

УДК 534.1

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-83-93

## ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ КУБИЧЕСКОЙ ВЯЗКОСТИ НА ДИНАМИКУ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ, НАГРУЖЕННОГО СЛЕДЯЩЕЙ СИЛОЙ\*

© 2024 г. Овчинников В.Ф., Капитанов Д.В., Глазова Е.Г.

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный  
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

ovchv-48@mail.ru

*Поступила в редакцию 06.12.2023*

Проведен анализ влияния внешней нелинейной кубической вязкости на поведение консольного стержня, нагруженного сжимающей следящей силой. При описании изгибных деформаций стержня использована модель балки Бернулли – Эйлера. После перехода к безразмерным переменным получена форма записи, в которой коэффициенты уравнения не зависят от коэффициента кубического вязкого трения. Это свидетельствует о независимости критической нагрузки и частотных характеристик системы от уровня нелинейного затухания. С использованием стандартной процедуры метода Бубнова – Галеркина с учетом первых двух форм собственных колебаний задача сведена к анализу нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно обобщенных координат и обобщенных скоростей. Для линейного варианта уравнений при малом затухании получены значения критической нагрузки в зависимости от соотношения коэффициентов демпфирования собственных форм. Выполнен анализ поведения системы с учетом рассмотренной кубической нелинейности с использованием метода нелинейных нормальных форм. Задача сведена к анализу нелинейной динамической системы с одной степенью свободы. Для этого класса задач существуют конструктивные аналитические методы качественного и приближенного количественного исследования. Из анализа зависимости первой ляпуновской величины от параметра нагрузки определено критическое значение сжимающей силы, которое оказалось меньше значения, соответствующего системе без затухания (дестабилизирующее влияние внешнего нелинейного трения). При критическом значении нагрузки в системе происходит бифуркация, в результате которой нулевое положение равновесия становится неустойчивым сложным фокусом первого порядка и рождается предельный цикл. С использованием метода гармонической линеаризации построена зависимость амплитуды автоколебаний от величины нагрузки.

*Ключевые слова:* консольный стержень, следящая сила, внешняя нелинейная кубическая вязкость, критическая сила, метод нелинейных нормальных форм, бифуркация, амплитуда автоколебаний.

---

\* Выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект №FSWR 2023-0036).

## Введение

Консольный стержень, нагруженный осевой следящей силой, является классическим примером конструкции, на базе которой исследована устойчивость упругих систем при наличии неконсервативных нагрузок. Простейшей моделью консольного стержня служит двухзвенный маятник с вязкоупругими шарнирами (маятник Циглера). Установлены две характерные особенности поведения этих систем [1–3]: колебательный характер потери устойчивости типа флаттер при критических значениях силы; дестабилизирующее влияние внутреннего затухания на устойчивость конструкции. Обзор соответствующих публикаций представлен в [1, 4–6]. В последние годы исследования проблемы ведутся в нескольких направлениях. Выполнен теоретический анализ, объясняющий «парадокс дестабилизации» видом бифуркационной диаграммы «зонтик Уитни» в окрестности критического значения нагрузки [4, 5, 7, 8]. Показано, что при учете нелинейных эффектов в исследуемых моделях при достижении нагрузкой критического значения реализуется бифуркация Андронова – Хопфа, в результате которой прямолинейная форма стержня теряет устойчивость и в системе рождается предельный цикл [6, 9, 10]. Для подтверждения результатов теоретических исследований разработаны экспериментальные установки. В [11–14] следящая нагрузка создается реактивной струей на свободном конце стержня. Эти исследования подтверждают факт потери устойчивости, дают оценку критической силы. Использование неголономных связей для создания следящей нагрузки [15, 16] дало возможность изготовить лабораторную установку для экспериментальных исследований влияния демпфирования на величину критической нагрузки, подтвердить факт режима автоколебаний для закритических параметров нагрузки. В [17] установлено, что нелинейная внутренняя вязкость в материале стержня, как и линейная, оказывает дестабилизирующее влияние. В настоящей статье получено значение критической силы при наличии в системе внешней нелинейной вязкости, установлен характер бифуркации, дана оценка амплитуды возникающих автоколебаний.

