

УДК 539.3

НЕЛОКАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ИЗ ДИСКРЕТНОГО НАБОРА МАТЕРИАЛОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев

Москва

Ф. Рагнетта

Кальяри (Италия)

Исследуются вопросы оптимального проектирования конструкций из дискретного набора материалов. Характерной особенностью проводимых исследований является то, что допустимые переменные проектирования принимают значения из заданного множества дискретных величин. В качестве оптимизируемого элемента рассматривается упругий стержень, составленный из различных кусочно-однородных материалов. Предполагается, что стержень находится в состоянии сжатия, возникающего вследствие его нагрева и закрепления концов. Формулируемые оптимизационные задачи состоят в определении оптимального размещения вдоль стержня термоупругих материалов, обеспечивающего минимум расхода, или максимизирующего значение критической температуры потери устойчивости. Приводятся описание применяемого модифицированного генетического алгоритма и результаты решения задач нелокальной оптимизации.

1. Определяющие соотношения

Пусть упругий стержень расположен вдоль оси x ($0 \leq x \leq l$) и закреплен на концах в точках $x = 0$ и $x = l$. Закрепление таково, что перемещения концов стержня в направлении оси x равны нулю:

$$u(0) = u(l) = 0, \quad (1)$$

где $u(x)$ – распределение перемещений вдоль оси x . Предполагается, что стержень состоит из дискретного множества материалов, распределенных последовательно вдоль оси x и характеризуемых множеством параметров

$$\{E_i, \alpha_i, \rho_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (2)$$

где E_i – модуль Юнга, α_i – коэффициент линейного расширения, ρ_i – плотность материала, i – номер материала, r – число материалов. Распределения рассматриваемых параметров (переменных проектирования) вдоль стержня ($E(x)$, $\alpha(x)$, $\rho(x)$) являются кусочно-постоянными функциями, определенными на отрезке $0 \leq x \leq l$. В каждой точке $x \in [0, l]$ эти функции принимают значения из заданного конечного множества, то есть

$$E(x) \in \{E_i\}, \quad \alpha(x) \in \{\alpha_i\}, \quad \rho(x) \in \{\rho_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

В дальнейшем применим параметризацию существенных характеристик материала, используя для этого кусочно-постоянную функцию $t = t(x)$ ($x \in [0, l]$), принимающую значения $t = t_i = i$ из заданного множества, то есть $t \in [t_i = i]$, и такую, что выполняются следующие равенства:

$$E(t(x)) = E_i, \quad \alpha(t(x)) = \alpha_i, \quad \rho(t(x)) = \rho_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

в случае, если $t(x) = t_i = i$. Предположим, что стержень находится в недеформированном (естественном) состоянии при некоторой начальной температуре T . При нагреве стержня до температуры $T + \Delta T$ будет выполняться следующее соотношение между напряжениями σ и деформациями ε [1]:

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha \Delta T). \quad (5)$$

Принимая во внимание, что

$$\sigma = -\frac{P}{S}, \quad \varepsilon = \frac{du}{dx}, \quad (6)$$

будем иметь

$$u(l) - u(0) = -P \int_0^l \frac{dx}{SE} + \Delta T \int_0^l \alpha dx, \quad (7)$$

где S – площадь поперечного сечения стержня, а $P > 0$ – сжимающая сила (реакция закрепления или распор), действующая на неоднородный упругий стержень. Используя условия закрепления (1) и соотношение (7), получим выражение для распора:

$$P = \Delta T \frac{J_1}{J_2}, \quad (8)$$

где функционалы J_1 и J_2 определяются выражениями

$$J_1 = \int_0^l \alpha dx, \quad J_2 = \int_0^l \frac{dx}{SE}. \quad (9)$$

Если под действием возникающей при нагреве сжимающей силы P происходит потеря упругой устойчивости прямолинейной формы стержня, то распределение поперечных прогибов $w = w(x)$, определяющих отклонение искривленной оси стержня от осей x , описывается следующей краевой задачей на собственные значения ($x \in [0, l]$) [2]:

$$EIw_{xx} + Pw = 0, \quad (10)$$

$$w(0) = w(l) = 0. \quad (11)$$

Здесь I – момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба и пересекающей нейтральную ось стержня; нижний индекс обозначает операцию дифференцирования по x . Заметим, что формулировка краевой задачи в виде (10), (11) соответствует случаю закрепления концов стержня

