УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-168-181

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ МОМЕНТНОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКИ*

Тарлаковский Д.В.[1,2], **Фарманян А.Ж.**[1], **Гафуров У.С.**[1]

[1]*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*
[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

tdvhome@mail.ru

Поступила в редакцию 18.03.2024

С использованием полученных ранее уравнений движения тонких моментных упругих оболочек постоянной толщины с произвольной срединной поверхностью построены уравнения движения изотропной моментной сферической оболочки в усилиях и «перемещениях» (кинематических параметрах). При этом учитывалась метрика срединной сферической поверхности, в качестве криволинейных координат которой используются две угловые координаты стандартной сферической системы координат с началом в центре срединной поверхности.

Сначала записывается замкнутая система, включающая в себя уравнения движения в физических компонентах тензоров внутренних усилий и моментов, а также в дополнительных аналогичных характеристиках, соответствующих моментным свойствам модели, и физические соотношения. Затем исключением физических соотношений система сводится к двенадцати уравнениям движения в кинематических параметрах, записанным в операторном виде. При этом коэффициенты операторов в частных производных упрощаются за счет пренебрежения слагаемыми, имеющими более высокий порядок малости относительно толщины оболочки. Несмотря на громоздкость системы, ее форма получается компактной. Граничные условия не приводятся, поскольку оболочка считается замкнутой.

С помощью введения аналогичных используемым в классической теории оболочек дополнительных гипотез (пренебрежение обжатием нормального волокна, гипотеза Кирхгофа – Лява о связи тангенциальных составляющих вектора угла поворота нормального волокна с нормальным перемещением, а также гипотеза о связи нормальной к срединной поверхности части координаты вектора угла поворота с его тангенциальными составляющими) число уравнений и неизвестных уменьшается. Для проведения этой процедуры строится вариационное уравнение Гамильтона, учитывающее налагаемые гипотезами связи кинематических параметров, которое затем преобразуется с помощью обобщенной теоремы Остроградского – Гаусса.

Ключевые слова: изотропная тонкая моментная упругая оболочка, уравнения движения в усилиях и кинематических параметрах.

*Выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект №20-19-00217).

Введение

Модель моментной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений применяется при описании напряженно-деформированного состояния (НДС) композитов, зернистых гранулированных, порошкообразных и сыпучих материалов, а также при построении неклассических моделей тонкостенных конструкций (стержней, пластин и оболочек). В настоящее время теория упругости трехмерных моментных сред разработана достаточно полно, и по этому вопросу имеется много публикаций. Не претендуя на полноту, отметим некоторые из них [1–3].

Количество публикаций, посвященных моментным упругим оболочкам, ограничено. Из них отметим статьи [4–6]. В частности, в [5] используются функционал Гамильтона и разложения в степенные ряды по нормальной координате с заменой их частичными суммами.

Различные вопросы, связанные с гипотезой Сен-Венана, особенностями граничных условий, наличием отверстий и воздействием температурного поля, для цилиндрических оболочек рассмотрены в [7–10]. В статье [11] рассматривается упругая моментная пологая оболочка под действием заданного нестационарного температурного поля Коссера. При использовании предположений типа Тимошенко построены уравнения движения. Рассмотрены примеры статики шарнирно опертой прямоугольной в плане сферической оболочки и динамики свободно опертой квадратной пластины, а также устойчивости круговой цилиндрической оболочки под действием равномерно распределенной температуры.

Наиболее простым в изучении оказывается поведение упругих моментных пластин и стержней. Этим вопросам посвящены статьи [12–19]. В [15] построены уравнения равновесия при использовании ряда упрощающих гипотез. В статьях [16–19] с использованием модели Коссера дана постановка задачи о движении пластины постоянной толщины. Построены асимптотические уравнения, распадающиеся на соотношения, описывающие НДС и краевой эффект.

Общая теория динамики упругих моментных оболочек построена в [20]. С ее использованием в предлагаемой статье получены уравнения движения замкнутой моментной упругой сферической оболочки.

Уравнения движения в усилиях

Рассматривается сферическая изотропная моментная упругая оболочка с радиусом R и постоянной малой толщиной h:

$$h/R = \delta << 1. \tag{1}$$

Ее материал описывается моделью Коссера [21]. Далее используем построенные в [20] начально-краевые задачи для такой произвольной оболочки в криволинейной системе координат ξ^1, ξ^2, x_3 с базисом, состоящим из ортов $\mathbf{э}_1$, $\mathbf{э}_2$ в плоскости, касательной к срединной поверхности, и единичного нормального к ней вектора $\mathbf{n}$.

Для сферической оболочки конкретизируем систему криволинейных координат как сферическую с началом в центре срединной поверхности и углами $0 \le \xi^1 = \beta_2 \le \pi$, $-\pi < \xi^2 = \alpha_2 \le \pi$. Используя ее метрику [22], записываем уравнения движения в физических компонентах (им соответствуют нижние индексы в виде координат с опусканием их индексов) вектора перемещения $\mathbf{u} = (u_i + \psi_i x_3)\mathbf{э}^i + (w + \psi_3 x_3)\mathbf{n}$, вектора угла поворота $\boldsymbol{\omega} = (\omega_i + \varphi_i x_3)\mathbf{э}^i + (\omega + \varphi_3 x_3)\mathbf{n}$, тензоров тангенциальных усилий и моментов $\mathbf{T} = T^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$ и $\mathbf{M} = M^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$, векторов перерезывающих усилий и дополнительных моментов $T^{i3}\mathbf{э}_i$, $T^{3i}\mathbf{э}_i$ и $M^{i3}\mathbf{э}_i$, $M^{3i}\mathbf{э}_i$, нормального усилия N, а также аналогичных связанных с моментными свойствами среды величин $\mathbf{R} = R^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$ и $\mathbf{S} = S^{ij}\mathbf{э}_i\mathbf{э}_j$, $R^{i3}\mathbf{э}_i$, $R^{3i}\mathbf{э}_i$ и $S^{i3}\mathbf{э}_i$, N_ω:

$$\begin{gathered}
\rho hR\frac{\partial^2 u_\beta}{\partial t^2} = K(T_{\beta\beta}, T_{\alpha\beta}, T_{\beta\beta} - T_{\alpha\alpha}) + T_{\beta 3} + Rq_\beta,\\
\rho hR\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} = K(T_{\beta\alpha}, T_{\alpha\alpha}, T_{\beta\alpha} + T_{\alpha\beta}) + T_{\alpha 3} + Rq_\alpha,\\
\rho hR\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = K(T_{\beta 3}, T_{\alpha 3}, T_{\beta 3}) - T_{\beta\beta} - T_{\alpha\alpha} + Rq,\\
K(F_1, F_2, F_3) = \frac{\partial F_1}{\partial \beta_2} + \frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial \alpha_2} + F_3 \operatorname{ctg}\beta_2;
\end{gathered} \tag{2}$$

