УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-182-191

ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОМПОЗИТНЫХ СРЕД С АНИЗОТРОПНОЙ СТРУКТУРОЙ*

Бабешко В.А.[1,2], **Евдокимова О.В.**[2], **Бабешко О.М.**[1], **Евдокимов В.С.**[1], **Уафа С.Б.**[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 15.04.2024

Впервые развивается метод решения динамических контактных задач о действии жесткого штампа в форме полосы конечной ширины на слоистый анизотропный композит. Применением принципа предельного поглощения Мандельштама исходная граничная задача приводится к граничной задаче с поглощением, имеющей единственное решение. Символ интегрального уравнения не имеет особенностей на вещественной оси. Контактная задача сводится к решению двумерного интегрального уравнения с разностным ядром. Применение преобразования Фурье по координате вдоль полосы сводит интегральное уравнение к одномерному, содержащему свободный вещественный параметр преобразования Фурье. Вводятся интегральные уравнения, имеющие точное решение, с символами, мажорирующими сверху и снизу символ интегрального уравнения. Используется метод факторизации для исходного интегрального уравнения, которое сводится к двум интегральным уравнениям второго рода. Оператор интегрального уравнения оказывается сжимающим при достаточно большой ширине полосы. Применением метода Ньютона – Канторовича к этому интегральному уравнению строится точное решение интегрального уравнения в операторном виде. Наличие мажорант символа интегрального уравнения позволяет получить верхнюю и нижнюю оценку построенного точного решения интегрального уравнения, содержащего параметр принципа предельного поглощения Мандельштама. После этого в построенном решении параметр сверху устремляется к нулю. Решение интегрального уравнения получается в аналитическом виде и позволяет выделить все его сингулярные особенности. Результат важен при поиске предвестников нарастания сейсмичности в горных территориях. Метод применим во всех случаях, когда для поставленной несмешанной задачи удается построить функцию Грина для граничной задачи в слоистом анизотропном композите.

Ключевые слова: динамическая контактная задача, композитный материал, анизотропная среда, интегральное уравнение, метод блочного элемента.

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ и Кубанского научного фонда, региональный проект Краснодарского края 24-11-20006.

Введение

Предложенный метод решения контактных задач для полосового штампа конечной ширины позволяет применять его к случаям композитных слоистых материалов, имеющих анизотропную структуру. Ранее выполненное исследование контактной задачи для случая изотропного материала позволило развить метод применительно к композитам с анизотропной структурой. Задачи такого рода изучены достаточно глубоко для изотропных материалов. Контактные задачи для штампов неклассической формы, действующие на композитные материалы, изучены слабо. Применяемые численные методы для композитных материалов дают возможность строить приближенные решения граничных задач в ограниченных областях. В тех случаях, когда рассматриваются области с границами, уходящими на бесконечность, численные методы менее эффективны. В отличие от изотропного случая, когда символ ядра интегрального уравнения описывается мероморфной функцией, в анизотропном случае приходится встречаться с аналитической функцией двух комплексных переменных сложного строения. Это отражается на поведении особенностей, возникающих на краях штампов, и на возбуждаемых волновых процессах как под штампом, так и на свободной поверхности. Контактные задачи для анизотропных материалов возникают во многих областях при создании различных инженерных технических средств и изделий, в строительстве, при создании элементной базы электроники. Имеется большое количество публикаций в связи с важностью таких задач в различных областях инженерной практики [1–15]. Результат настоящей статьи может быть полезен при исследовании в геофизике при описании поведения горной гряды на анизотропной коренной породе. Примером исследований задач для анизотропных материалов при создании сооружений ответственного назначения может служить книга [2]. В ней развиты и успешно применены численные методы конечного и граничного элементов в сочетании с глубокими фундаментальными исследованиями. Другие успешные исследования выполнены в [11–13]. В настоящей статье развитый в [16] метод обобщается на случай динамических контактных задач для анизотропных структур, он позволяет получить точное решение контактной задачи для полосового штампа для всего диапазона входных параметров.

