

УДК 539.375

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-2-149-158

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ЗНАЧЕНИЯ J-ИНТЕГРАЛА В ДВУХКОНСОЛЬНОЙ БАЛКЕ
С ТОНКИМ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИМ АДГЕЗИОННЫМ СЛОЕМ***

© 2024 г.

**Богачева В.Э., Глаголев В.В.,
Глаголев Л.В., Маркин А.А.**

Тульский государственный университет, Тула, Российская Федерация

vadim@tsu.tula.ru

Поступила в редакцию 02.10.2023

Рассматривается нагружение образца двухконсольной балки (образец представляет собой композицию консолей и адгезионного слоя), приводящее к деформированию слоя нормальным разрывом. В основу математической модели, описывающей равновесие композита, положено вариационное уравнение равновесия, связывающее средние по толщине слоя напряжения и напряженно-деформированное состояние консоли линейным параметром. Поведение консоли полагается линейно упругим, клеевой слой считается упругопластическим без упрочнения. Композит рассматривается в состоянии плоской деформации. В предположении выполнения условия полной пластичности (равенстве двух главных напряжений, действующих ортогонально отрыву) и упругой объемной деформации получены соотношения, определяющие поведение слоя на стадии упругопластического деформирования. С использованием распределения поля перемещений, согласно теории пластин Миндлина – Рейснера, из вариационной постановки задачи получена система обыкновенных дифференциальных уравнений, условия сопряжения решений и краевые условия. Показано, что в зависимости от отношения линейного параметра и высоты консоли характеристическое уравнение соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений имеет как вещественные, так и комплексные корни. Найдены соответствующие общие решения системы. На основе исследования одной области упругопластических деформаций предложена итерационная процедура нахождения длины пластической зоны с учетом удовлетворения краевых условий. Из решения задачи при заданном значении линейного параметра и критической внешней нагрузки найдено напряженно-деформированное состояние слоя, на основе которого вычислен J-интеграл. Показано, что при стремлении линейного параметра к нулевому значению J-интеграл асимптотически стремится к величине, найденной в рамках линейно упругого поведения материала слоя. Для определенного диапазона значений линейного параметра проведено сравнение полученного решения с конечно-элементным решением 2D-задачи.

* Выполнено за счет гранта РФФИ №23-21-00017 <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> в Тульском государственном университете.

Ключевые слова: линейный параметр, упругопластическое деформирование, адгезив, J-интеграл, пластина Миндлина – Рейснера.

Введение

В настоящее время большое внимание уделяется прочности адгезионных соединений. В этом случае несущие слои слоистых композитов связываются адгезионными слоями, толщины которых пренебрежимо малы по сравнению с сопрягаемыми материалами. Дефект адгезионного слоя формирует трещиноподобный дефект, при исследовании которого применяют подходы механики разрушения, одним из основных критериев прочности в этом случае выступает J-интеграл [1–5]. При этом в силу малости толщины слоя трещиноподобный дефект, как правило, рассматривается в виде математического разреза, а адгезионный слой на его продолжении принимается за слой нулевой толщины. Адгезионные слои имеют реальные механические свойства, и эти свойства при таком допущении формально исключаются из математической модели деформирования слоистого композита. Отметим, что в случае плоского напряженного состояния на основе модели Леонова – Панасюка – Дагдейла (ЛПД) [6, 7] или иных когезионных моделей возможно учесть предел текучести материала [8], полагая локализацию необратимого деформирования в рамках слоя нулевой толщины. В силу того, что для адгезионных соединений пределы текучести существенно уступают пределам текучести сопрягаемых материалов (в несколько раз) [9], будем предполагать гипотезу локализации пластических деформаций в рамках тонкого адгезионного слоя справедливой и в случае плоской деформации. Однако в отличие от ЛПД-модели в слое конечной толщины имеется несколько компонент тензора напряжений, удовлетворяющих выбранному критерию текучести. При этом постулат постоянства напряжений отрыва, принятый в ЛПД-модели, не рассматривается.