$$\begin{gathered}
\rho IR\frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial t^2} = K(M_{\beta\beta}, M_{\alpha\beta}, M_{\beta\beta} - M_{\alpha\alpha}) - R(T_{3\beta} - m_\beta),\\
\rho IR\frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} = K(M_{\beta\alpha}, M_{\alpha\alpha}, M_{\beta\alpha} + M_{\alpha\beta}) - R(T_{3\alpha} - m_\alpha),\\
\rho IR\frac{\partial^2 \psi_3}{\partial t^2} = K(M_{\beta 3}, M_{\alpha 3}, M_{\beta 3}) - R(N - m), \quad I = \frac{h^3}{12};
\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}
hJR\frac{\partial^2 \omega_\beta}{\partial t^2} = K(R_{\beta\beta}, R_{\alpha\beta}, R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha}) + R_{\beta 3} + R(T_{\alpha 3} - T_{3\alpha} + \widetilde{m}_{M\beta}),\\
hJR\frac{\partial^2 \omega_\alpha}{\partial t^2} = K(R_{\beta\alpha}, R_{\alpha\alpha}, R_{\beta\alpha} + R_{\alpha\beta}) + R_{\alpha 3} + R(T_{3\beta} - T_{\beta 3} + \widetilde{m}_{M\alpha}),\\
hJR\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = K(R_{\beta 3}, R_{\alpha 3}, R_{\beta 3}) - R_{\beta\beta} - R_{\alpha\alpha} + M_{\beta\alpha} - M_{\alpha\beta} + R(T_{\beta\alpha} - T_{\alpha\beta} + \widetilde{m}_M);
\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}
IJR\frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} = K(S_{\beta\beta}, S_{\alpha\beta}, S_{\beta\beta} - S_{\alpha\alpha}) + R(M_{\alpha 3} - M_{3\alpha} - R_{3\beta} + \widetilde{m}_{2M\beta}),\\
IJR\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial t^2} = K(S_{\beta\alpha}, S_{\alpha\alpha}, S_{\beta\alpha} + S_{\alpha\beta}) + R(M_{3\beta} - M_{\beta 3} - R_{3\alpha} + \widetilde{m}_{2M\alpha}),\\
IJR\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial t^2} = K(S_{\beta 3}, S_{\alpha 3}, S_{\beta 3}) + R(M_{\beta\alpha} - M_{\alpha\beta} - N_\omega + \widetilde{m}_{2M}).
\end{gathered} \tag{5}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки; J – массовая мера инерции среды при вращении; q_β, q_α, q и m_β, m_α, m, $\widetilde{m}_{M\beta}, \widetilde{m}_{M\alpha}, \widetilde{m}_M$, $\widetilde{m}_{2M\beta}, \widetilde{m}_{2M\alpha}, \widetilde{m}_{2M}$ – физические координаты векторов $q^i\mathbf{э}_i + q\mathbf{n}$ и $m^i\mathbf{э}_i + m\mathbf{n}$, $\widetilde{m}_M^i\mathbf{э}_i + \widetilde{m}_M\mathbf{n}$, имеющих смысл векторов поверхностного давления и моментов, отнесенных к единице площади, а также аналогичного момента второго порядка $\widetilde{m}_{2M}^i\mathbf{э}_i + \widetilde{m}_{2M}^i\mathbf{n}$.

Для замыкания системы (2)–(5) к ней добавляются физические соотношения:

$$\frac{T_{\beta\beta}}{h} = \frac{1}{R}\left[K_1(u_\beta, u_\alpha) - \frac{r^2}{R}K_1(\psi_\beta, \psi_\alpha) + 2\Lambda_1 w\right] + \lambda\psi_3, \quad r^2 = \frac{I}{h}, \;\; \Lambda_1 = \lambda + \mu,$$

$$\frac{T_{\alpha\alpha}}{h}=\frac{1}{R}\left[K_2(u_\beta,u_\alpha)-\frac{r^2}{R}K_2(\psi_\beta,\psi_\alpha)+2\Lambda_1 w\right]+\lambda\psi_3,$$

$$\frac{T_{\beta\alpha}}{h}=\frac{1}{R}\left[K_3(u_\beta,u_\alpha)-\frac{r^2}{R}K_3(\psi_\beta,\psi_\alpha)\right]+2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_3-\omega\right),$$

$$\frac{T_{\alpha\beta}}{h}=\frac{1}{R}\left[K_4(u_\beta,u_\alpha)-\frac{r^2}{R}K_4(\psi_\beta,\psi_\alpha)\right]-2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_3-\omega\right),$$

$$\frac{T_{\beta 3}}{h}=\frac{\mu_+}{R}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial\beta_2}-u_\beta\right)-\frac{r^2}{R}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta_2}\right]+\mu_-\psi_\beta-2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_\alpha-\omega_\alpha\right), \tag{6}$$

$$\frac{T_{\alpha 3}}{h}=\frac{\mu_+}{R}\left[\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(w-\frac{r^2}{R}\psi_3\right)-u_\alpha\right]+\mu_-\psi_\alpha-2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_\beta+\omega_\beta\right),$$

$$\frac{T_{3\beta}}{h}=\frac{\mu_-}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta_2}-u_\beta\right)-\mu_+\left(\frac{r^2}{R^2}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta_2}-\psi_\beta\right)-2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_\alpha+\omega_\alpha\right),\quad \mu_\pm=\mu\pm\alpha,$$

$$\frac{T_{3\alpha}}{h}=\frac{\mu_-}{R}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-u_\alpha\right)-\mu_+\left(\frac{r^2}{R^2\sin\beta_2}\frac{\partial\psi_3}{\partial\alpha_2}-\psi_\alpha\right)+2\alpha\left(\frac{r^2}{R}\varphi_\beta+\omega_\beta\right),$$

$$\frac{N}{h}=\frac{\lambda}{R}[K_5(u_\beta,u_\alpha)+2w]+\frac{2\Lambda_1 r^2}{R^2}K_5(\psi_\beta,\psi_\alpha)+\Lambda_2\psi_3,\quad \Lambda_2=\lambda+2\mu;$$

$$\frac{RM_{\beta\beta}}{I}=K_1(\psi_\beta,\psi_\alpha)-\frac{1}{R}K_1(u_\beta,u_\alpha)+2\Lambda_1\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right),$$

$$\frac{RM_{\alpha\alpha}}{I}=K_2(\psi_\beta,\psi_\alpha)-\frac{1}{R}K_2(u_\beta,u_\alpha)+2\Lambda_1\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right),$$

$$\frac{M_{\beta\alpha}}{I}=\frac{1}{R}\left[K_3(\psi_\beta,\psi_\alpha)-\frac{1}{R}K_3(u_\beta,u_\alpha)\right]-2\alpha\varphi_3,$$

$$\frac{M_{\alpha\beta}}{I}=\frac{1}{R}\left[K_4(\psi_\beta,\psi_\alpha)-\frac{1}{R}K_4(u_\beta,u_\alpha)\right]+2\alpha\varphi_3, \tag{7}$$

$$\frac{M_{\beta 3}}{I}=\frac{\mu_+}{R}\left[\frac{u_\beta}{R}-\psi_\beta+\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right)\right]+2\alpha\varphi_\alpha,$$