## 1. Математическая модель

Рассматривается находящийся в среде жидкости или газа однородный упругий стержень постоянного сечения длиной  $l$ , один конец которого жестко заделан, а на второй действует сжимающая следящая сила  $P$ . При поперечных колебаниях на стержень со стороны среды действует сила сопротивления. При малых скоростях движения стержня эта сила прямо пропорциональна скорости, а при больших скоростях – прямо пропорциональна квадрату скорости. В системе координат скорость–сила характеристика силы сопротивления симметрична относительно начала координат и для ее аппроксимации используется кубическая парабола. Простейшее уравнение поперечных колебаний такого стержня имеет вид

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \chi EI \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial t} + P \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c_0 \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^3 = 0. \quad (1)$$

В этом уравнении  $u$  – поперечные смещения точек оси стержня;  $x$  – координата вдоль оси стержня;  $t$  – время;  $EI$  – изгибная жесткость стержня;  $m$  – его погонная масса;  $\chi$  – коэффициент внутренней линейной вязкости;  $c$ ,  $c_0$  – коэффициенты внешней линейной и нелинейной кубической вязкости. Уравнение (1) решается при граничных условиях

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \chi \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial t} = 0 \text{ при } x = l. \quad (2)$$

Линейный вариант уравнения (1) согласуется с моделями из публикаций [1–4]. В [1, 18, 19] отмечено, что без учета демпфирования приближенное решение задачи (1), (2) методом разложения функции перемещений по формам собственных колебаний дает отличие критической силы от точного значения менее 0,5%. Этот факт можно рассматривать в качестве обоснования сложившегося подхода при решении рассматриваемого класса задач, основанного на использовании двухчленного приближения метода Бубнова – Галеркина. Переход к дискретной модели выполнен в следующей последовательности. С использованием замены переменных

$$x = l\varphi, \quad t = t_* T_0, \quad u = U U_0, \quad T_0^2 = \frac{ml^4}{EI}, \quad \chi_* = \frac{\chi}{T_0}, \quad c_* = \frac{cT_0}{m}, \quad U_0^2 = \frac{T_0 m}{c_0}, \quad p = \frac{Pl^2}{EI}$$

уравнение (1) преобразуется к виду, содержащему только три коэффициента  $\chi_*$ ,  $c_*$ ,  $p$ . За счет введения для перемещений стержня нормировки, обратно пропорциональной  $\sqrt{c_0}$ , коэффициенты полученного уравнения становятся независимыми от коэффициента  $c_0$  кубического вязкого трения. Это свидетельствует о влиянии уровня кубического вязкого трения только на амплитудные характеристики рассматриваемых процессов и независимости от него критических нагрузок и частотных характеристик.

Переход к дискретной модели реализован с использованием разложения функции перемещений  $U(\varphi, t_*) = u_1(t_*)U_1(\varphi) + u_2(t_*)U_2(\varphi)$  по нормированным формам собственных колебаний  $U_k(\varphi)$  линейного варианта задачи при  $\chi_* = c_* = p = 0$ . С использованием еще одной замены переменных

$$\begin{aligned} t_* &= T_* \tau, \quad T_* = \lambda_1^{-2}, \\ u_1 &= x_1, \quad u_2 = r x_2, \quad h_k = c_k T_*, \quad c_k = c_* + \chi_* \lambda_k^4, \quad \lambda_1 = 1,875, \quad \lambda_2 = 4,694, \\ e_{ki} &= \int_0^1 U_k \frac{d^2 U_i}{d\varphi^2} d\varphi, \quad k, i = 1, 2, \\ e_{11} &= 0,8579, \quad e_{12} = -11,7385, \quad e_{21} = 1,8731, \quad e_{22} = -13,2890, \\ \omega_0^2 &= \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^4 = 39,2739, \quad e = \sqrt{-e_{12} e_{21}}, \quad \alpha = \frac{e_{11}}{e} = 0,1830, \quad r = \sqrt{-\frac{e_{21}}{e_{12}}} = 0,3995, \\ \beta &= -\frac{e_{22}}{e} = 2,8340, \quad b = e T_*^2 p = 0,3793 p, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\lambda_k$  – корни частотного уравнения изгибных колебаний консольно закрепленного стержня, задача исследования устойчивости сводится к анализу системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно обобщенных координат  $x_1, x_2$  и обобщенных скоростей  $y_1, y_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \quad \dot{y}_1 + 2h_1 y_1 - b x_2 + (1 + \alpha b) x_1 + \Phi_1 = 0, \\ \dot{x}_2 &= y_2, \quad \dot{y}_2 + 2h_2 y_2 + b x_1 + (\omega_0^2 - \beta b) x_2 + \Phi_2 = 0, \\ \Phi_k &= d_{0k} (\dot{x}_1)^3 + 3d_{1k} (\dot{x}_1)^2 \dot{x}_2 + 3d_{2k} \dot{x}_1 (\dot{x}_2)^2 + d_{3k} (\dot{x}_2)^3, \\ d_{ik} &= \lambda_1^2 r^{i+1-k} r_{ik}, \quad r_{ik} = \int_0^1 U_1^{3-i} U_2^i U_k d\varphi, \quad i = \overline{0, 3}, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