Интегральное уравнение контактной задачи

Методом, описанным в [17–19], динамическая контактная задача о действии полосового жесткого штампа конечной ширины на анизотропную слоистую среду сводится к решению интегрального уравнения вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\, q(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1,x_2), \quad -a \le x_1 \le a, \quad |x_2| < \infty,$$

$$k(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\sigma_1}\int_{\sigma_2} K(u_1,u_2)\exp(-i(u_1x_1+u_2x_2))\,du_1du_2, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re} K(u_1,u_2) > 0, \quad -\infty < u_1, u_2 < \infty.$$

Здесь $q(x_1, x_2)$ – контактные напряжения под штампом, $f(x_1, x_2)$ – перемещения в зоне контакта, $k(x_1, x_2)$ – ядро интегрального уравнения, функция $K(u_1, u_2)$ – преобразование Фурье ядра интегрального уравнения, называемая его символом.

Считаем, что функция $K(u_1, u_2)$ интегрального уравнения является аналитической, зависящей от двух комплексных переменных, она может иметь на вещественной оси конечное число нулей и полюсов по обоим параметрам. Кроме этого, она имеет счетное число комплексных нулей и полюсов параметров u_1, u_2, расположенных в относительной близости к мнимым осям верхней и нижней комплексных плоскостей. Контуры σ_1, σ_2 обходят вещественные полюсы сверху или снизу в зависимости от свойств фазовых скоростей волн, которые они описывают [19]. Особо отметим свойство вещественных нулей и полюсов покидать вещественную ось в случаях, когда рассматривается поглощающий энергию материал либо когда поглощение вводится искусственно с малым коэффициентом $\varepsilon \to 0$ (принцип предельного поглощения Мандельштама [19]).

Принцип предельного поглощения Мандельштама состоит в следующем [19].

В граничных задачах колебания сплошных сред в неограниченных областях (для правильного излучения волн на бесконечность) справа уравнение дополняется членом с малым параметром ε, вносящим поглощение энергии колебания, то есть

$$D\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

После решения задачи принимается $\varepsilon = 0$.

Считаем, что в этом случае функция $K(u_1, u_2)$ принимает вид $K(u_1, u_2, \varepsilon)$, который при $\varepsilon = 0$ совпадает с исходным символом. Двумерное интегральное уравнение (1) сводится к одномерному уравнению с вещественным параметром u_2 в результате применения преобразования Фурье по координате x_2. Тогда интегральное уравнение (1) принимает вид:

$$\int_{-a}^{a} k(x_1-\xi_1,u_2)q(\xi_1,u_2)d\xi_1 = f(x_1,u_2), \quad q(\xi_1)=q(\xi_1,u_2), \quad k(x_1)=k(x_1,u_2),$$
$$k(x_1,u_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} K(u_1,u_2,\varepsilon)\exp(-iu_1x_1)du_1, \;\; K(u_1,\varepsilon)=K(u_1,u_2,\varepsilon), \;\; f(x_1)=f(x_1,u_2). \tag{2}$$

Здесь u_2 – свободный вещественный параметр.

Ради краткости вещественный параметр u_2 временно опускаем, и возврат к нему будет осуществлен в конце статьи. Считаем, что непрерывная аналитическая функция $K(u_1, u_2, \varepsilon)$ на бесконечности обладает асимптотическим поведением $K(u_1, u_2, \varepsilon) = O(u_1^{-1})$, $\operatorname{Im} u_1 = 0$.

В [17–19] для интегрального уравнения (2) установлены теоремы единственности и разрешимости интегральных уравнений в анизотропном случае, которые предполагаются выполненными для функции $K(u_1, u_2, \varepsilon)$.

Построение классического решения интегрального уравнения

Выберем положительные числа γ_1, γ_3 таким образом, чтобы имело место неравенство

$$0 < K_1(u_1) < \left|K_2(u_1,u_2,\varepsilon)\right| < K_3(u_1). \tag{3}$$

Здесь приняты обозначения

$$K_1(u_1) = \gamma_1(u_1)^{-1}\,\mathrm{th}\,u_1, \quad K_2(u_1) = K_2(u_1,\varepsilon) = K(u_1,u_2,\varepsilon),$$
$$K_3(u_1) = \gamma_3(u_1)^{-1}\,\mathrm{th}\,u_1, \quad 0<\gamma_1<\gamma_3, \quad \operatorname{Im} u_2 = 0, \quad |u_2| < \infty. \tag{4}$$