$$\frac{M_{\alpha 3}}{I}=\frac{\mu_+}{R}\left[\frac{u_\alpha}{R}-\psi_\alpha+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right)\right]-2\alpha\varphi_\beta,$$

$$\frac{M_{3\beta}}{I}=\frac{\mu_-}{R}\left[\frac{u_\beta}{R}-\psi_\beta+\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right)\right]-2\alpha\varphi_\alpha,$$

$$\frac{M_{3\alpha}}{I}=\frac{\mu_-}{R}\left[\frac{u_\alpha}{R}-\psi_\alpha+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\psi_3-\frac{w}{R}\right)\right]+2\alpha\varphi_\beta;$$

$$\frac{R_{\beta\beta}}{h}=\frac{1}{R}\left[Q_1(\omega_\beta,\omega_\alpha)-\frac{r^2}{R}Q_1(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)\right]+2\mathrm{B}_1\frac{\omega}{R}+\beta\varphi_3,\quad \mathrm{B}_1=\beta+\gamma,$$

$$\frac{R_{\alpha\alpha}}{h}=\frac{1}{R}\left[Q_2(\omega_\beta,\omega_\alpha)-\frac{r^2}{R}Q_2(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)\right]+2\mathrm{B}_1\frac{\omega}{R}+\beta\varphi_3,$$

$$\frac{R_{\beta\alpha}}{h}=\frac{1}{R}\left[Q_3(\omega_\beta,\omega_\alpha)-\frac{r^2}{R}Q_3(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)\right],\quad \frac{R_{\alpha\beta}}{h}=\frac{1}{R}\left[Q_4(\omega_\beta,\omega_\alpha)-\frac{r^2}{R}Q_4(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)\right],$$

$$\frac{R_{\beta 3}}{h}=\frac{\gamma_+}{R}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\omega-\frac{r^2}{R}\varphi_3\right)-\omega_\beta\right]+\gamma_-\varphi_\beta,\quad \frac{R_{3\beta}}{h}=\frac{\gamma_-}{R}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}-\omega_\beta\right)-\gamma_+\left(\frac{r^2}{R^2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\beta_2}-\varphi_\beta\right),$$

$$\frac{R_{\alpha 3}}{h}=\frac{\gamma_+}{R}\left[\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\omega-\frac{r^2}{R}\varphi_3\right)-\omega_\alpha\right]+\gamma_-\varphi_\alpha,\quad \gamma_\pm=\gamma\pm\varepsilon, \tag{8}$$

$$\frac{R_{3\alpha}}{h}=\frac{1}{R\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\gamma_-\omega-\frac{r^2}{R}\gamma_+\varphi_3\right)+\gamma_+\varphi_\alpha-\gamma_-\frac{\omega_\alpha}{R},$$

$$\frac{N_\omega}{h}=\frac{\beta}{R}\left[K_5(\omega_\beta,\omega_\alpha)+2\omega\right]+\frac{2\mathrm{B}_1r^2}{R^2}K_5(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)+\mathrm{B}_2\varphi_3,\quad \mathrm{B}_2=\beta+2\gamma;$$

$$\frac{RS_{\beta\beta}}{I}=Q_1(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)-\frac{1}{R}Q_1(\omega_\beta,\omega_\alpha)+2\mathrm{B}_1\left(\varphi_3-\frac{\omega}{R}\right),$$

$$\frac{RS_{\alpha\alpha}}{I}=Q_2(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)-\frac{1}{R}Q_2(\omega_\beta,\omega_\alpha)+2\mathrm{B}_1\left(\varphi_3-\frac{\omega}{R}\right),$$

$$\frac{RS_{\beta\alpha}}{I}=Q_3(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)-\frac{1}{R}Q_3(\omega_\beta,\omega_\alpha),\quad \frac{RS_{\alpha\beta}}{I}=Q_4(\varphi_\beta,\varphi_\alpha)-\frac{1}{R}Q_4(\omega_\beta,\omega_\alpha), \tag{9}$$

$$\frac{RS_{\beta 3}}{I}=\gamma_+\left[\frac{\omega_\beta}{R}-\varphi_\beta+\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(\varphi_3-\frac{\omega_\beta}{R}\right)\right],\quad \frac{RS_{\alpha 3}}{I}=\gamma_+\left[\frac{\omega_\alpha}{R}-\varphi_\alpha+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\varphi_3-\frac{\omega}{R}\right)\right].$$

Здесь

$$K_1(F_1,F_2)=\Lambda_2\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}+\lambda\left(F_1\operatorname{ctg}\beta_2+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}\right),$$

$$M(F_1,F_2)=\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_1}{\partial\alpha_2}-F_2\operatorname{ctg}\beta_2,$$

$$K_2(F_1,F_2)=\lambda\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}+\Lambda_2\left(F_1\operatorname{ctg}\beta_2+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}\right),$$

$$K_3(F_1,F_2)=\mu_-M(F_1,F_2)+\mu_+\frac{\partial F_2}{\partial\beta_2},\qquad K_4(F_1,F_2)=\mu_+M(F_1,F_2)+\mu_-\frac{\partial F_2}{\partial\beta_2},$$

$$K_5(F_1,F_2)=\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2}+F_1\operatorname{ctg}\beta_2;$$

$$Q_1(F_1,F_2)=\mathrm{B}_2\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}+\beta F_1\operatorname{ctg}\beta_2+\frac{\beta}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2},$$

$$Q_2(F_1,F_2)=\beta\frac{\partial F_1}{\partial\beta_2}+\mathrm{B}_2F_1\operatorname{ctg}\beta_2+\frac{\beta+2\gamma}{\sin\beta_2}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha_2},$$

$$Q_3(F_1,F_2)=\gamma_-M(F_1,F_2)+\gamma_+\frac{\partial F_2}{\partial\beta_2},\quad Q_4(F_1,F_2)=\gamma_+M(F_1,F_2)+\gamma_-\frac{\partial F_2}{\partial\beta_2}.$$

В соотношениях (6)–(9) учтено, что поскольку рассматриваются тонкие оболочки, для которых выполняется соотношение (1), то в соответствии с (10) имеет место асимптотическое равенство $r^2 = O(h^2)$, $h \to 0$. Поэтому в коэффициентах дифференциальных операторов здесь и далее малые слагаемые отброшены.