Учет материальных свойств адгезионных слоев приводит к решению 2D-задачи в том числе и численными методами. Решение задач, основанных на вариационной формулировке, методом конечных элементов [10–13] связано с условием вычислительной сходимости получаемых решений для большого количества конечных элементов. В ряде случаев бывает уместно ввести упрощающие гипотезы, чтобы получить некоторые аналитические решения в конкретных областях. Так, в статье [14] методом конечных элементов исследовалась вариационная постановка задачи деформирования упругопластического адгезионного слоя консолями образца двухконсольной балки (ДКБ-образца). Постановка включает в себя толщину слоя в качестве линейного параметра δ_0 . Линейный параметр связан с размером грани конечного элемента. При конкретном размере исследуемого образца уменьшение линейного параметра требует существенных вычислительных ресурсов. В настоящей статье на основе допущений теории пластин Миндлина – Рейснера и результатов полученного численного решения предлагается упрощенная постановка задачи в дифференциальном виде. Приводится решение задачи, на основе которого определяется J-интеграл при практически нулевых значениях линейного параметра.

Постановка задачи

На рис. 1 показана композиция двух упругих тел 1, 2 и адгезионного слоя 3 с упругопластическими свойствами. Рассматривается жесткая заделка правой границы образца при нагружении адгезионного слоя нормальным разрывом. Принимается

во внимание, что в образце высота консоли h гораздо меньше длины сопряжения консолей l и жесткая заделка правой границы образца не оказывает существенного влияния на распределение напряжений в зоне обрыва связей консолей в торцевой области слоя.

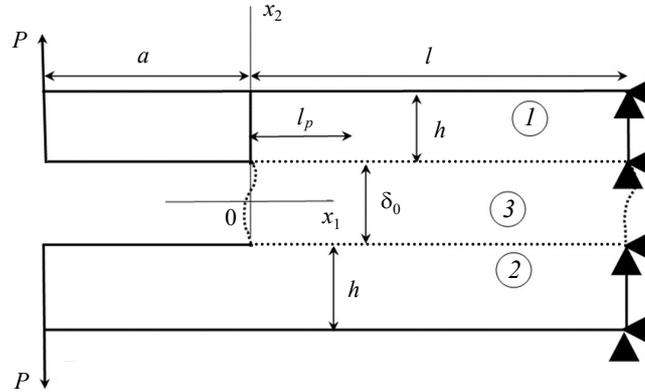


Рис. 1. Модель ДКБ-образца

Равновесие композита в состоянии плоской деформации в [14] исследовалось на основе вариационного условия для тела I , полученного из связанной вариационной системы уравнений статьи [15] с учетом симметрии задачи, в виде:

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} ds + \int_l \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + 0,5 \delta_0 \int_l \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 = \int_{L_1} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dl, \quad (1)$$

где S_1 – площадь поверхности тела I ; \mathbf{u} – векторное поле перемещений тела I ; $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$, $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензоры средних напряжений и деформаций слоя; u_s^+ – компоненты вектора перемещений верхней границы слоя, $s = 1, 2$; L_1 – граница приложения внешней нагрузки для тела I ; две точки – двойное скалярное умножение, одна точка – скалярное умножение; \mathbf{P} – векторное поле равномерно распределенной внешней нагрузки, действующей на левом торце консоли вдоль оси Ox_2 .

Средние деформации слоя определяются через его граничные перемещения [14, 15]. Определяющие соотношения для тела I рассматриваем в форме закона Гука. Определяющие соотношения для слоя при обратимом деформировании определяем для средних по толщине слоя характеристик напряженно-деформированного состояния (НДС).