Будем рассматривать интегральные уравнения с ядрами $K_m(u_1)$, $m = 1, 2, 3$, вида

$$\int_{-a}^{a} k_m(x_1-\xi_1)\, q(\xi_1)\, d\xi_1 = f_m(x_1), \quad k_m(x_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} K_m(u_1)\exp(-iu_1x_1)\, du_1, \quad m = 1, 3,$$

$$\int_{-a}^{a} k_2(x_1-\xi_1, u_2, \varepsilon)\, q(\xi_1)\, d\xi_1 = f_m(x_1), \quad k_2(x_1, u_2, \varepsilon) = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1} K_m(u_1, u_2, \varepsilon)\exp(-iu_1x_1)\, du_1, \quad m = 2.$$

Методом блочного элемента, опирающегося на факторизационный подход [19], они приводятся к системе двух интегральных уравнений, детально описанных в [19]:

$$X_m(\zeta, \pm) = \mp M_m(\zeta, a)\, X_m(u_1, \pm) + \alpha_m(\xi, \pm), \quad m = 1, 3,$$

$$M_m(\zeta, a)\, X(u_1, \pm) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} \frac{K_{m-}(u_1)\exp(-2aiu_1)}{K_{m+}(u_1)(u_1+\zeta)} X_m(u_1, \pm) du_1,$$

$$\alpha_m(\zeta, \pm) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\left[\frac{F_+(u_1)}{K_{m-}(u_1)(u_1-\zeta)} \mp \frac{F_-(u_1)}{K_{m+}(u_1)(u_1+\zeta)}\right] du_1,$$

$$F_+(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x)\exp(iu_1(x+a))dx, \quad F_-(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x)\exp(iu_1(x-a))dx, \tag{6}$$

$$\Phi_{m-}(u_1) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi_{m-}(x)\exp(iu_1(x+a))dx, \quad \Phi_{m+}(u_1) = \int_{a}^{\infty} \varphi_{m+}(x)\exp(iu_1(x-a))dx,$$

$$X_m(\zeta, \pm) = [\Phi_{m+}(-\zeta) \pm \Phi_{m-}(\zeta)]K_{m-}^{-1}(\zeta), \quad \zeta \in \sigma.$$

Аналогично для $m = 2$

$$X_2(\zeta, \pm, u_2, \varepsilon) = \mp M_2(\zeta, a, u_2, \varepsilon)\, X_2(u_1, \pm, u_2, \varepsilon) + \alpha_2(\zeta, \pm, u_2, \varepsilon),$$

$$M_2(\zeta, a, u_2, \varepsilon)\, X(u_1, \pm) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} \frac{K_{2-}(u_1, u_2, \varepsilon)\exp(-2aiu_1)}{K_{2+}(u_1, u_2, \varepsilon)(u_1+\zeta)} X_2(u_1, \pm, u_2, \varepsilon) du_1,$$

$$\alpha_2(\zeta, \pm, u_2, \varepsilon) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\left[\frac{F_+(u_1)}{K_{2-}(u_1, u_2, \varepsilon)(u_1-\zeta)} \mp \frac{F_-(u_1)}{K_{2+}(u_1, u_2, \varepsilon)(u_1+\zeta)}\right] du_1,$$

$$F_+(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x)\exp(iu_1(x+a))dx, \quad F_-(u_1) = \int_{-a}^{a} f(x)\exp(iu_1(x-a))dx,$$

$$\Phi_{2-}(u_1, u_2, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{-a} \varphi_{2-}(x, u_2, \varepsilon)\exp(iu_1(x+a))dx,$$

$$\Phi_{2+}(u_1, u_2, \varepsilon) = \int_{a}^{\infty} \varphi_{2+}(x, u_2, \varepsilon)\exp(iu_1(x-a))dx,$$

$$X_2(\zeta, \pm, u_2, \varepsilon) = [\Phi_{2+}(-\zeta, u_2, \varepsilon) \pm \Phi_{2-}(\zeta, u_2, \varepsilon)]K_{2-}^{-1}(\zeta, u_2, \varepsilon),$$

где $K_{m\pm}(u_1)$, $K_{2\pm}(u_1, u_2, \varepsilon)$ – результат факторизации по параметру u_1 функций $K_m(u_1)$, $m = 1, 3$, и $K_2(u_1, u_2, \varepsilon)$ относительно вещественной оси [19]. Здесь непрерывный контур σ расположен в нижней комплексной полуплоскости, асимптотически уходит на бесконечность так, что содержит часть отрицательной мнимой полуоси, пересекая ее в одной точке. Главным его свойством является огибание сверху находящихся в нижней комплексной полуплоскости комплексных особенностей всех аналитических функций $K_m(u_1)$. Считаем, что контур расположен строго ниже вещественной оси, то есть $0 > -c > \max \operatorname{Im} u_1,\ u_1 \in \sigma,\ c > 0$.