Уравнения движения в «перемещениях» (кинематических параметрах)

Вместо системы уравнений (2)–(5), (6)–(9) удобнее пользоваться уравнениями в «перемещениях» (кинематических параметрах). Для их построения подставляем (6)–(9) в (2)–(5). В результате получаем

$$\mathbf{LW}+\mathbf{P}=\frac{\partial^2\mathbf{W}}{\partial t^2},\quad \mathbf{L}=(L_{ij})_{12\times12},\quad \mathbf{W}=(w_1,w_2,...,w_{12})^{\mathrm{T}},\quad \mathbf{P}=(p_1,p_2,...,p_{12})^{\mathrm{T}},$$

$$w_1=u_\beta,\quad w_2=u_\alpha,\quad w_3=w,\quad w_4=\omega_\beta,\quad w_5=\omega_\alpha,\quad w_6=\omega,\quad w_7=\psi_\beta,$$

$$w_8=\psi_\alpha,\quad w_9=\varphi_\beta,\quad w_{10}=\varphi_\alpha,\quad w_{11}=\psi_3,\quad w_{12}=\varphi_3,$$

$$p_1=\frac{q_\beta}{\rho h},\quad p_2=\frac{q_\alpha}{\rho h},\quad p_3=\frac{q}{\rho h},\quad p_4=\frac{\widetilde{m}_{M\beta}}{Jh},\quad p_5=\frac{\widetilde{m}_{M\alpha}}{Jh},\quad p_6=\frac{\widetilde{m}_M}{Jh},\quad p_7=\frac{m_\beta}{\rho I},$$

$$p_8=\frac{m_\alpha}{\rho I},\quad p_9=\frac{\widetilde{m}_{2M\beta}}{IJ},\quad p_{10}=\frac{\widetilde{m}_{2M\alpha}}{IJ},\quad p_{11}=\frac{m}{\rho I},\quad p_{12}=\frac{\widetilde{m}_{2M}}{IJ}.$$

Здесь дифференциальные операторы L_{ij} определяются следующим образом (остальные операторы тривиальные):

$$L_{11}(u_\beta)=\frac{1}{\rho R^2}[l_4(u_\beta)+\mu_-u_\beta],\ L_{13}(w)=\frac{\Lambda_3}{\rho R^2}\frac{\partial w}{\partial\beta_2},\ L_{15}(\omega_\alpha)=\frac{2\alpha}{\rho R}\omega_\alpha,\ \Lambda_3=2\Lambda_1+\mu_+,$$

$$L_{12}(u_\alpha)=\frac{1}{\rho R^2\sin\beta_2}\frac{\partial l_{5-}(u)}{\partial\alpha_2},\quad L_{17}(\psi_\beta)=\frac{1}{\rho R}\left[-\frac{r^2}{R^2}l_4(\psi_\beta)+\mu_-\psi_\beta\right],$$

$$L_{18}(\psi_\alpha)=-\frac{r^2}{R}L_{12}(\psi_\alpha),\quad L_{1,10}(\varphi_\alpha)=-\frac{r^2}{R}L_{15}(\varphi_\alpha),\quad L_{1,11}(\psi_3)=\frac{\lambda}{\rho R}\frac{\partial\psi_3}{\partial\beta_2};$$

$$L_{21}(u_\beta)=\frac{1}{\rho R^2\sin\beta_2}\frac{\partial l_{5+}(u)}{\partial\alpha_2},\quad L_{22}(u_\alpha)=\frac{1}{\rho R^2}[l_{6+}(u_\alpha)+\mu_-u_\alpha],$$

$$L_{23}(w)=\frac{\Lambda_3}{\rho R^2\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},\quad L_{24}(\omega_\beta)=-L_{15}(\omega_\beta),\quad L_{27}(\psi_\beta)=-\frac{r^2}{R}L_{21}(\psi_\beta),$$

$$L_{28}(\psi_\alpha)=\frac{1}{\rho R}\left[-\frac{r^2}{R^2}l_{6+}(\psi_\alpha)+\mu_-\psi_\alpha\right],\quad L_{29}(\varphi_\beta)=\frac{r^2}{R}L_{15}(\varphi_\beta),$$

$$L_{2,11}(\varphi_3)=\frac{\lambda R}{\Lambda_3}L_{23}(\psi_3);$$

$$L_{31}(u_\beta)=-\frac{\Lambda_3}{\rho R^2}l_1(u_\beta),\quad L_{32}(u_\alpha)=-L_{23}(u_\alpha),\quad L_{33}(w)=\frac{1}{\rho R^2}[\mu_+l_3(w)-4\Lambda_1 w],$$

$$L_{34}(\omega_\beta)=\frac{2R\alpha}{\Lambda_3}L_{23}(\omega_\beta),\quad L_{35}(\omega_\alpha)=-\frac{2R\alpha}{\Lambda_3}L_{31}(\omega_\alpha),\quad L_{37}(\psi_\beta)=-\frac{R\mu_-}{\Lambda_3}L_{31}(\psi_\beta),$$

$$L_{38}(\psi_\alpha)=\frac{R\mu_-}{\Lambda_3}L_{23}(\psi_\alpha),\quad L_{39}(\varphi_\beta)=-\frac{2\alpha r^2}{\Lambda_3}L_{23}(\varphi_\beta),$$

$$L_{3,10}(\varphi_\alpha)=\frac{2\alpha r^2}{\Lambda_3}L_{31}(\varphi_\alpha),\quad L_{3,11}(\psi_3)=-\frac{1}{\rho R}\left[\frac{r^2\mu_+}{R^2}l_3(\psi_3)+2\lambda\psi_3\right];$$

$$L_{42}(u_\alpha)=-\frac{\rho}{J}L_{15}(u_\alpha),\quad L_{43}(w)=-\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{23}(w),$$

$$L_{44}(\omega_\beta)=\frac{1}{J}\left[\frac{l_7(\omega_\beta)}{R^2}+\left(\frac{\gamma_-}{R^2}-4\alpha\right)\omega_\beta\right],\quad L_{45}(\omega_\alpha)=\frac{1}{JR^2\sin\beta_2}\frac{\partial l_{8-}(\omega_\alpha)}{\partial\alpha_2},$$

$$L_{46}(\omega)=\frac{\rho\mathrm{B}_3}{J\Lambda_3}L_{13}(\omega),\quad L_{48}(\psi_\alpha)=-\frac{\rho}{J}L_{15}(\psi_\alpha),\quad L_{4,10}(\varphi_\alpha)=-\frac{r^2}{R}L_{45}(\varphi_\alpha),$$

$$L_{4,12}(\varphi_3)=-\frac{\rho R\beta}{J\Lambda_3}L_{13}(\varphi_3),\quad L_{49}(\varphi_\beta)=\frac{1}{JR}\left[-\frac{r^2l_7(\varphi_\beta)}{R^2}+\gamma_-\varphi_\beta\right];$$

$$L_{51}(u_\beta)=\frac{\rho}{J}L_{15}(u_\beta),\quad L_{53}(w)=-\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{13}(w),$$

$$L_{56}(\omega)=\frac{\rho\mathrm{B}_3}{J\Lambda_3}L_{23}(\omega),\quad \mathrm{B}_3=2\mathrm{B}_1+\gamma_+,$$

$$L_{57}(\psi_\beta)=\frac{\rho R}{J}L_{15}(\psi_\beta),\quad L_{54}(\omega_\beta)=\frac{1}{JR^2\sin\beta_2}\frac{\partial l_{8+}(\omega_\beta)}{\partial\alpha_2},$$

$$L_{55}(\omega_\alpha)=\frac{1}{J}\left[\frac{l_9(\omega_\alpha)}{R^2}+\left(\frac{\gamma_-}{R^2}-4\alpha\right)\omega_\alpha\right],\quad L_{59}(\varphi_\beta)=-\frac{r^2}{R}L_{54}(\varphi_\beta),$$