В рамках деформационной теории пластичности для материала слоя методом упругих решений [16] в статье [14] было получено численное решение задачи о НДС слоя при критической внешней нагрузке. Несмотря на то, что в слое при малом значении линейного параметра образуется несколько зон пластичности, разделенных упругой областью, из решения видно, что основное влияние на значение J -интеграла оказывает зона, примыкающая к вершине трещиноподобного дефекта. Кроме того, в областях пластического деформирования слоя реализуется условие полной пластичности [17–19] – равенства двух главных напряжений, действующих ортогонально отрыву. С учетом этих фактов будем считать, что пластичность в слое реализуется в рамках одной области длиной l_p . В такой области имеет место условие полной пластичности по средним напряжениям в состоянии плоской деформации $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{33}$ при постоянном значении интенсивности касательных напряжений и предела текучести

$$T_p = \frac{\sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + (\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{33})^2 + (\bar{\sigma}_{33} - \bar{\sigma}_{11})^2}}{\sqrt{6}}.$$

При одноосном растяжении интенсивность касательных напряжений определяется через предел текучести $T_p = \sigma_0/\sqrt{3}$, где σ_0 – предел текучести при одноосном растяжении. Из связей интенсивностей касательных напряжений с учетом того, что $\bar{\sigma}_{22} > \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{11}$, имеем $\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = \sigma_0$. Из последнего равенства и условия упругого деформирования объема приходим к линейным определяющим соотношениям для области упругопластического деформирования в состоянии плоской деформации:

$$\bar{\sigma}_{11} = K(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) - \frac{1}{3}\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{22} = K(\bar{\varepsilon}_{11} + \bar{\varepsilon}_{22}) + \frac{2}{3}\sigma_0, \quad \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{11}, \quad (2)$$

где K – коэффициент объемной деформации.

Поле перемещений в теле l определяем по кинематике Миндлина [20], согласно которой поле перемещений консоли принимается в виде $u_1(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi(x_1) \times (x_2 - \delta_0/2)$, $u_2(x_1, x_2) = u_2^+(x_1)$, где $\varphi(x_1)$ – функция, ассоциируемая с малым углом поворота внутренней нормали к нижней границе консоли. В рамках рассматриваемого поля перемещений уравнение (1) приводит к двум системам дифференциальных уравнений [21] на участках:

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, & \frac{dQ_{11}}{dx_1} = 0, & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = 0, & x_1 \in [-a, 0), \\ \frac{dM_{11}}{dx_1} - Q_{12} = 0, & \frac{dQ_{11}}{dx_1} + 0,5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = 0, & \frac{dQ_{12}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}, & x_1 \in (0, l], \end{cases} \quad (3)$$

относительно обобщенных сил

$$Q_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{11} dx_2, \quad Q_{12}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} \sigma_{12} dx_2$$

и обобщенных моментов

$$M_{11}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h+\delta_0/2} (x_2 - \delta_0/2) \sigma_{11} dx_2$$

с условиями сопряжения

$$\begin{aligned} u_1^+|_{x_1=-0} = u_1^+|_{x_1=+0}, \quad u_2^+|_{x_1=-0} = u_2^+|_{x_1=+0}, \quad \varphi|_{x_1=-0} = \varphi|_{x_1=+0}, \quad M_{11}|_{x_1=-0} = M_{11}|_{x_1=+0}, \\ Q_{12}|_{x_1=-0} = Q_{12}|_{x_1=+0}, \quad Q_{11}|_{x_1=-0} = (Q_{11} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=+0} \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$Q_{12}|_{x_1=-a} = -Q_2, \quad Q_{11}|_{x_1=-a} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=-a} = 0.$$

На правом торце имеют место условия жесткой заделки:

$$u_1^+|_{x_1=l} = 0, \quad u_2^+|_{x_1=l} = 0, \quad \varphi|_{x_1=l} = 0.$$

Определяющие соотношения теории Миндлина – Рейснера [20, 22, 23] при упругом деформировании консоли запишем в виде:

$$\sigma_{11} = D \left(\frac{du_1^+(x_1)}{dx_1} - \varphi'(x_1)(x_2 - \delta_0/2) \right), \quad \sigma_{12} = L \left(\frac{du_2^+(x_1)}{dx_1} - \varphi(x_1) \right), \quad (4)$$

где

$$L = k \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, \quad D = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, \quad k = \frac{5}{6},$$

E_1 – модуль упругости, ν_1 – коэффициент Пуассона тела I .