в шарнирах. Из соотношений (10), (11) путем умножения уравнения потери устойчивости (10) на w и интегрирования полученного соотношения с учетом указанных краевых условий (11) получим выражение для критической силы потери устойчивости закрепленного в шарнирах стержня

$$P = \frac{J_3}{J_4}. \quad (12)$$

Функционалы J_3 и J_4 задаются формулами

$$J_3 = \int_0^l w_x^2 dx, \quad J_4 = \int_0^l \frac{w^2}{EI} dx. \quad (13)$$

Используя приведенные выражения для величины сжимающей силы, вызывающей потерю упругой устойчивости (12), и величины сжимающей силы (распора), возникающей в результате нагрева (8), приходим к выражению для величины критического нагрева, приводящего к выпучиванию стержня:

$$\Delta T = P \frac{J_2}{J_1} = \frac{J_2 J_3}{J_1 J_4}. \quad (14)$$

Заметим, что для отыскания критической силы потери устойчивости P и соответствующей формы выпучивания стержня $w(x)$ может использоваться как решение краевой задачи (10), (11) с целью определения минимального собственного значения и соответствующей этому значению формы $w(x)$, так и минимизация рэлеевского соотношения (12)

$$P = \min_w \frac{J_3}{J_4} \quad (15)$$

на классе кинематически допустимых перемещений $w(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (11). Второй способ представляет собой реализацию вариационного принципа Рэлея.

2. Минимизация распора

Предположим, что величина ΔT задана и что стержень имеет цилиндрическую форму, то есть $S(x) = S_0$, где S_0 – заданная положительная константа. Рассмотрим следующую задачу минимизации распора P за счет отыскания кусочно-постоянной функции $t(x)$ при ограничениях, накладываемых на массу $M(t)$ материала стержня:

$$P_{\min} = \Delta T \min_t \frac{J_1(t)}{J_2(t)}, \quad (16)$$

$$J_1(t) = \int_0^l \alpha(t(x)) dx, \quad J_2(t) = \frac{1}{S_0} \int_0^l \frac{dx}{E(t(x))}, \quad (17)$$

$$M(t) = S_0 \int_0^l \rho(t(x)) dx \leq M_0, \quad (18)$$

$$t(x) = \{t_i | x_{i-1} < x < x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad x_0 = 0, \quad x_n = l\}, \quad (19)$$

где $M_0 > 0$ – заданная предельно допустимая масса стержня. Задача оптимизации (16)–(19) представляет собой задачу минимизации неаддитивного функционала, определяемого выражениями (16), (17) и рассматриваемого на классе допустимых кусочно-постоянных переменных проектирования (19), удовлетворяющих изопериметрическому неравенству (18) и определяющих структуру неоднородного стержня (количество областей, занимаемых каждым из рассматриваемых материалов, размеры этих областей и свойства материалов). Отметим, что величины t_i в (19) принадлежат заданному дискретному множеству: $t_i \in \{1, 2, \dots, r\}$.

Если ограничение массы (18) не принимается в рассмотрение или если это ограничение не является активным, то оптимальное решение реализуется в случае однородного стержня из материала с минимальным значением произведения модуля Юнга и коэффициента линейного расширения ($\mu = E\alpha$):

$$\mu_1 = (E\alpha)_{\min} = \min_{1 \leq j \leq r} E_j \alpha_j. \quad (20)$$

Чтобы доказать данное утверждение, рассмотрим произвольный неоднородный стержень. Без ограничения общности будем предполагать, что неоднородный стержень состоит из n однородных частей, длины которых равны $(\Delta l)_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, причем

$$\mu_1 = E_1 \alpha_1 < \mu_2 = E_2 \alpha_2 < \dots < \mu_r = E_r \alpha_r. \quad (21)$$