$$L_{5,10}(\varphi_\alpha)=\frac{1}{JR}\left[-\frac{r^2l_9(u)\varphi_\alpha}{R^2}+\gamma_-\varphi_\alpha\right],\quad L_{5,12}(\varphi_3)=-\frac{\beta\rho R}{J\Lambda_3}L_{23}(\varphi_3),$$

$$L_{61}(u_\beta)=-\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{23}(u_\beta),\quad L_{62}(u_\alpha)=-\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{31}(u_\alpha),\quad L_{64}(\omega_\beta)=\frac{\rho\mathrm{B}_3}{J\Lambda_3}L_{31}(\omega_\beta),$$

$$L_{65}(\omega_\alpha)=-\frac{\rho\mathrm{B}_3}{J\Lambda_3}L_{23}(\omega_\alpha),\quad L_{66}(\omega)=\frac{1}{J}\left[\frac{\gamma_+}{R^2}l_3(\omega)-4\left(\alpha+\frac{\mathrm{B}_1}{R^2}\right)\omega\right],$$

$$L_{69}(\varphi_\beta)=-\frac{\rho R\gamma_-}{J\Lambda_3}L_{31}(\varphi_\beta),\quad L_{6,10}(\varphi_\alpha)=\frac{\rho R\gamma}{J\Lambda_3}L_{23}(\varphi_\alpha),$$

$$L_{6,12}(\varphi_3)=-\frac{1}{JR}\left[\frac{r^2\gamma_+}{R^2}l_3(\varphi_3)+2\beta\varphi_3\right],\ L_{71}(u_\beta)=\frac{1}{r^2}L_{17}(u_\beta),\ L_{72}(u_\alpha)=-\frac{1}{R}L_{12}(u_\alpha),$$

$$L_{73}(w)=-\frac{R\mu_-}{r^2\Lambda_3}L_{13}(w),\quad L_{75}(\omega_\alpha)=\frac{R}{r^2}L_{15}(\omega_\alpha),\quad L_{77}(\psi_\beta)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{l_4(\psi_\beta)}{R^2}-\frac{\mu_+}{r^2}\psi_\beta\right],$$

$$L_{78}(\psi_\alpha)=L_{12}(\psi_\alpha),\quad L_{7,10}(\varphi_\alpha)=\frac{2\alpha}{\rho R}\varphi_\alpha,\quad L_{7,11}(\psi_3)=L_{13}(\psi_3),$$

$$L_{7,12}(\varphi_3)=\frac{2R\alpha}{\Lambda_3}L_{23}(\varphi_3),\quad L_{81}(u_\beta)=-L_{21}(u_\beta),\quad L_{82}(u_\alpha)=\frac{1}{r^2}L_{28}(u_\alpha),$$

$$L_{83}(w)=-\frac{\mu_-}{\rho R r^2\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2},\quad L_{84}(\omega_\beta)=-\frac{R}{r^2}L_{15}(\omega_\beta),\quad L_{87}(\psi_\beta)=L_{21}(\psi_\beta),$$

$$L_{88}(\psi_\alpha)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{l_{6+}(\psi_\alpha)}{R^2}-\frac{\mu_+}{r^2}\psi_\alpha\right],\quad L_{89}(\varphi_\beta)=-L_{15}(\varphi_\beta),\quad L_{8,11}(\psi_3)=L_{23}(\psi_3),$$

$$L_{8,12}(\varphi_3)=-\frac{2R\alpha}{\Lambda_3}L_{13}(\varphi_3);\quad L_{92}(u_\alpha)=\frac{\rho}{J}L_{15}(u_\alpha),\quad L_{93}(w)=-\frac{2\alpha\rho}{J\Lambda_3}L_{23}(w),$$

$$L_{96}(\omega)=-\frac{\rho R\gamma_-}{Jr^2\Lambda_3}L_{13}(\omega),\quad L_{98}(\psi_\alpha)=-\frac{\rho}{J}L_{15}(\psi_\alpha),$$

$$L_{94}(\omega_\beta)=-\frac{1}{JR^3}\left[l_7(\omega_\beta)+\frac{\gamma_-R^2}{r^2}\omega_\beta\right],\quad L_{95}(\omega_\alpha)=-RL_{45}(\omega_\alpha),$$

$$L_{99}(\varphi_\beta)=\frac{1}{J}\left[\frac{l_7(\varphi_\beta)}{R^2}-\frac{\gamma_+}{r^2}\varphi_\beta\right],\quad L_{9,10}(\varphi_\alpha)=L_{45}(\varphi_\alpha),$$

$$L_{9,11}(\psi_3)=\frac{2\rho R\alpha}{J\Lambda_3}L_{23}(\psi_3),\quad L_{9,12}(\varphi_3)=\frac{\rho B_3}{J\Lambda_3}L_{13}(\varphi_3);$$

$$L_{10,1}(u_\beta)=-\frac{\rho}{JR}L_{15}(u_\beta),\quad L_{10,3}(w)=\frac{2\rho\alpha}{J\Lambda_3}L_{13}(w),\quad L_{10,6}(\omega)=-\frac{\rho R\gamma_-}{Jr^2\Lambda_3}L_{23}(\omega),$$

$$L_{10,7}(\psi_\beta)=\frac{\rho}{J}L_{15}(\psi_\beta),\ L_{10,4}(\omega_\beta)=-L_{54}(\omega_\beta),\ L_{10,5}(\omega_\alpha)=\frac{1}{JR}\left[-\frac{l_9(\omega_\alpha)}{R^2}+\frac{\gamma_-}{r^2}\omega_\alpha\right],$$

$$L_{10,9}(\varphi_\beta)=L_{54}(\varphi_\beta),\quad L_{10,10}(\varphi_\alpha)=\frac{1}{J}\left[\frac{l_9(\varphi_\alpha)}{R^2}-\frac{\gamma_+}{r^2}\varphi_\alpha\right],$$

$$L_{10,11}(\psi_3)=-\frac{2R\alpha}{\Lambda_3}L_{13}(\psi_3),\quad L_{10,12}(\varphi_3)=\frac{\rho B_3}{J\Lambda_3}L_{23}(\varphi_3);\quad L_{11,1}(u_\beta)=\frac{\lambda R}{r^2\Lambda_3}L_{31}(u_\beta),$$

$$L_{11,2}(u_\alpha)=-\frac{\lambda R}{r^2\Lambda_3}L_{23}(u_\alpha),\quad L_{11,3}(w)=-\frac{\mu_+}{\rho R^3}l_3(w)-\frac{2\lambda}{\rho Rr^2}w,$$

$$L_{11,7}(\psi_\beta)=L_{31}(\psi_\beta),\quad L_{11,8}(\psi_\alpha)=-L_{23}(\psi_\alpha),\quad L_{11,9}(\varphi_\beta)=-\frac{2\alpha R}{\Lambda_3}L_{23}(\varphi_\beta),$$

$$L_{11,10}(\varphi_\alpha)=-\frac{2\alpha R}{\Lambda_3}L_{31}(\varphi_\alpha),\quad L_{11,11}(\psi_3)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\mu_+\alpha}{R^2}l_3(\psi_3)-\frac{2\Lambda_2}{r^2}\psi_3\right],$$