После обращения уравнений (6) представления решений интегральных уравнений (5) даются формулами [19]:

$$q_m(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\left\{\frac{F(u_1)}{K_m(u_1)} - \frac{X_{0m}^-(u_1)\exp(-iau_1)}{K_{m+}(u_1)} -\right.$$

$$\left. - \frac{X_{2m}^+(u_1)\exp(-iau_1)}{K_{m-}(u_1)}\right\}\exp(-ixu_1)\,du_1, \quad m = 1, 3, \tag{7}$$

$$2X_{2m}^+(-u_1) = X_m(u_1,-) + X_m(u_1,+), \quad 2X_{0m}^-(u_1) = X_m(u_1,-) - X_m(u_1,+),$$

для $m = 2$

$$q_2(x,u_2,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_1}\left\{\frac{F(u_1)}{K_2(u_1,u_2,\varepsilon)} - \frac{X_{02}^-(u_1,u_2,\varepsilon)\exp(-iau_1)}{K_{2+}(u_1,u_2,\varepsilon)} -\right.$$

$$\left. - \frac{X_{22}^+(u_1,u_2,\varepsilon)\exp(-iau_1)}{K_{2-}(u_1,u_2,\varepsilon)}\right\}\exp(-ix_1u_1)\,du_1,$$

$$X_{22}^+(-u_1,u_2,\varepsilon) = X_2(u_1,-,u_2,\varepsilon) + X_2(u_1,+,u_2,\varepsilon),$$

$$2X_{02}^-(u_1) = X_2(u_1,-,u_2,\varepsilon) - X_2(u_1,+,u_2,\varepsilon).$$

В [19] доказано, что операторы $M_m(\zeta, a)$ в правой части (6) являются вполне непрерывными на контуре σ в пространстве $C(\lambda)$, $0 \le \lambda < 1$, вводимом нормой $\|f\| = \max\left|u_1^\lambda f(u_1)\right|,\ u_1 \in \sigma$.

Методами, детально описанными в [19], осуществим факторизацию в виде произведения каждой функции $K_m(u)$. Примем во внимание представление функций $K_m(u)$, $m = 1, 3$, в виде

$$K_m(u) = \gamma_m \frac{\pi\,\Gamma\left(1/2 + iu\pi^{-1}\right)\Gamma\left(1/2 - iu\pi^{-1}\right)}{\Gamma\left(1 + iu\pi^{-1}\right)\Gamma\left(1 - iu\pi^{-1}\right)}, \quad m = 1, 3,$$

где $\Gamma(u)$ – гамма-функция. В результате будем иметь

$$K_m(u_1) = K_{m+}(u_1)K_{m-}(u_1), \quad K_{m\pm}(u_1) = \sqrt{\gamma_m}\,\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1/2 \mp iu_1\pi^{-1}\right)}{\Gamma\left(1 \mp iu_1\pi^{-1}\right)}, \quad m = 1, 3,$$

$$K_{2\pm}(u_1) = \exp\left(\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln K_2(\xi)}{\xi - u_1}d\xi\right), \quad u_1 \in \Pi_\pm. \tag{8}$$

Здесь Π_+, Π_- – верхняя и нижняя комплексные полуплоскости. Из (8) для факторизованных функций следует свойство

$$K_{m-}(u_1)K_{m+}^{-1}(u_1) \to O(1), \quad |u_1| \to \infty,\ u_1 \in \sigma.$$

Будем считать, что в анизотропном случае левая и правая ветви контура σ при $\tau_2 \to \infty$ асимптотически сближаются с границами клина, описываемого прямыми

$$u_1 = (\pm\delta - i)\tau_2, \quad 0 < \delta < 1, \quad 0 < \tau_2 \le \infty, \quad u_1 = \tau_1 + i\tau_2.$$

Контур охватывает все особенности нижней полуплоскости функций $K_m^{\pm 1}(u_1)$.