При дальнейшем изложении будем рассматривать участок консоли, сопряженный со слоем. Перенесем граничные условия на левом торце тела I посредством уравнений на его свободном участке системы (3) и условий сопряжения в точке $x_1 = 0$:

$$Q_{12}|_{x_1=0} = -Q_2, \quad (Q_{11} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=0} = 0, \quad M_{11}|_{x_1=0} = -Q_2a.$$

Систему уравнений для участка $x_1 \in (0, l_p)$ принимаем с учетом соотношений (2), а на участке $x_1 \in (l_p, l)$ – с учетом соотношений закона Гука при определяющих соотношениях для консоли (4) с условиями сопряжения:

$$u_1^+|_{x_1=l'} = u_1^+|_{x_1=l''}, \quad u_2^+|_{x_1=l'} = u_2^+|_{x_1=l''}, \quad \varphi|_{x_1=l'} = \varphi|_{x_1=l''}, \quad M_{11}|_{x_1=l'} = M_{11}|_{x_1=l''},$$

$$Q_{12}|_{x_1=l'} = Q_{12}|_{x_1=l''}, \quad (Q_{11} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=l'} = (Q_{11} + 0,5\delta_0\bar{\sigma}_{11})|_{x_1=l''},$$

где $l' = l_p - 0$, $l'' = l_p + 0$.

Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений на указанных участках относительно неизвестных u_1^+ , u_2^+ , φ , входящих со второй производной включительно, приводят к общим решениям, содержащим двенадцать постоянных интегрирования. Шесть граничных условий и шесть условий сопряжения используются для однозначного нахождения частного решения при заданной длине пластической зоны l_p .

Будем искать соответствующее решение для критической внешней нагрузки Q_c . Модифицируем постановку задачи: при заданной длине пластической зоны l_p необходимо найти обобщенную силу Q_2 , соответствующую заданной длине зоны пластичности. Обобщенную силу Q_2 будем рассматривать в качестве неизвестной, а l_p считать известной величиной. Для ее нахождения к двенадцати уравнениям добавим условие текучести $\bar{\sigma}_{22} - \bar{\sigma}_{11} = \sigma_0$ в точке $x_1 = l_p$. Таким образом, приходим к тринадцати уравнениям относительно двенадцати постоянных интегрирования и обобщенной силы Q_2 . При этом длину пластической зоны, соответствующую нагрузке Q_c , с заданной степенью точности ищем при удовлетворении условий методом дихотомии. Относительную погрешность по обобщенной силе принимаем равной 10^{-4} .

Критическую сосредоточенную нагрузку на консоль ДКБ-образца для адгезионного слоя в виде упругих связей найдем по формуле [24]:

$$Q_c = \sqrt{\frac{G_{IC}hE_1}{12(1 - \nu_1^2)}} \left(\frac{a}{h} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5(1 - \nu_1)}} \frac{h}{a} \right) \right)^{-1},$$

где G_{IC} – критическое значение J-интеграла, полученное в рамках представления изгиба консоли по теории пластин Миндлина – Рейснера и представления слоя в виде упругих связей Прандтля [25–27]. Нагрузку Q_c используем в качестве граничного условия при различных значениях линейного параметра.

После нахождения длины пластической зоны и НДС в адгезионном слое определяем значение J-интеграла согласно статье [14] по формуле:

$$J = \delta_0 \left(\psi_e + \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=0} - \bar{\sigma}_{11} \bar{\varepsilon}_{11} \Big|_{x_1=l_p} - 0,5 \left(K (\bar{\varepsilon}_{22}^2 - \bar{\varepsilon}_{11}^2) + \frac{4}{3} \sigma_0 \bar{\varepsilon}_{22} \right) \Big|_0^{l_p} \right),$$

где ψ – удельная свободная энергия, $\psi_e = \psi \Big|_{x_1=l_p}$. Последнее выражение определяет значение J-интеграла по произвольному контуру, охватывающему область диссипации в концевой зоне трещиноподобного дефекта.