$$L_{12,1}(u_\beta)=\frac{2\alpha\rho}{J\Lambda_3}L_{23}(u_\beta),\quad L_{12,2}(u_\alpha)=\frac{2\alpha\rho}{J\Lambda_3}L_{31}(u_\alpha),\quad L_{12,4}(\omega_\beta)=\frac{\rho R\beta}{Jr^2\Lambda_3}L_{31}(\omega_\beta),$$

$$L_{12,5}(\omega_\alpha)=-\frac{\rho R\beta}{Jr^2\Lambda_3}L_{23}(\omega_\alpha),\quad L_{12,6}(\omega)=-\frac{1}{JR}\left[\frac{\gamma_+}{R^2}l_3(\omega)+\frac{2\beta}{r^2}\omega\right],$$

$$L_{12,7}(\psi_\beta)=\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{23}(\psi_\beta),\ L_{12,8}(\psi_\alpha)=-\frac{2\alpha\rho R}{J\Lambda_3}L_{31}(\psi_\alpha),\ L_{12,9}(\varphi_\beta)=\frac{\rho B_3}{J\Lambda_3}L_{31}(\omega_\beta),$$

$$L_{12,10}(\varphi_\alpha) = -\frac{\rho \mathrm{B}_3}{J\Lambda_3} L_{23}(\varphi_\alpha), \quad L_{12,12}(\varphi_3) = \frac{1}{J}\left[\frac{\gamma_+}{R^2} l_3(\varphi_3) - \frac{2\mathrm{B}_2}{r^2}\varphi_3\right].$$

В последних равенствах для операторов использованы обозначения:

$$l_1(u) = \frac{\partial u}{\partial \beta_2} + u \operatorname{ctg} \beta_2, \quad l_2(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 - \frac{u}{\sin^2 \beta_2},$$

$$l_9(u) = \gamma_+ l_2(u) + \frac{\mathrm{B}_2}{\sin^2 \beta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2},$$

$$l_3(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \beta_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \operatorname{ctg} \beta_2 + \frac{1}{\sin^2 \beta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}, \quad l_4(u) = \Lambda_2 l_2(u) + \frac{\mu_+}{\sin^2 \beta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2},$$

$$l_{5\pm}(u) = (\lambda + \mu_-) \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \pm (\Lambda_2 + \mu_+) u \operatorname{ctg} \beta_2, \quad l_{6\pm}(u) = \mu_+ l_2(u) \pm \frac{\Lambda_2}{\sin^2 \beta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2},$$

$$l_7(u) = \mathrm{B}_2 l_2(u) + \frac{\gamma_+}{\sin^2 \beta_2} \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_2^2}, \quad l_{8\pm}(u) = (\beta + \gamma_-) \frac{\partial u}{\partial \beta_2} \pm (\mathrm{B}_2 + \gamma_+) u \operatorname{ctg} \beta_2.$$

Упрощенные модели сферических оболочек

Во-первых, аналогично классическим упругим оболочкам [22–24] полагаем, что обжатие нормального волокна отсутствует, то есть $\psi_3 \equiv 0$. При этом, естественно, дополнительно следует положить $\varphi_3 \equiv 0$. Во-вторых, подобно оболочке Кирхгофа–Лява принимаем гипотезу прямой нормали, а также аналогичные предположения относительно угла поворота. Это соответствует равенствам:

$$\begin{gathered}
\psi_\beta = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} - u_\beta\right), \quad \psi_\alpha = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin \beta_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - u_\alpha\right), \quad \frac{\partial^2 \psi_\beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi_\alpha}{\partial t^2} \equiv 0, \\
\varphi_\beta = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} - \omega_\beta\right), \quad \varphi_\alpha = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin \beta_2}\frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} - \omega_\alpha\right), \quad \frac{\partial^2 \varphi_\beta}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial t^2} \equiv 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Для обеспечения этих гипотез необходимо наложить следующие ограничения на внешние нагрузки: $m \equiv 0,\ \tilde{m}_{2M} \equiv 0$ и $\tilde{m}_{M\beta} \equiv 0,\ \tilde{m}_{M\alpha} \equiv 0,\ \tilde{m}_{2M\beta} \equiv 0,\ \tilde{m}_{2M\alpha} \equiv 0$. При этом записанное в физических величинах вариационное уравнение для основной модели будет иметь вид [20]:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\Pi} \left\{ \left[\sum_{i=1}^{6} \left(\sum_{j=1}^{10} L_{ij}(w_j) + p_i - \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} \right) + \sum_{i=7}^{10} \sum_{j=1}^{10} L_{ij}(w_j) \right] \delta w_i \right\} dS = 0.$$

Преобразовывая его с учетом связи (10) кинематических параметров и использованием обобщенной теоремы Остроградского–Гаусса [23], получим систему уравнений движения оболочки:

$$\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{W}^{(2)} + \mathbf{P}^{(2)} = \frac{\partial^2 \mathbf{W}^{(2)}}{\partial t^2}, \quad \mathbf{L}^{(2)} = \left(L_{ij}^{(2)}\right)_{6\times 6},$$

$$\mathbf{W}^{(2)} = (w_1, w_2, \dots, w_6)^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = (p_1, p_2, \dots, p_6)^{\mathrm{T}},$$

где

$$L_{ij}^{(2)} = L_{ij} + \frac{1}{R} L_{i,j+6} + \frac{1}{R}\left(L_{i+6,j} + \frac{1}{R} L_{i+6,j+6} \right) \quad (i=1,2;\ j=1,2),$$

$$L_{ij}^{(2)} = L_{ij} + \frac{1}{R} L_{i,j+5} + \frac{1}{R}\left(L_{i+6,j} + \frac{1}{R} L_{i+6,j+5} \right) \quad (i=1,2;\ j=4,5),$$

$$L_{ij}^{(2)} = L_{ij} + \frac{1}{R} L_{i,j+6} + \frac{1}{R}\left(L_{i+5,j} + \frac{1}{R} L_{i+5,j+6} \right) \quad (i=4,5;\ j=1,2),$$

$$L_{ij}^{(2)} = L_{ij} + \frac{1}{R} L_{i,j+5} + \frac{1}{R}\left(L_{i+5,j} + \frac{1}{R} L_{i+5,j+5} \right) \quad (i=4,5;\ j=4,5),$$

$$L_{i3}^{(2)}(w) = L_{i3}(w) - \frac{1}{R}\left[L_{i7}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + L_{i8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R}\left\{ L_{i+6,3}(w) - \frac{1}{R}\left[L_{i+6,7}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + L_{i+6,8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \right] \right\} \quad (i=1,2),$$

$$L_{i3}^{(2)}(w) = L_{i3}(w) - \frac{1}{R}\left[L_{i7}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + L_{i8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R}\left[L_{i+5,3}(w) - \frac{1}{R} L_{i+5,7}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \frac{1}{R} L_{i+5,8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \right] \quad (i=4,5),$$

$$L_{i6}^{(2)}(\omega) = L_{i6}(\omega) - \frac{1}{R}\left[L_{i9}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} \right) + L_{i,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R}\left\{ L_{i+6,6}(\omega) - \frac{1}{R}\left[L_{i+6,9}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} \right) + L_{i+6,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \right] \right\} \quad (i=1,2),$$