Выполняя далее следующее оценивание:

$$\begin{aligned} P &= \Delta T \frac{J_1}{J_2} = \Delta T S_0 \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \Delta l_i \right) / \sum_{i=1}^n \frac{\Delta l_i}{E_i} = \\ &= \Delta T S_0 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{E_i} \Delta l_i \right) / \sum_{i=1}^n \frac{\Delta l_i}{E_i} \geq \mu_1 \Delta T S_0 = P_1, \end{aligned} \quad (22)$$

устанавливаем требуемое неравенство

$$P(\mu_i) \geq P(\mu_1) = P_1. \quad (23)$$

Для решения задачи оптимизации (16)–(19) в общем случае, то есть с учетом изопериметрического неравенства (18), применим подход (метод штрафных функций), основанный на минимизации расширенного функционала J^a , определяемого формулами:

$$J^a = P + \lambda(M - M_0) = \Delta T \frac{J_1}{J_2} + \lambda(M - M_0), \quad (24)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } M - M_0 \leq 0, \\ \lambda_0 \geq 0, & \text{если } M - M_0 > 0, \end{cases} \quad (25)$$

где λ_0 – положительный штрафной множитель. Решение задачи минимизации функционала J^a из (24)–(25) для различных значений параметра задачи M_0 находится с применением генетического алгоритма [3]. При этом полагается $l = 1$, а интервал $[0, 1]$ изменения переменной x разбивается точками x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, на $n - 1$ равных интервалов длины Δx . На каждом из них величины α , E , ρ могут принимать

постоянные значения, соответствующие выбранному материалу. Номер материала может принимать значения от 1 до 6. Рассматриваемые популяции состоят из N индивидуумов, представляющих собой допустимые проекты кусочно-однородного стержня. Число N в процессе обновления популяций остается неизменным, причем полагается четным. Каждый j -й индивидуум популяции описывается набором величин $t(j, i)$, представляющих собой значения переменной проектирования в узловых точках разбиения. С применением генетического алгоритма разыскивается "наилучший" индивидуум, то есть набор $t(j, i)$, для которого достигается минимум расширенного функционала.

Первый шаг алгоритма состоит в инициализации популяции, которая заключается в присвоении каждому элементу $t(j, i)$ случайного значения из промежутка $[1, \dots, 6]$. Для определенных таким образом индивидуумов ($j = 1, \dots, N$) начальной популяции вычисляются значения расширенного функционала $J^a(j)$ и находится индивидуум с наименьшим значением данного функционала. Использование начальных данных на следующих шагах алгоритма позволяет определить новую популяцию из N индивидуумов и выполнить дальнейшую последовательную минимизацию функционала J^a .

На втором шаге алгоритма осуществляется последовательный отбор $N/2$ пар индивидуумов – "родителей" с целью получения в последующем $N/2$ пар индивидуумов – отпрысков, которые составят новую генерацию. Выбор первого родителя ("a") производится следующим образом. Задается некоторое целое число N^T и затем выбираются случайным образом N^T индивидуумов, из которых сохраняется один, доставляющий наименьшее значение функционалу J^a . Аналогично определяется второй родитель ("b") и составляется первая пара индивидуумов. Всего составляется $N/2$ таких пар.

Третий шаг алгоритма заключается в получении двух потомков от каждой родительской пары индивидуумов. Для этого задается некоторое постоянное число из промежутка $[0, 1]$, которое называется вероятностью скрещивания p_{CO} . Затем для каждой пары родителей генерируется случайное число p_r из промежутка $[0, 1]$ и случайное число m из промежутка $[1, \dots, n]$. Если оказывается, что $p_r \leq p_{CO}$, то для отпрысков значения переменных проектирования в узлах $i = 1, \dots, m$ копируются у своих родителей "a" и "b", а значения этих величин в узлах с номерами $i = m + 1, \dots, n$ скрещиваются". Последнее означает, что для потомка "a" копируются значения в соответствующих узлах родителя "b" и наоборот. Последовательный перебор всех родительских пар и выполнение описанных операций приводит к получению N индивидуумов – потомков, которые составляют новую популяцию.