$$d_{01} = 8,2569, \quad d_{11} = -1,4119, \quad d_{21} = 0,7208, \quad d_{31} = -0,0588,$$

$$d_{02} = -8,8484, \quad d_{12} = 4,5169, \quad d_{22} = -0,3685, \quad d_{32} = 0,9991.$$

Точками над величинами обозначены производные по безразмерному времени  $\tau$ .

Система уравнений (4) зависит от трех параметров  $h_1, h_2, b$ . Все остальные коэффициенты принимают конкретные численные значения. Параметры  $h_1, h_2$  учитывают внешнее и внутреннее линейное вязкое трение. Параметр  $b$  характеризует величину осевой силы и связан с общепринятым безразмерным параметром нагрузки  $p$  [1–4] последним соотношением в (3).

## 2. Критическая сила и критическая частота для линейной задачи

По аналогии с [1] для линейного варианта системы (4) получена зависимость критической силы от соотношений коэффициентов демпфирования  $h_2 = \eta h_1$  при малом затухании ( $h_1 \rightarrow 0$ ). Значение критической силы соответствует переходу корня  $\lambda = h_1 s + j\omega$  характеристического уравнения системы в правую полуплоскость [1]. Условие  $s = 0$  дает возможность определить зависимость критического значения параметра  $b$  и критической частоты от соотношений коэффициентов демпфирования

$$b = \frac{\sqrt{\eta}(\omega_0^2 - 1)}{1 + \eta + \sqrt{\eta}(\alpha + \beta)}, \quad \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2 - \beta b + \eta(1 + \alpha b)}{1 + \eta}. \quad (5)$$

Максимум функции  $b(\eta)$  реализуется при  $\eta = 1$ . Второй, устойчивый корень характеристического уравнения определяется параметрами

$$s_2 = -(1 + \eta), \quad \omega_2^2 = \frac{1 + \eta\omega_0^2 + (\alpha - \eta\beta)b}{1 + \eta}.$$

Из выражения для  $s_2$  следует, что вблизи критических значений параметра  $b$  процессы, связанные с частотой  $\omega_2$ , затухают, и поведение системы будет определяться активной формой [20, 21], соответствующей частоте  $\omega_1$ . Из рассмотрения разности частот

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{(\eta - 1)(\omega_0^2 - 1)}{1 + \eta + \sqrt{\eta}(\alpha + \beta)}$$

следует, что при  $\eta > 1$  активной форме соответствует меньшая из двух частот характеристического уравнения, а при  $\eta < 1$  – большая. Из (5) с учетом (3) получено, что при наличии в системе только внешнего трения  $\eta = 1, p_0 = 20,113$ , а при наличии только внутреннего трения  $\eta = \omega_0^2, p_1 = 10,685$ . Эти параметры хорошо согласуются с известными значениями [1–4]. Вариант  $\eta = 1$  также соответствует критической силе  $p_0$  для конструкции без линейного затухания. Если внешнее нелинейное затухание трактовать как линейное затухание с эффективным коэффициентом затухания, зависящим от амплитуды колебаний, то, вероятнее всего, при ненулевой амплитуде колебаний эффективные коэффициенты затухания для первой и второй форм будут различными. А это означает, что для этого вида внешнего затухания неустойчивость может быть реализована при нагрузках, меньших  $p_0$ .