Результаты расчетов

Рассмотрим консоль со следующими геометрическими и механическими характеристиками: $a = 0,055$ м, $h = 0,0127$ м, $l = 0,245$ м, $E_1 = 204$ ГПа, $\nu_1 = 0,3$, в качестве адгезива выберем смолу Sikaforce 7752 с механическими и прочностными характеристиками: $E_3 = 0,49$ ГПа, $\nu_3 = 0,3$, $\sigma_0 = 3,24$ МПа, $G_{IC} = 2360$ Н/м согласно статье [24].

Из (3) посредством подстановки определяющих соотношений на рассматриваемых областях получена неоднородная система дифференциальных уравнений. В зависимости от отношения линейного параметра и высоты консоли характеристическое уравнение соответствующей однородной системы дифференциальных уравнений имеет как вещественные, так и комплексные корни. Найдены соответствующие общие решения системы.

В таблице 1 приведены расчетные данные длины пластической зоны l_p и значения J-интеграла при рассматриваемом подходе и найденных аналитических решениях систем дифференциальных уравнений. Длина пластической зоны l_1 и значение J-интеграла J_1 соответствуют решению 2D-задачи в статье [14] методом конечных элементов.

Таблица 1

Результаты расчетов

$\delta_0, \text{м}$	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}	10^{-10}
$l_1 \cdot 10^{-3}, \text{м}$	16	9,6	5,8	4,5	–	–	–	–
$l_p \cdot 10^{-3}, \text{м}$	16,29	9,60	5,06	2,44	1,08	0,45	0,18	0,07
$J_1, \text{Н/м}$	3358	2713	2453	2417	–	–	–	–
$J, \text{Н/м}$	3583	2884	2575	2435	2385	2368	2363	2361

Из результатов таблицы 1 видно, что значение J-интеграла, рассчитанное в рамках упрощающих гипотез, превосходит соответствующее значение при решении 2D-задачи методом конечных элементов. Однако разница соответствующих решений уменьшается по мере уменьшения линейного параметра. Упрощенное аналитическое решение задачи дает возможность определить значение J-интеграла при практически нулевых толщинах адгезионного слоя с учетом его упругопластических свойств. В этом случае результат совпадает с известным аналитическим решением при представлении адгезионного слоя в виде упругих связей. Таким образом, в тонком адгезионном слое для состояния плоской деформации учет упругопластических свойств при моделировании не приводит к новым результатам по сравнению с упругой моделью.

Заключение

Для нормального разрыва тонкого адгезионного слоя с упругопластическими свойствами, деформируемого упругими консолями ДКБ-образца, предложена постановка задачи в дифференциальном виде, которая включает в себя линейные оп-

ределяющие соотношения между напряжениями и деформациями, построенные на основе гипотезы полной пластичности. Получены общие решения соответствующих систем дифференциальных уравнений, на основе которых построена итерационная процедура нахождения упругопластической области деформирования адгезионного слоя. Определено НДС в слое практически до нулевых его толщин и найдены соответствующие области упругопластического деформирования в состоянии предразрушения адгезионного слоя. На основе результатов расчета вычислены критические значения J -интегралов при различных толщинах слоя. Показано асимптотическое стремление J -интеграла к известному аналитическому значению, полученному в рамках используемых гипотез теории пластин Миндлина – Рейснера при поведении адгезионного слоя в виде упругих связей Прандтля.