Из оценки нормы оператора $M_m(\zeta, a)$, приведенной в [19], на основании поведения подынтегральной функции на всем контуре σ устанавливается, что существует такое a_0, при котором имеет место оценка $\|M_m(\zeta, a)\|_{C(\lambda)} < 1$, $\mathrm{Re}\, a > a_0$. В результате к уравнениям (6) применим метод последовательных приближений для определения X_m:

$$X_m = \sum_{n=0}^{\infty} M_m(\zeta, a)^n A_m. \tag{9}$$

Однако справедлив более сильный результат.

Теорема. Решение (7), (9), основанное на использовании уравнений (6), справедливо для всех значений параметра $0 < a < \infty$.

Для доказательства рассмотрим интегральные уравнения (5) для случая $f(x) = 1$ и построим решения $q_{m0}(x_1)$ [20]. Вычислив правые части в уравнениях (6), рассмотрим область значений параметра $a > a_0$. В этом случае, используя метод Ньютона – Канторовича [21], решение (9) можно представить в виде

$$X_m = [1 - M_m(\zeta, a, \varepsilon)]^{-1} A_m. \tag{10}$$

В [16] показано, что в изотропном случае слоистой среды, то есть для $m = 1, 3$, соотношение (10) справедливо во всем диапазоне $0 < a < \infty$. Покажем, что это свойство имеет место также и в анизотропном случае.

Рассмотрим интегральные уравнения (5) при $m = 1, 3$. В этих случаях для указанных интегральных уравнений ряд (9) сходится в интервале $0 < a < \infty$ и дает точное решение уравнения в форме (7), которое после преобразований имеет вид [20]

$$q_{m0}(x_1) = \frac{1}{\gamma_m \pi Q_{-1/2}(\mathrm{ch}\, a)\sqrt{2\,\mathrm{ch}\, a - 2\,\mathrm{ch}\, x_1}}, \quad m = 1, 3.$$

Здесь $Q_{-1/2}(\mathrm{ch}\, a)$ – функция Лежандра. При $a \to 0$ она имеет поведение

$$Q_{-1/2}(\mathrm{ch}\, a) \sim \ln a + r, \quad r = \mathrm{const}. \tag{11}$$

Покажем, что подобным свойством (11) обладает и решение интегрального уравнения при $m = 2$. Действительно, исследуя оператор $M_m(\zeta, a)$ при $a \to 0$ в формуле (6), используя асимптотические разложения входящего в него интеграла на контуре σ, получаем соотношение

$$\|M(\zeta, a)\| = \max \left| \exp(-2ai\tau_1) \int\limits_{\sigma} \frac{K_-(\tau_1 - i\tau_2)\exp(-2a\tau_2)d\tau_2}{K_+(\tau_1 - i\tau_2)(\tau_1 - i\tau_2 + \zeta)} \right| \approx \delta Ei(-2a\tau_{20}) \sim$$

$$\sim \delta(\ln a + c_0), \quad a \to 0, \quad \delta, c_0 = \mathrm{const},$$

где $Ei(-2a\tau_{20})$ – интегральная экспонента.

Построенные решения интегральных уравнений для единичной правой части $f(x_1) = 1$ позволяют по формулам [20]

$$q_m(x_1) = \frac{1}{2M'(a)}\left[\frac{d}{da}\int\limits_{-a}^{a} q_{m0}(s, a) f(s) ds\right] q_{m0}(x_1, a) - \frac{1}{2}\int\limits_{|x_1|}^{a} q_{m0}(x_1, \xi)\frac{d}{d\xi}\left[\frac{1}{M'(\xi)}\right] \times$$

$$\times \frac{d}{d\xi}\int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s,\xi) f(s) ds \Bigg] d\xi - \frac{1}{2}\frac{d}{dx_1}\int_{|x_1|}^{a} \frac{q_{m0}(x_1,\xi)}{M'(\xi)}\left[\int_{-\xi}^{\xi} q_{m0}(s,\xi) df(s)\right] d\xi, \quad |x_1| < a,$$

построить решения $q_m(x_1)$ интегрального уравнения для произвольной правой части $f(x_1)$. В силу свойств интегрального уравнения (1) [18] для построенных решений остаются справедливыми неравенства, следующие из (3), (4):

$$P_1(u_2)\frac{1}{\gamma_2 \pi Q_{-1/2}(\operatorname{ch} a)\sqrt{2\operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} x_1}} < |q_2(x_1,u_2,\varepsilon)| <$$

$$< P_2(u_2)\frac{1}{\gamma_1 \pi Q_{-1/2}(\operatorname{ch} a)\sqrt{2\operatorname{ch} a - 2\operatorname{ch} x_1}}, \quad 0 < P_1(u_2) < P_2(u_2).$$