## 3. Критическая сила для случая кубического внешнего затухания

Рассматривается система уравнений (4) при наличии только нелинейного внешнего затухания ( $h_1 = h_2 = 0$ ). Исследование проведено с использованием метода не-

линейных нормальных форм [20, 21]. При таком подходе исходная задача сводится к анализу нелинейной динамической системы с одной степенью свободы. Для этого класса задач разработаны аналитические методы качественного и приближенного количественного исследования [22–24].

При  $p < p_0$  для решения линейной задачи (4), порождающего активную форму, можно записать соотношения:

$$\begin{aligned} x_2 = \rho x_1, \quad y_2 = \rho y_1, \quad \rho = \frac{1 + \alpha b - \omega^2}{b}, \\ \omega^2 = \frac{1}{2}[\omega_0^2 + 1 + (\alpha - \beta)b] - \frac{\Theta}{2}\sqrt{[\omega_0^2 - 1 - (\alpha + \beta)b]^2 - 4b^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Параметр  $\Theta$  может принимать значения  $+1$  или  $-1$  в зависимости от соотношения нелинейных функций, характеризующих затухание в (4):

$$\begin{aligned} \Phi_1 = 2y_1\hat{h}_1, \quad \Phi_2 = 2y_2\hat{h}_2, \quad a_k = d_{0k} + 3d_{1k}\rho + 3d_{2k}\rho^2 + d_{3k}\rho^3, \quad k = 1, 2, \\ \hat{h}_1 = a_1y_1^2, \quad \hat{h}_2 = \frac{a_2y_1^2}{\rho}, \quad \hat{\eta} = \frac{\hat{h}_2}{\hat{h}_1} = \frac{a_2}{\rho a_1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр  $\hat{\eta}$  является аналогом параметра  $\eta$  для линейной системы с малым затуханием. Численный анализ зависимости  $\hat{\eta}(p)$  с учетом (4), (6), (7) показал, что в диапазоне  $0 < p < p_0$  для  $\Theta = \pm 1$  функция  $\hat{\eta}(p) > 1,67$  и, следовательно, неустойчивой форме соответствует меньшая из двух частот. Таким образом, для активной формы следует использовать зависимости (6) при  $\Theta = 1$ .

Следуя [20], нелинейную нормальную форму ищем в виде

$$x_1 = z, \quad y_1 = v, \quad x_2 = \rho z + F_1(z, v), \quad y_2 = \rho v + F_2(z, v), \quad (8)$$

где  $F_1, F_2$  – неизвестные нелинейные функции своих аргументов.

После подстановки (8) в первые два уравнения системы (4) получены уравнения для нормальной формы:

$$\dot{z} = v, \quad \dot{v} + \omega^2 z - bF_1(z, v) + \Phi_1(z, v) = 0. \quad (9)$$

После подстановки (8) во вторые два уравнения системы (4) с учетом (9) получены уравнения для определения искоемых нелинейных функций:

$$\frac{dF_1}{dt} = F_2, \quad \frac{dF_2}{dt} + HF_1 - \rho\Phi_1 + \Phi_2 = 0, \quad H = \omega_0^2 + (\rho - \beta)b. \quad (10)$$

При  $p < p_0$  в линейном приближении нулевое положение равновесия ( $z = v = 0$ ) уравнений (9) является особой точкой типа центр, поэтому при решении вопроса о его устойчивости рассмотрены системы (9), (10) с учетом нелинейных слагаемых. Выписанные с точностью до кубических слагаемых функции  $\Phi_k$  (4) и функция  $F_1$  приобретают вид

$$\Phi_k = a_k v^3, \quad k = 1, 2, \quad F_1 = c_0 z^3 + c_1 z^2 v + c_2 z v^2 + c_3 v^3. \quad (11)$$

С учетом этих выражений для уравнений движения (9) справедлива запись

$$\dot{z} = v, \quad \dot{v} = -\omega^2 z + bc_0 z^3 + bc_1 z^2 v + bc_2 z v^2 + (bc_3 - a_1)v^3. \quad (12)$$