Список литературы

1. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 519–536. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014>.
2. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*. 1968. Vol. 35. Iss. 2. P. 379–386. <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.
3. Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F.D. A new view on J -integrals in elastic-plastic materials. *International Journal of Fracture*. 2014. Vol. 187. Iss. 1. P. 77–107. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9920-6>.
4. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *International Journal of Fracture*. 2020. Vol. 224. Iss. 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>.
5. Fraisse P., Schmit F. Use of J -integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints. *International Journal of Fracture*. 1993. Vol. 63. Iss. 1. P. 59–73. <https://doi.org/10.1007/BF00053316>.
6. Леонов М.Я., Панасюк В.В. Развитие мельчайших трещин в твердом теле. *Прикладная механика*. 1959. Т. 5. №4. С. 391–401.
7. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 1960. Vol. 8. Iss. 2. P. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).
8. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1959. Vol. 23. No 3. P. 622–636. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90157-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90157-1).
9. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sánchez-Arce, I.J., Madani K., Prakash C. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J -integral concepts. *Processes*. 2022. Vol. 10. Iss. 12. Article No 2730. <https://doi.org/10.3390/pr10122730>.
10. Оден Дж. *Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред*. М.: Мир, 1976. 464 с.
11. Zenkevich O.C., Morgan K.J. *Finite Elements and Approximation*. New York: John Wiley & Sons, 1983. 328 p.
12. Капустин С.А., Лихачева С.Ю. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов с периодически повторяющейся структурой*. Н.Новгород: Изд-во ННГАСУ, 2012. 96 с.
13. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 45. Iss. 5. P. 601–620. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S).
14. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Влияние пластических свойств тонкого адгезионного слоя на распределение зон пластичности и значения J -интеграла в состоянии плоской деформации. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2023. Т. 29. №1. С. 115–131. <https://doi.org/10.33113/mkkm.ras.2023.29.01.08>.

15. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *International Journal of Solids and Structures*. 2019. Vol. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>.
16. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации*. М.–Л.: Гостехиздат, 1948. 376 с.
17. Хаар А., Карман Т. К теории напряженных состояний в пластических и сыпучих средах. *Теория пластичности: Сб. статей*. Под ред. Ю.Н. Работнова. М.: ИЛ, 1948. С. 41–56.
18. Ишлинский А.Ю., Ивлев Д.Д. *Математическая теория пластичности*. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
19. Радаев Ю.Н. *Пространственная задача математической теории пластичности*. Самара: Изд-во Самарского университета, 2004. 142 с.
20. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*. 1951. Vol. 18. Iss. 1. P. 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.
21. Богачева В.Э., Глаголев В.В., Глаголев Л.В., Маркин А.А. Напряженное состояние и условия инициирования трещины в адгезионном слое композита. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2021. №3. С. 22–34. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2021.3.03>.
22. Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates. *Applied Mechanics Reviews*. 1985. Vol. 38. Iss. 11. P. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699.
23. Reissner E. On bending of elastic plates. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1947. Vol. 5. No 1. P. 55–68. DOI:10.1090/QAM/20440.
24. Bruno D., Greco F. Mixed mode delamination in plates: A refined approach. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. Iss. 50-51. P. 9149–9177. DOI:10.1016/S0020-7683(01)00179-2.
25. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids. *International Journal of Fracture*. 2011. Vol. 171. No 2. P. 105–109. <https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>.
26. Ентов В.М., Салганик Р.Л. К модели хрупкого разрушения Прандтля. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1968. №6. С. 87–99.
27. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility. *International Journal of Fracture*. 2017. Vol. 207. No 1. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>.