Четвертый шаг алгоритма заключается в мутации полученной новой популяции. Этот шаг необходим во избежание "застревания" процесса поиска минимума в локальном минимуме рассматриваемого функционала. Для реализации процедуры мутации задается некоторый достаточно малый ($\sim 0,05$) параметр p_m (вероятность мутации). Затем для каждого узла каждого индивидуума популяции генерируется случайное число p_r из промежутка $[0, 1]$, и, если $p_r \leq p_m$, значение переменной проектирования в данном узле заменяется на произвольное значение, удовлетворяющее заданным ограничениям. В узлах с номерами $i = 1$ и $i = n$ процедура мутации для величин $t(j, i)$ не осуществляется. Для найденной новой популяции вычисляются функционалы $J^a(j)$ и выбирается наилучший индивидуум, после чего осуществляется переход ко второму шагу алгоритма. Отметим, что если наилучший

отпрыск из новой популяции оказывается "хуже" наилучшего родителя из предыдущей популяции, то он заменяется этим родителем. Таким образом, достигается монотонность в поиске глобального минимума.

С применением описанного выше генетического алгоритма были определены оптимальные распределения материала $t(x)$. При этом параметры вычислительного процесса полагались равными следующим значениям: $n = 21$, $N = 10$, $N^T = 4$, $p_{CO} = 0,5$, $p_m = 0,05$. Вычисления по применяемому алгоритму завершались после генерации 75000 популяций. Для заданного набора из шести материалов, характеристики которых приведены в табл. 1 [4], результаты проведенных расчетов для следующих значений параметра $W_0 = gM_0 = 7,75; 7,8; 8,0; 8,5; 9,0$ (g – ускорение свободного падения) представлены в табл. 2 и на рис. 1 (варианты a, b, c, d, e соответствуют значениям $W_0 = gM_0 = 12,0; 9,0; 8,5; 8,0; 7,8$).

Таблица 1

№ материала	Материал	Модуль Юнга $E \cdot 10^{-5}$, МПа	Коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6$, град $^{-1}$	Удельный вес $\rho g \cdot 10^{-4}$, Н/м 3	$\mu = E\alpha$
1	Молибден	3,3	5,6	10,2	18,48
2	Сталь 1X17P2	2,0	10,3	7,75	20,6
3	Латунь Л68	1,1	19	8,6	20,9
4	Сталь 30ХГСА	1,98	11,0	7,85	21,78
5	Сталь 2Х13	2,2	10,1	7,75	22,22
6	Сталь 20Х	2,07	11,3	7,74	23,391

Таблица 2

№ п/п	Ограничение по весу $W_0 = M_0 g$	Вес стержня $W = Mg$	Распределение материалов по стержню
1	7,75	7,75	2-й – 20 интервалов
2	7,8	7,75	2-й – 20 интервалов
3	8,0	7,995	1-й – 2 инт., 2-й – 18 инт.
4	8,5	8,485	1-й – 6 инт., 2-й – 14 инт.
5	9,0	8,975	1-й – 10 инт., 2-й – 10 инт.

Из табл. 2 видно, что с увеличением значения параметра W_0 увеличивается число интервалов, занятых молибденом, который характеризуется минимальным значением параметра $\mu = E\alpha = 18,48$. Показанные на рис. 1 найденные распределения материала содержат подобласти, занятые молибденом (окрашены в темный цвет), и подобласти, занятые сталью 1X17Н2 (не окрашены).

Отметим одно важное свойство оптимального распределения материалов вдоль неоднородного стержня, получаемого из решения задачи оптимизации распора (16)–(19). Для этого рассмотрим некоторое допустимое распределение $t = t(x)$ ($0 \leq x \leq l$) материалов из (19):

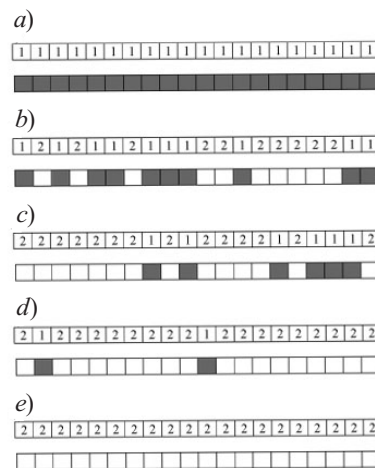


Рис. 1

$$t = t^1(x) = t_i, \quad x \in \Omega_i \subset [0, l], \quad l_i = \text{meas} \Omega_i, \quad \bigcup \Omega_i = [0, l], \quad (26)$$