Уравнения (10) с учетом (9), (11) с точностью до кубических слагаемых преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} v^2 - 2\omega^2 \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial v} zv + \omega^4 \frac{\partial^2 F_1}{\partial v^2} z^2 - \omega^2 \frac{\partial F_1}{\partial z} z - \omega^2 \frac{\partial F_1}{\partial v} v + \\ + HF_1 + (a_2 - \rho a_1)v^3 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

После подстановки (11) в уравнение (13), приравнивания коэффициентов перед однотипными слагаемыми и решения полученной системы линейных уравнений определены коэффициенты  $c_1, c_3$ :

$$c_1 = 6\omega^4 D, \quad c_3 = (7\omega^2 - H)D, \quad D = \frac{\rho a_1 - a_2}{10\omega^2 H - H^2 - 9\omega^4}. \quad (14)$$

Устойчивость нулевого положения равновесия системы (12) определяется первой ляпуновской величиной, для которой в соответствии с [23, 24] получено выражение

$$L_1 = \frac{\pi}{4\omega} [bc_1 + 3\omega^2(bc_3 - a_1)]. \quad (15)$$

Численный анализ показал, что функция  $L_1(p)$ , задаваемая выражением (15), имеет корень  $p = p_* \approx 19,380$ . При  $p < p_*$  функция  $L_1(p) < 0$  и нулевое положение равновесия уравнений (9) является устойчивым сложным фокусом первого порядка [23], а при  $p_* < p < p_0$  функция  $L_1(p) > 0$  и нулевое положение равновесия является неустойчивым фокусом. Полученное значение критической силы  $p_*$  меньше значения  $p_0$ , соответствующего системе без диссипации, что свидетельствует о дестабилизирующем влиянии нелинейного внешнего затухания.

#### 4. Автоколебания

Факт рождения предельного цикла при бифуркационном значении параметра  $p = p_*$  может быть установлен в результате рассмотрения второй ляпуновской величины [23], для вычисления которой требуется учет в уравнениях движения (10)–(13) нелинейных слагаемых до пятого порядка включительно. Это является достаточно трудоемкой процедурой, в связи с чем для установления факта существования предельного цикла и для оценки его параметров (амплитуды  $a$  и частоты  $\Omega$ ) использован метод гармонической линеаризации [24]. В этом случае определяющие движение системы функции имеют вид:

$$\begin{aligned} z = a \cos \varphi, \quad v = -a\Omega \sin \varphi, \quad \varphi = \Omega\tau, \\ \Phi_k = \Omega^3 [A_k \cos \varphi + B_k \sin \varphi], \quad k = 1, 2, \\ F_1 = C_1 \cos \varphi + C_2 \sin \varphi, \quad F_2 = \Omega [D_1 \cos \varphi + D_2 \sin \varphi]. \end{aligned} \quad (16)$$

Из первого уравнения системы (10) следует:  $D_1 = C_2, D_2 = -C_1$ . С учетом этой связи, а также соотношений (4), (8) для функций  $A_k(a, \Omega), B_k(a, \Omega)$  справедливы выражения:

$$\begin{aligned} A_k = \frac{3}{4} [d_{1k} a^2 \hat{D}_1 - 2d_{2k} a \hat{D}_1 \hat{D}_2 + d_{3k} \hat{D}_2 (\hat{D}_1^2 + \hat{D}_2^2)], \quad k = 1, 2, \\ B_k = \frac{3}{4} [-d_{0k} a^3 + 3d_{1k} a^2 \hat{D}_2 - d_{2k} a (\hat{D}_1^2 + 3\hat{D}_2^2) + d_{3k} \hat{D}_1 (\hat{D}_1^2 + \hat{D}_2^2)], \\ \hat{D}_1 = D_1, \quad \hat{D}_2 = D_2 - \rho. \end{aligned} \quad (17)$$

В результате подстановки (16) в (10) получены два уравнения

$$(H - \Omega^2)C_1 + \Omega^3(A_2 - \rho A_1) = 0, \quad (H - \Omega^2)C_2 + \Omega^3(B_2 - \rho B_1) = 0. \quad (18)$$

После подстановки (16) в (9) определены еще две связи

$$-bC_2 + \Omega^3 B_1 = 0, \quad (\omega^2 - \Omega^2)a - bC_1 + \Omega^3 A_1 = 0. \quad (19)$$

Таким образом, для определения четырех неизвестных  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\Omega$ ,  $a$  с учетом связей (17) получена система четырех нелинейных алгебраических уравнений (18), (19). В результате численного решения этой системы уравнений определена представленная на рис. 1 зависимость (сплошная линия) амплитуды предельного цикла от величины приложенной нагрузки в интервале  $p_* < p < p_0$ .