$$L_{i6}^{(2)}(\omega) = L_{i6}(\omega) - \frac{1}{R}\left[L_{i9}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} \right) + L_{i,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{1}{R}\left[L_{i+5,6}(\omega) - \frac{1}{R} L_{i+5,9}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \frac{1}{R} L_{i+5,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \right] \quad (i=4,5),$$

$$L_{3i}^{(2)} = L_{3i} + \frac{1}{R} L_{3,i+6} + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(L_{7i} + \frac{1}{R} L_{7,i+6} \right) + \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(L_{8i} + \frac{1}{R} L_{8,i+6} \right) \right] \ (i=1,2),$$

$$L_{3i}^{(2)} = L_{3i} + \frac{1}{R} L_{3,i+5} + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial \beta_2}\left(L_{7i} + \frac{1}{R} L_{7,i+5} \right) + \frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(L_{8i} + \frac{1}{R} L_{8,i+5} \right) \right] \ (i=4,5),$$

$$L_{33}^{(2)} = L_{33}(w) - \frac{1}{R}\left[L_{37}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) + L_{38}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \beta_2}\left[L_{73}(w) - \frac{1}{R} L_{77}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{R} L_{78}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \right] + \frac{1}{R\sin\beta_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left[L_{83}(w) - \frac{1}{R} L_{87}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta_2} \right) - \frac{1}{R} L_{88}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} \right) \right],$$

$$L_{36}^{(2)} = L_{36}(\omega) - \frac{1}{R}\left[L_{39}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \beta_2} \right) + L_{3,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha_2} \right) \right] +$$

$$+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[L_{76}(\omega)-\frac{1}{R}L_{79}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}\right)-\frac{1}{R}L_{7,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left\{L_{86}(\omega)-\frac{1}{R}\left[L_{89}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}\right)+L_{8,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2}\right)\right]\right\},$$

$$L_{6i}^{(2)}=L_{6i}+\frac{1}{R}L_{6,i+1}+$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(L_{9i}+\frac{1}{R}L_{9,i+6}\right)+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(L_{10,i}+\frac{1}{R}L_{10,i+6}\right)\right]\ \ (i=1,2),$$

$$L_{6i}^{(2)}=L_{6i}+\frac{1}{R}L_{6,i+5}+$$

$$+\frac{1}{R}\left[\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left(L_{9i}+\frac{1}{R}L_{9,i+5}\right)+\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(L_{10,i}+\frac{1}{R}L_{10,i+5}\right)\right]\ \ (i=4,5),$$

$$L_{63}^{(2)}=L_{63}(w)-\frac{1}{R}\left[L_{67}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta_2}\right)+L_{i8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[L_{93}(w)-\frac{1}{R}L_{97}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta_2}\right)-\frac{1}{R}L_{98}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[L_{10,3}(w)-\frac{1}{R}L_{10,7}\left(\frac{\partial w}{\partial\beta_2}\right)-\frac{1}{R}L_{10,8}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}\right)\right],$$

$$L_{66}^{(2)}=L_{66}(\omega)-\frac{1}{R}\left[L_{69}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}\right)+L_{6,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\beta_2}\left[L_{96}(\omega)-\frac{1}{R}L_{99}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}\right)-\frac{1}{R}L_{9,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{R\sin\beta_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[L_{10,6}(\omega)-\frac{1}{R}L_{10,9}\left(\frac{\partial\omega}{\partial\beta_2}\right)-\frac{1}{R}L_{10,10}\left(\frac{1}{\sin\beta_2}\frac{\partial\omega}{\partial\alpha_2}\right)\right].$$

Заключение

Построены уравнения нестационарного движения тонкой упругой моментной сферической оболочки. Полученная система содержит двенадцать уравнений и достаточно громоздкая. Показано, что при использовании дополнительных гипотез она существенно упрощается и включает всего шесть уравнений. При решении конкретных задач, по крайней мере, сначала есть смысл рассматривать осесимметричные деформации, полагая, что искомые функции не зависят от угла α_2. При этом число уравнений и неизвестных дополнительно сокращается.

Список литературы

1. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.

2. Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Солдатов И.Н. *Волновые процессы в сплошных средах*. Саров: Изд-во РФЯЦ–ВНИИЭФ, 2012. 260 с.

3. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Heidelberg–New York–Dordrecht–London: Springer, 2016. 274 p.

4. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic Cosserat surface and shell theory. *International Journal of Solids and Structures*. 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592. https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90075-9.

5. Бабич Д.В. Основные уравнения движения оболочки с учетом несимметричности тензора напряжений. *Прикладная механика*. 1966. Т. 2. Вып. 12. С. 41–48.

6. Ванин Г.А. Моментная механика тонких оболочек. *Изв. РАН. МТТ.* 2004. №4. С. 116–128.

7. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. P. 185–214.

8. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mechanics Research Communications*. 2006. Vol. 33. Iss. 2. P. 157–176. DOI:10.1016/j.mechrescom.2005.08.008.

9. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2009. Vol. 28. Iss. 1. P. 94–101. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.03.001.

10. Амбарцумян С.А. Задача несимметричной термоупругости весьма пологой оболочки. *Изв. НАН РА. Механика.* 2002. №3. С. 20–33.

11. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. Iss. 22-23. P. 7399–7419. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016.

12. Palmov W.W., Altenbach H. Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Bd. 3. Ausgabe 3. S. 5–9.

13. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (*ZAMM*). 2009. Vol. 89. Iss. 4. P. 242–256. DOI: 10.1002/zamm.200800207.

14. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *ASME. Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707.

15. Амбарцумян С.А. Температурная задача микрополярной пластинки. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* 2000. №3. С. 17–20.

16. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Vol. 16. Springer. 2004. P. 201–210. DOI: 10.1007/978-3-540-39905-6_24.

17. Саркисян С.О. Общие модели микрополярных упругих тонких пластин. *Вестник Пермского ГТУ. Математическое моделирование систем и процессов*. 2008. №16. С. 111–120.

18. Саркисян С.О. Краевые задачи тонких пластин в несимметричной теории упругости. *ПММ*. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 77–86.

19. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний. *Акустический журнал.* 2011. Т. 57. №4. С. 473–481.

20. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures under Quasi-static and Impulse Loading*. Switzerland AG. Springer Nature, 2023. P. 159–171.

21. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.

22. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах.* М.: Физматлит, 2004. 472 с.

23. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки.* 2018. Т. 160. Кн. 3. С. 561–577.

24. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. *Упругие пластины и пологие оболочки*. М.: Изд-во МАИ, 2018. 92 с.

References

1. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [*Theory of Elasticity*]. Moscow. Mir Publ. 1975. 872 p. (In Russian).

2. Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Soldatov I.N. *Volnovye protsessy v sploshnykh sredakh* [*Wave Processes in Continuous Media*]. Sarov. RFYaTs-VNIIEF Publ. 2012. 260 p. (In Russian).

3. Bagdoev A.G., Erofeyev V.I., Shekoyan A.V. *Wave Dynamics of Generalized Continua*. Heidelberg. New York. Dordrecht. London. Springer. 2016. 274 p.