Решение $q_2(x_1)$ интегральных уравнений (7) содержит скрытый вещественный параметр u_2 (см. (4)). Тогда в соответствии с соотношением $q_2(x_1) = q_2(x_1, u_1, \varepsilon)$ из (2)–(4) следует, что имеет место представление решения интегрального уравнения (1) в полосе в виде

$$q_2(x_1, x_2, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_2} q_2(x_1, u_2, \varepsilon)\exp(-u_2 x_2) du_2.$$

Оно является точным решением интегрального уравнения (1) во всем диапазоне $0 < a < \infty$ изменения параметра a. Для получения точного решения исходного интегрального уравнения и поставленной задачи в найденном решении, согласно принципу предельного поглощения Мандельштама, необходимо положить $\varepsilon = 0$. Таким образом, получено точное решение контактной задачи для композитного материала анизотропной среды в динамическом режиме. Вычисление контурных интегралов позволит исследовать возникающие волновые поля.

Заключение

Впервые построено точное решение для полосового штампа во всем диапазоне изменения ширины полосы. Такого рода задачи возникают при исследовании состояния сейсмичности территории, имеющей протяженную горную гряду. В инженерной практике подобные задачи появляются при конструировании изделий с применением композитных материалов анизотропной структуры.

Список литературы

1. Sundar U., Lao Z., Cook-Chennault K. Investigation of piezoelectricity and resistivity of surface modified barium titanate nanocompositesm. *Polymers*. 2019. Vol. 11. Iss. 12. P. 1–25. https://doi.org/10.3390/polym11122123.

2. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

3. Ehterami A., Kazemi M., Nazari B., Saraeian P., Azami M. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high piezoelectric coefficient for bone tissue engineering applications. *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. 2018. Vol. 79. P. 195–202. https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.12.034.

4. Saheb N., Hayat U., Hassan S.F. Recent advances and future prospects in spark plasma sintered alumina hybrid nanocomposites. *Nanomaterials*. 2019. Vol. 9. Iss. 11. P. 1607-1 – 1607-44. https://doi.org/10.3390/nano9111607.

5. Toozandehjani M., Matori K.A., Ostovan F., Aziz S.A., Mamat S.M. Effect of milling time

on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al_2O_3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy. *Materials.* 2017. Vol.10. Iss.11. P. 1232 -1 – 1232 -17. https://doi.org/10.3390/ma10111232.

6. Mathew J., Mandal A., Deepak Kumar S., Bajpai S., Chakraborty M., West G.D., Srirangam P. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast Al-Cu-TiB_2 composites. *Journal of Alloys and Compounds*. 2017. Vol. 712. P. 460–467. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.04.113.

7. Ghasali E., Fazili A., Alizadeh M., Shirvanimoghaddam K., Ebadzadeh T. Evaluation of microstructure and mechanical properties of Al-TiC metal matrix composite prepared by conventional, microwave and spark plasma sintering methods. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 11. P. 1255-1 – 1255-11. https://doi.org/10.3390/ma10111255.

8. Tian W.S., Zhao Q.L., Zhao C.J., Qiu F., Jiang Q.C. The dry sliding wear properties of nano-sized TiCp / Al-Cu composites at elevated temperatures. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 8. P. 939-1 – 939-13. https://doi.org/10.3390/ma10080939.

9. Hekner B., Myalski J., Pawlik T., Sopicka-Lizer M. Effect of carbon in fabrication Al-SiC nanocomposites for tribological application. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 6. P. 679-1 – 679-15. https://doi.org/10.3390/ma10060679.

10. Mavros H., Karantzalis A.E., Lekatou A. Solidification observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites. *Journal of Composite Materials*. 2012. Vol. 47. Iss. 17. P. 2149–2162. https://doi.org/10.1177/0021998312454901.

11. Mao H.-J., Liu D.-F., Zhang N., Huang T., Kuhnert I., Yang J.-H., Wang Y. Constructing a microcapacitor network of carbon nanotubes in polymer blends via crystallization-induced phase separation toward high dielectric constant and low loss. *ACS Applied Materials & Interfaces*. 2020. Vol. 12. Iss. 23. P. 26444–26454. https://doi.org/10.1021/acsami.0c04575.