где Ω_i состоит из подобластей $[x_{k-1}, x_k]$, для которых $t^1 = t_i$, и имеет общую длину l_i . Наряду с распределением (26) рассмотрим другое допустимое распределение материалов $t = t^2(x)$ ($0 \leq x \leq l$) из (19):

$$t = t^2(x) = t_i, \quad x \in \Omega'_i \subset [0, l], \quad l_i = \text{meas} \Omega'_i, \quad \bigcup \Omega'_i = [0, l], \quad (27)$$

где Ω'_i состоит из подобластей $[x_{k-1}, x_k]$, для которых $t(x) = t_i$, и имеет ту же общую длину l_i , что и Ω_i из (26). Нетрудно заметить, что распределения материалов $t = t^1(x)$ и $t = t^2(x)$ характеризуются одинаковыми значениями функционалов J_1 и J_2 , так как

$$J_1(t^1) = J_1(t^2), \quad J_2(t^1) = J_2(t^2),$$

и, следовательно, доставляют одинаковое значение оптимизируемому функционалу P . Данное свойство указывает на неединственность решения задачи (16)–(19). Так, наряду с приведенными на рис. 1 распределениями материалов оптимальными будут и другие распределения материалов, получаемые из приведенных путем изменения расположения подобластей с сохранением общих длин l_i участков, соответствующих каждому из использованных материалов.

3. Оптимизация устойчивости

Рассмотрим теперь задачу оптимизации устойчивости нагретого неоднородного стержня прямолинейной формы из заданного дискретного набора материалов, представленных в табл. 1. Требуется определить переменную проектирования $t = t(x)$, определяющую структуру неоднородного стержня ($S(x) = S_0$, S_0 – заданная константа), из условия максимизации критической температуры потери устойчивости $\Delta T = \tilde{J}$:

$$\tilde{J}_* = (\Delta T)_* = \max_t \left\{ \frac{J_2(E(t)) J_3(w)}{J_1(\alpha(t)) J_4(E(t), w)} \right\} \quad (28)$$

при ограничениях, накладываемых на множество допустимых переменных проектирования (19) и на массу стержня (18). Для нахождения формы потери устойчивости w используем принцип Рэлея (12). Получим

$$\tilde{J}_* = \max_t \left\{ \frac{J_2(E(t))}{J_1(\alpha(t))} \left[\min_w \frac{J_3(w)}{J_4(E(t), w)} \right] \right\}. \quad (29)$$

Для решения задачи оптимизации функционала \tilde{J} с учетом ограничения на массу стержня (18) применим метод штрафов, сводя исходную задачу (29), (18), (19) к задаче максимизации по t расширенного функционала

$$J^a = \left\{ \frac{J_2(E(t))}{J_1(\alpha(t))} \left[\min_w \frac{J_3(w)}{J_4(E(t), w)} \right] \right\} - \lambda(M - M_0), \quad (30)$$

$$\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } M - M_0 \leq 0, \\ \lambda_0 > 0, & \text{если } M - M_0 > 0, \end{cases}$$

с учетом (19).

Численное решение приведенной задачи максимизации расширенного функционала осуществлялось на основе последовательных приближений. На первом шаге сначала с использованием генетического алгоритма выполнялась минимизация по w отношения J_3/J_4 (внутренняя операция в конструкции расширенного функционала (30)) и находилась критическая сила потери устойчивости стержня для некоторого заданного распределения материалов $t = t(x)$ ($0 \leq x \leq l$) по длине стержня. Данное распределение удобно взять из решения рассмотренной выше задачи минимизации распора при соответствующем ограничении на массу стержня. При этом индивидуумы популяции характеризуются набором значений $w(j, i)$, описывающим форму потери устойчивости стержня в узловых точках. Основные параметры генетического алгоритма (N, n, N^T, p_{CO}, p_m) принимали те же значения, что и при решении задачи минимизации распора. Всего генерировалась 1000 популяций. Затем для полученного оптимального распределения $w(j, i)$ осуществлялась оптимизация расширенного функционала с применением генетического алгоритма и определялось оптимальное в первом приближении распределение $t(j, i)$ материалов по длине стержня. При этом также генерировалась 1000 популяций, индивидуумы которых характеризуются набором значений $t(j, i)$. Далее осуществлялся переход ко второму шагу и для найденного распределения материалов $t(j, i)$ определялась критическая сила потери устойчивости и новая форма выпучивания $w(j, i)$ и т.д. Отметим, что на каждом шаге последовательной оптимизации определяемое значение расширенного функционала сравнивалось со значением, вычисленным на предыдущей итерации. Если оказывалось, что произошло не увеличение, а уменьшение значения функционала, то полученное решение исключалось из рассмотрения и осуществлялся возврат к предыдущему шагу. Этот шаг выполнялся заново для новой инициализации задачи с учетом заданных ограничений и граничных условий, что обеспечивало монотонность поиска максимума.