4. Green A.E., Naghdi P.M. The linear elastic Cosserat surface and shell theory. *Int. J. Solids Struct.* 1968. Vol. 4. Iss. 6. P. 585–592. https://doi.org/10.1016/0020-7683(68)90075-9.

5. Babich D.V. Osnovnye uravneniya dvizheniya obolochki s uchetom nesimmetrichnosti tenzora napryazhenij [The basic equations of motion of the shell with allowance for the asymmetry of the stress tensor]. *Prikladnaya mexanika* [*International Applied Mechanics*]. 1966. Vol. 2. Iss. 12. P. 41–48 (In Russian).

6. Vanin G.A. Momentnaya mekhanika tonkikh obolochek [Couple-stress mechanics of thin shells]. *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [*Mechanics of Solids*]. 2004. No 4. P. 116–128 (In Russian).

7. Birsan M. The solution of Saint-Venant's problem in the theory of Cosserat shells. *Journal of Elasticity*. 2004. Vol. 74. P. 185–214.

8. Birsan M. Several results in the dynamic theory of thermoelastic Cosserat shells with voids. *Mech. Res. Commun*. 2006. Vol. 33. Iss. 2. P. 157–176. DOI:10.1016/j.mechrescom. 2005.08.008.

9. Birsan M. Thermal stresses in cylindrical Cosserat elastic shells. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2009. Vol. 28. Iss. 1. P. 94–101. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.03.001.

10. Ambartsumyan S.A. Zadacha nesimmetrichnoy termouprugosti vesma pologoy obolochki [The problem of the nonsymmetrical thermoelasticity of a very extremaly shallow shell]. *Izvestiya Natsionalnoy Akademii nauk Respubliki Armenii. Mekhanika* [*Proceedings of NAS RA. Mechanics*]. 2002. No 3. P. 20–33 (In Russian).

11. Birsan M. On the theory of loaded general cylindrical Cosserat elastic shells. *Int. J. Solids Struct*. 2007. Vol. 44. Iss. 22-23. P. 7399–7419. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2007.04.016.

12. Palmov W.W., Altenbach H. Über eine Cosseratsche Theorie für elastische Platen. *Technische Mechanik*. 1982. Bd. 3. Ausgabe 3. S. 5–9 (Auf Deutsch).

13. Altenbach H., Eremeyev V. On the linear theory of micropolar plates. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* (*ZAMM*). 2009. Vol. 89. Iss. 4. P. 242–256. DOI: 10.1002/ zamm.200800207.

14. Hoffman O. On the bending of thin elastic plates in the presence of moment stresses. *ASME. Applied Mechanics*. 1964. Vol. 31. No 4. P. 706–707.

15. Ambartsumyan S.A. Temperaturnaya zadacha mikropolyarnoy plastinki [Temperature problem of a micropolar plate]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Bulletin of Higher Education Institutes. North Caucasus Region. Natural Sciences*]. 2000. No 3. P. 17–20 (In Russian).

16. Sargsyan S.H. On some interior and boundary effects in thin plates based on the asymmetric theory of elasticity. In: *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*. Vol. 16. Springer. 2004. P. 201–210. DOI: 10.1007/978-3-540-39905-6_24.

17. Sarkisyan S.O. Obshchie modeli mikropolyarnykh uprugikh tonkikh plastin [General models of micropolar elastic thin plates]. *Vestnik Permskogo GTU. Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov* [*Vestnik of thr Perm Polytechnic Institute*]. 2008. №16. P. 111–120 (In Russian).

18. Sarkisyan S.O. Kraevye zadachi tonkikh plastin v nesimmetrichnoy teorii uprugosti [Boundary-value problems of non-symmetric elasticity for thin plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*J. Appl. Math. Mech*]. 2008. Vol. 72. Iss. 1. P. 77–86 (In Russian).

19. Sarkisyan S.O., Sarkisyan A.A. Obshchaya dinamicheskaya teoriya mikropolyarnykh uprugikh tonkikh plastin so svobodnym vrashcheniem i osobennosti ikh svobodnykh kolebaniy [General dynamic theory of micropolar elastic thin plates with free rotation and special features of their natural oscillations]. *Akusticheskiy zhurnal* [*Acoustical Physics*]. 2011. Vol. 57. No 4. P. 473–481 (In Russian).

20. Quoc Chien Mai, Ryazantseva M.Yu., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures under Quasi-static and Impulse Loading.* Switzerland AG. Springer Nature. 2023. P. 159–171.

21. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [*Wave Processes in Solid Bodies with Microstructure*]. Moscow. MGU Publ. 1999. 328 p. (In Russian).

22. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh* [*Waves in Continuous Media*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

23. Mikhaylova E.Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Obobshchennaya lineynaya model dinamiki tonkikh uprugikh obolochek [A generalized linear model of dynamics of thin elastic shells]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [*Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series*]. 2018. Vol. 160. Book 3. P. 561–577 (In Russian).

24. Mikhaylova E.Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. *Uprugie plastiny i pologie obolochki* [*Elastic Plates and Shallow Shells*]. Moscow. MAI Publ. 2018. 92 p. (In Russian).

EQUATIONS OF MOTION OF AN ISOTROPIC SPHERICAL MOMENT ELASTIC SHELL*

Tarlakovskii D.V.[1,2], Farmanyan A.Zh.[1], Gafurov U.S.[1]

[1]*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*
[2]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

tdvhome@mail.ru

Received by the Editor 2024/03/18

Using the previously obtained equations of motion of thin moment elastic shells of constant thickness with an arbitrary middle surface, the equations of motion of an isotropic moment spherical shell in terms of forces and “displacements” (kinematic parameters) are constructed. In this case, the metric of the middle spherical surface is taken into account, as the curvilinear coordinates of which two angular coordinates of the standard spherical coordinate system with the origin at the center of the middle surface are used.
First, a closed system is written down, which includes the equations of motion in the physical components of the tensors of internal forces and moments, as well as additional similar characteristics corresponding to the moment properties of the model, and physical relationships. Then, by excluding physical relations, it is reduced to twelve equations of motion in kinematic parameters, written in operator form. In this case, the coefficients of partial derivative operators are simplified by neglecting terms that have a higher order of smallness relative to the thickness of the shell. Despite the bulkiness of the system, it is written in a compact form. Boundary conditions are not written, since the shell is considered closed.
By introducing additional hypotheses similar to those used in the classical theory of shells (neglecting the compression of a normal fiber, the Kirchhoff – Love hypothesis about the connection between the tangential components of the rotation angle vector of a normal fiber and normal displacement, as well as the hypothesis about the connection between the normal to the middle surface part of the coordinate of the rotation angle vector and its tangential components) the number of equations and unknowns decreases. To carry out this procedure, a variational Hamilton equation is constructed, which takes into account the connections between kinematic parameters imposed by the hypotheses, and then the corresponding one is transformed using the generalized Ostrogradsky – Gauss theorem.

Keywords: isotropic thin moment elastic shell, motion equations in forces and kinematic parameters.

* This study was supported by the Russian Science Foundation (grant No 20-19-00217).