12. Evgin T., Turgut A., Hamaoui G., Spitalsky Z., Horny N., Micusik M., Chirtoc M., Sarikanat M., Omastova M. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization. *Beilstein Journal of Nanotechnology*. 2020. Vol. 11. Iss. 1. P. 167–179. https://doi.org/10.3762/bjnano.11.14.

13. Калинчук В.В., Белянкова Т.И. *Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел*. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

14. Горячева И.Г. *Механика фрикционного взаимодействия*. М.: Наука, 2001. 478 с.

15. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Materials Physics and Mechanics*. 2020. Vol. 46. Iss. 1. P. 139–148. DOI: 10.18149/mpm.4612020_14.

16. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Зарецкая М.В. Точное решение контактных задач в полосе конечной ширины на многослойной среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №1. С. 36–44. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-1-36-44.

17. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. М.: Наука, 1974. 456 с.

18. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. *Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах*. М.: Наука, 1999. 246 с.

19. Ворович И.И., Бабешко В.А. *Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей*. М.: Наука, 1979. 320 с.

20. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения*. М.: Наука, 1967. 508 с.

21. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ*. М.: Наука, 1977. 742 с.

References

1. Sundar U., Lao Z., Cook-Chennault K. Investigation of piezoelectricity and resistivity of surface modified barium titanate nanocompositesm. *Polymers*. 2019. Vol. 11. Iss. 12. P. 1–25. https://doi.org/10.3390/polym11122123.

2. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granich-*

nykh elementov [*Methods of Boundary Integral Equations and Boundary Elements*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).

3. Ehterami A., Kazemi M., Nazari B., Saraeian P., Azami M. Fabrication and characterization of highly porous barium titanate based scaffold coated by Gel/HA nanocomposite with high coefficient for bone tissue engineering applications. *J. Mech. Behav. Biomed. Mater.* 2018. Vol. 79. P. 195–202. https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2017.12.034.

4. Saheb N., Hayat U., Hassan S.F. Recent advances and future prospects in spark plasma sintered alumina hybrid nanocomposites. *Nanomaterials*. 2019. Vol. 9. Iss. 11. P. 1607-1 – 1607-44. https://doi.org/10.3390/nano9111607.

5. Toozandehjani M., Matori K.A., Ostovan F., Aziz S.A., Mamat S.M. Effect of milling time on the microstructure, physical and mechanical properties of Al-Al2O3 nanocomposite synthesized by ball milling and powder metallurgy. *Materials*. 2017. Vol.10. Iss.11. P. 1232-1 – 1232-17. https://doi.org/10.3390/ma10111232.

6. Mathew J., Mandal A., Deepak Kumar S., Bajpai S., Chakraborty M., West G.D., Srirangam P. Effect of semi-solid forging on microstructure and mechanical properties of in-situ cast AlCu-TiB_2 composites. *J. Alloys Compd*. 2017. Vol. 712. P. 460 – 467. https://doi.org/10.1016/j.jallcom.2017.04.113.

7. Ghasali E., Fazili A., Alizadeh M., Shirvanimoghaddam K., Ebadzadeh T. Evaluation of microstructure and mechanical properties of Al-TiC metal matrix composite prepared by conventional, microwave and spark plasma sintering methods. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 11. P. 1255-1 – 1255-11. https://doi.org/10.3390/ma10111255.

8. Tian W.S., Zhao Q.L., Zhao C.J., Qiu F., Jiang Q.C. The dry sliding wear properties of nano-sized TiCp / Al-Cu composites at elevated temperatures. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 8. P. 939-1 – 939-13. https://doi.org/10.3390/ma10080939.

9. Hekner B., Myalski J., Pawlik T., Sopicka-Lizer M. Effect of carbon in fabrication Al-SiC nanocomposites for tribological application. *Materials*. 2017. Vol. 10. Iss. 6. P. 679-1 – 679-15. https://doi.org/10.3390/ma10060679.

10. Mavros H., Karantzalis A.E., Lekatou A. Solidification observations and sliding wear behavior of cast TiC particulate-reinforced AlMgSi matrix composites. *J. Compos. Mater.* 2012. Vol. 47. Iss. 17. P. 2149–2162.