References

1. Cherepanov G.P. Some new applications of the invariant integrals of mechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2012. Vol. 76. Iss. 5. P. 519–536. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.11.014>.
2. Rice J.R. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech.* 1968. Vol. 35. Iss. 2. P. 379–386. <https://doi.org/10.1115/1.3601206>.
3. Kolednik O., Schöngrundner R., Fischer F.D. A new view on J-integrals in elastic-plastic materials. *Int. J. Fract.* 2014. Vol. 187. Iss. 1. P. 77–107. <https://doi.org/10.1007/s10704-013-9920-6>.
4. Berto F., Glagolev V.V., Markin A.A. Relationship between J_c and the dissipation energy in the adhesive layer of a layered composite. *Int. J. Fract.* 2020. Vol. 224. Iss. 2. P. 277–284. <https://doi.org/10.1007/s10704-020-00464-0>.
5. Fraisse P., Schmit F. Use of J-integral as fracture parameter in simplified analysis of bonded joints. *Int. J. Fract.* 1993. Vol. 63. Iss. 1. P. 59–73. <https://doi.org/10.1007/BF00053316>.
6. Leonov M.Ya., Panasyuk V.V. Razvitie melchayshikh treshchin v tverdom tele [Development of the smallest cracks in a solid]. *Prikladnaya mekhanika [Applied Mechanics]*. 1959. Vol. 5. No 4. P. 391–401 (In Russian).
7. Dugdale D.S. Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*. 1960. Vol. 8. Iss. 2. P. 100–104. [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(60\)90013-2](https://doi.org/10.1016/0022-5096(60)90013-2).
8. Barenblatt G.I. The formation of equilibrium cracks during brittle fracture. General ideas and hypotheses. Axially-symmetric cracks. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1959. Vol. 23. No 3. P. 622–636. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(59\)90157-1](https://doi.org/10.1016/0021-8928(59)90157-1).

9. Neves L.F.R., Campilho R.D.S.G., Sánchez-Arce, I.J., Madani K., Prakash C. Numerical modelling and validation of mixed-mode fracture tests to adhesive joints using J-integral concepts. *Processes*. 2022. Vol. 10. Iss. 12. Article No 2730. <https://doi.org/10.3390/pr10122730>.
10. Oden J.T. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York. McGraw-Hill Book Company. 1972. 448 p.
11. Zenkevich O.C., Morgan K.J. *Finite Elements and Approximation*. New York. John Wiley & Sons. 1983. 328 p.
12. Kapustin S.A., Likhacheva S.Yu. *Modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya materialov s periodicheski povtoryayushcheyssya strukturoy* [Modeling of Processes of Deformation and Destruction of Materials with a Periodically Repeating Structure]. Nizhny Novgorod. NNGASU Publ. 2012. 96 p. (In Russian).
13. Belytschko T., Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 45. Iss. 5. P. 601–620. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990620\)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990620)45:5<601::AID-NME598>3.0.CO;2-S).
14. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Vliyaniye plasticheskikh svoystv tonkogo adgezionnogo sloya na raspredelenie zon plastichnosti i znacheniya J-integrala v sostoyanii ploskoy deformatsii [Influence of the plastic properties of a thin adhesion layer on the distribution of plasticity zones and the values of the J-integral in the plane deformation state]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 2023. Vol. 29. No 1. P. 115–131. <https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2023.29.01.08> (In Russian).
15. Glagolev V.V., Markin A.A. Fracture models for solid bodies, based on a linear scale parameter. *Int. J. Solids Struct.* 2019. Vol. 158. P. 141–149. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.09.002>.
16. Ilyushin A.A. *Plastichnost. Ch.1. Uprugoplasticheskie deformatsii* [Plastic. Part 1. Elastic-Plastic Deformations]. Moscow. Leningrad. Gostekhizdat Publ. 1948. 376 p. (In Russian).
17. Khaar A., Karman T. K teorii napryazhennykh sostoyaniy v plasticheskikh i sypuchikh sredakh [On the theory of stress states in plastic and granular media]. *Teoriya plastichnosti. Sbornik statey* [Theory of Plasticity. Collection of Articles]. Ed. Yu.N. Rabotnov. Moscow. Inostrannaya literatura Publ. 1948. P. 41–56 (In Russian).
18. Ishlinskiy A.Yu., Ivlev D.D. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2001. 704 p. (In Russian).
19. Radaev Yu.N. *Prostranstvennaya zadacha matematicheskoy teorii plastichnosti* [Spatial Problem of the Mathematical Theory of Plasticity]. Samara. Samarskiy universitet Publ. 2004. 142 p. (In Russian).
20. Mindlin R.D. Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.* 1951. Vol. 18. Iss. 1. P. 31–38. <https://doi.org/10.1115/1.4010217>.
21. Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. Napryazhennoe sostoyanie i usloviya initsirovaniya treshchiny v adgezionnom sloe kompozita [Stress state and conditions for crack initiation in the adhesion layer of the composite]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [PNRPU Mechanics Bulletin]. 2021. No 3. P. 22–34 (In Russian).
22. Reissner E. Reflections on the theory of elastic plates. *Appl. Mech. Rev.* 1985. Vol. 38. Iss. 11. P. 1453–1464. DOI: 10.1115/1.3143699.
23. Reissner E. On bending of elastic plates. *Quart. Appl. Math.* 1947. Vol. 5. No 1. P. 55–68. DOI:10.1090/QAM/20440.
24. Bruno D., Greco F. Mixed mode delamination in plates: A refined approach. *Int. J. Solids Struct.* 2001. Vol. 38. Iss. 50-51. P. 9149–9177. DOI:10.1016/S0020-7683(01)00179-2.
25. Prandtl L., Knauss W.G. A thought model for the fracture of brittle solids. *Int. J. Fract.* 2011. Vol. 171. No 2. P. 105–109. <https://doi.org/10.1007/s10704-011-9637-3>.
26. Entov V.M., Salganik R.L. K modeli khрупkogo razrusheniya Prandtlya [To the Prandtl model of brittle fracture]. *Izvestiya AN SSSR. MTT*. 1968. No 6. P. 87–99 (In Russian).
27. Santos M.A.S., Campilho R.D.S.G. Mixed-mode fracture analysis of composite bonded joints considering adhesives of different ductility. *Int. J. Fract.* 2017. Vol. 207. No 1. P. 55–71. <https://doi.org/10.1007/s10704-017-0219-x>.