При решении оптимизационной задачи проводились расчеты для различных значений параметра $W_0 = gM_0$ и осуществлялось 100 шагов последовательных приближений. Полученные в результате расчетов оптимальные распределения материалов показаны на рис. 2.

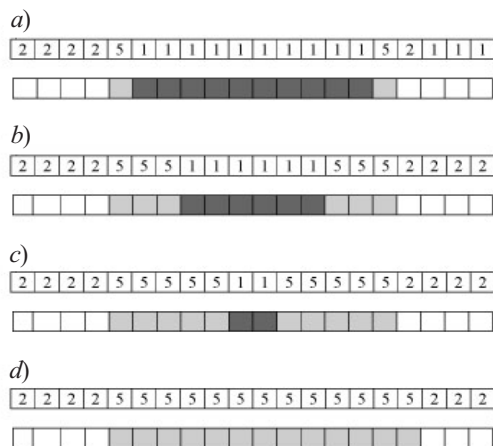


Рис. 2

Варианты распределения материалов a, b, c, d соответствуют значениям параметра задачи $W_0 = gM_0$ равного 9,0; 8,5; 8,0; 7,75. Интервалы разбиения стержня, занятые молибденом (первый материал), выделены темно-серым цветом. В светло-серый цвет окрашены интервалы, занятые сталью 1Х17Н2 (второй материал), неокрашенные интервалы заняты жаропрочной сталью 2Х13 (пятый материал). Из приведенных на рис. 2 распределений видно, что оптимальное расположение материалов симметрично относительно середины стержня, что является следствием одинаковых условий закрепления его концов. С увеличением параметра M_0 , то есть при смягчении ограничения на массу стержня, увеличивается количество интервалов, занятых материалом с наименьшим коэффициентом линейного расширения α (молибден). Из приведенных на рис. 2 распределений также видно, что наиболее эффективным является расположение молибдена в центральной части стержня.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 05-08-18094-а), Программы поддержки ведущих научных школ (проект № 1245.2006.1) и Программы ОЭМПУ № 14 "Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, температурных и радиационных воздействиях".

Литература

1. Тимошенко, С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер.– М.: Наука, 1979.
2. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц.– М.: Наука, 1987. – 584 с.
3. Goldberg, D.E. Genetic Algorithm in Search, Optimization and Machine Learning /D.E. Goldberg.– Westley Publ. Comp., inc., 1989.
4. Писаренко, Г.С. Справочник по сопротивлению материалов / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев.– Киев: Наукова думка, 1988.

[05.02.2007]

NONLOCAL OPTIMIZATION OF THERMOELASTIC ROD MADE FROM DISCRETE SET OF MATERIALS WITH APPLICATION OF GENETIC ALGORITHM

N.V. Banichuk, S.Yu. Ivanova, E.V. Makeev, F. Ragnedda

The problems of optimal design of structures from discrete set of materials are investigated. Specific peculiarity of performed studies consists in the fact that the admissible design variables take the values from the given set of discrete values. Elastic rod built up from different piecewise homogeneous materials is considered as an optimized structural element. It is supposed that the rod is under compression aroused as a consequence of its heating and of clamping conditions. Formulated optimization problems consists in finding of optimal thermoelastic material distribution along the rod, which minimized the reaction force or maximized the critical buckling temperature. Modified genetic algorithm and the results of its application for solution of nonlocal optimization problem are presented.