11. Mao H.-J., Liu D.-F., Zhang N., Huang T., Kuhnert I., Yang J.-H., Wang Y. Constructing a microcapacitor network of carbon nanotubes in polymer blends via crystallization-induced phase separation toward high dielectric constant and low loss. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2020. Vol. 12. Iss. 23. P. 26444–26454. https://doi.org/10.1021/acsami.0c04575.

12. Evgin T., Turgut A., Hamaoui G., Spitalsky Z., Horny N., Micusik M., Chirtoc M., Sarikanat M., Omastova M. Size effects of graphene nanoplatelets on the properties of high-density polyethylene nanocomposites: morphological, thermal, electrical, and mechanical characterization. *Beilstein J. Nanotechnol*. 2020. Vol. 11. Iss. 1. P. 167–179. https://doi.org/10.3762/bjnano.11.14.

13. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritelno napryazhennykh tel* [*Dynamic Contact Problems for Prestressed Bodies*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 240 p. (In Russian).

14. Goryacheva I.G. *Mekhanika friktsionnogo vzaimodeystviya* [*Mechanics of Frictional Interaction*]. Moscow. Nauka Publ. 2001. 478 p. (In Russian).

15. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V., Belyak O.A. Modeling antifriction properties of composite based on dynamic contact problem for a heterogeneous foundation. *Mater. Phys. Mech*. 2020. Vol. 46. Iss. 1. P. 139–148. DOI: 10.18149/mpm.4612020_14.

16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Zaretskaya M.V. Tochnoe reshenie kontaktnykh zadach v polose konechnoy shiriny na mnogosloynoy srede [Exact solution of contact problems in a finite-width band on a multilayer medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2023. Vol. 85. No 1. P. 36–44 (In Russian).

17. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [*Non-classical Mixed Problems of Elasticity Theory*]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 456 p. (In Russian).

18. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh* [*Dynamics of Massive Bodies and Resonant Phenomena in Deformable Media*]. Moscow. Nauka Publ. 1999. 246 p. (In Russian).
19. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [*Dynamic Mixed Problems of Elasticity Theory for Nonclassical Domains*]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 320 p. (In Russian).
20. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Teoriya volterrovykh operatorov v gilbertovom prostranstve i ee prilozheniya* [*Theory of Voltaire Operators in Hilbert Space and its Applications*]. Moscow. Nauka Publ. 1967. 508 p. (In Russian).
21. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz* [*Functional Analysis*]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 742 p. (In Russian).

DYNAMIC CONTACT PROBLEMS FOR COMPOSITE MEDIA WITH ANISOTROPIC STRUCTURE*

Babeshko V.A.[1,2], Evdokimova O.V.[2], Babeshko O.M.[1], Evdokimov V.S.[1], Uafa S.B.[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2024/04/15

The paper for the first time develops a method for solving dynamic contact problems on the effect of a rigid die in the form of a strip of finite width on a layered anisotropic composite. By applying Mandelstam's principle of marginal absorption, the initial boundary value problem is reduced to a boundary value problem with absorption having a single solution. The symbol of the integral equation has no singularities on the real axis. The contact problem is reduced to solving a two-dimensional integral equation with a difference kernel. The application of the Fourier transform along the coordinate along the strip reduces the integral equation to a one-dimensional one containing a free real parameter of the Fourier transform. Integral equations with an exact solution are introduced, with symbols majoring above and below the symbol of the integral equation. Using the factorization method, the initial integral equation is reduced to two integral equations of the second type, the operator of which turns out to be compressive with a sufficiently large bandwidth. By applying the Newton–Kantorovich method to this integral equation, an exact solution of the integral equation is constructed in an operator form. The presence of the majorant symbol of the integral equation allows us to obtain an upper and lower estimate of the constructed exact solution of the integral equation containing the parameter of the Maldenstam limit absorption principle. After that, in the constructed solution, this parameter rushes to zero from above. The solution of the integral equation is obtained in an analytical form and allows us to identify all its singular features. The result is important when searching for harbingers of an increase in seismicity in mountainous areas. The method is applicable in all cases when it is possible to construct a Green function for a non-mixed boundary value problem in a layered anisotropic composite.

Keywords: dynamic contact problem, composite material, anisotropic medium, integral equation, block element method.

* Carried out with the financial support of the Russian Science Foundation and the Kuban Science Foundation, regional project of the Krasnodar Territory 24-11-20006.