**NUMERICAL AND ANALYTICAL INVESTIGATION OF THE J-INTEGRAL VALUE
IN A DOUBLE CANTILEVER BEAM SAMPLE WITH AN EXTREMELY
THIN ELASTIC-PLASTIC ADHESION LAYER***

Bogacheva V.E., Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A.

Tula State University, Tula, Russian Federation

vadim@tsu.tula.ru

Received by the Editor 2023/10/02

The loading of a double cantilever beam sample, which is a composition of cantilevers and an adhesive layer, is considered, which leads to deformation of the layer by normal rupture. The basis of the mathematical model describing the equilibrium of the composite is the variational equilibrium equation connecting the stresses averaged over the thickness of the layer and the stress-strain state of the cantilever by a linear parameter. The behavior of the cantilever is considered within the framework of a linearly elastic body, the adhesive layer is considered elastic-plastic without hardening. The composite is considered in a state of plane deformation. Assuming the fulfillment of the condition of complete plasticity of the equality of two principal stresses acting orthogonally to separation and elastic volumetric deformation, the constitutive relations of the behavior of the layer at the stage of elastoplastic deformation are obtained. Using the distribution of the displacement field according to the theory of Mindlin-Reisner plates, a system of ordinary differential equations, conjugation conditions for solutions, and boundary conditions are obtained from the variational formulation of the problem. It is shown that, depending on the ratio of the linear parameter and the height of the console, the characteristic equation of the corresponding homogeneous system of differential equations has both real and complex roots. The corresponding general solutions of the system are found. Based on the consideration of one region of elastoplastic deformations, an iterative procedure for finding the length of the plastic zone is proposed, taking into account the satisfaction of boundary conditions. From the solution of the problem for a given value of the linear parameter and a critical external load, the stress-strain state of the layer is found, on the basis of which the J-integral is calculated. It is shown that as the linear parameter tends to zero, the J-integral asymptotically tends to the value found in the framework of the linearly elastic behavior of the layer material. For a certain range of values of the linear parameter, the obtained solution was compared with the finite element solution of the 2D problem.

Keywords: linear parameter, elastic-plastic deformation, adhesive, J-integral, Mindlin–Reisner plate.

*The research was supported by of the Russian Science Foundation grant No 23-21-00017, <https://rscf.ru/project/23-21-00017/> at Tula State University.