry out a series of calculations using an efficient algorithm.

Transient wave processes are investigated in the case when the parameters of a functionally graded material are non-monotonic functions of the transverse coordinate, symmetrical with respect to the middle surface of the layer. A comparison of transient wave processes for different types of these functions is carried out. The convergence of the calculation results with an increase in the number of approximating homogeneous layers with a continuous dependence of the external load on time is confirmed. The significant influence of both heterogeneity and viscosity of the material on nonstationary wave processes has been established.

Keywords: functionally graded materials, wave processes, viscoelasticity, dynamics of layered bodies, inhomogeneous layer.