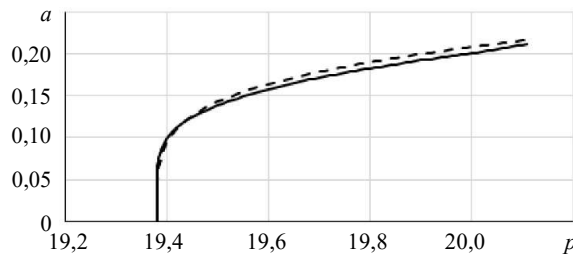


Рис. 1. Зависимость амплитуды предельного цикла от приложенной нагрузки

На этом же рисунке показана соответствующая зависимость (штриховая кривая), полученная в результате численного интегрирования системы уравнений (4) и установления режима автоколебаний.

### Заключение

При отсутствии линейных механизмов потери энергии проведен анализ влияния нелинейного кубического внешнего вязкого трения на динамику консольного стержня, нагруженного следящей осевой силой на свободном конце. Установлено, что в этом случае критическая сила меньше значения, соответствующего конструкции без потерь. Полученное значение критической силы не зависит от уровня потерь энергии, что согласуется с результатами из [17], где исследовано влияние нелинейной внутренней вязкости. При критическом значении нагрузки происходит бифуркация, в результате которой нулевое положение равновесия становится неустойчивым сложным фокусом первого порядка и рождается предельный цикл. Квадрат амплитуды установившихся автоколебаний пропорционален уровню затухания (коэффициенту кубического вязкого трения). Использованная процедура сведения исходной задачи к анализу нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка может быть применена при исследовании широкого класса неконсервативных задач теории упругой устойчивости с нелинейными упругими и диссипативными характеристиками.

### Список литературы

1. Болотин В.В. *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*. М.: Физматлит, 1961. 340 с.
2. Жинжер Н.И. О дестабилизирующем влиянии трения на устойчивость неконсервативных упругих систем. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1968. №3. С. 44–47.
3. Денисов Г.Г., Новиков В.В. Об устойчивости стержня, нагруженного «следящей» силой. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1975. №1. С. 150–153.

4. Кириллов О.Н., Сейранян А.П. Влияние малого внутреннего и внешнего трения на устойчивость распределенных неконсервативных систем. *ПММ*. 2005. Т. 69. №4. С. 584–611.
5. Kirillov O.N., Verhulst F. Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2010. Bd. 90. Ausgabe 6. S. 462–488. <https://doi.org/10.1002/zamm.200900315>.
6. D'Annibale F., Ferretti M. On the effects of linear damping on the nonlinear Ziegler's column. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 103. P. 3149–3164. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05797-y>.
7. Mascolo I. Recent developments in the dynamic stability of elastic structures. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. 2019. Vol. 5. <https://doi.org/10.3389/fams.2019.00051>.
8. Kirillov O.N. Classical results and modern approaches to nonconservative stability. In: *CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures*. 2018. Vol. 586. P. 129–190. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-93722-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-93722-9_4).
9. Luongo A., Ferretti M., D'Annibale F. Paradoxes in dynamic stability of mechanical systems: investigating the causes and detecting the nonlinear behaviors. *SpringerPlus*. 2016. Vol. 5. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1186/s40064-016-1684-9>.
10. Luongo A., D'Annibale F., Ferretti M. Hard loss of stability of Ziegler's column with nonlinear damping. In: *Meccanica*. 2016. Vol. 51. P. 2647–2663. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0471-6>.
11. Sugiyama Y., Langthjem M.A., Katayama K. Dynamic stability of columns under non-conservative forces: Theory and experiment. In: *Solid Mechanics and its Applications*. 2019. Vol. 255. P. 1–12. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-00572-6>.
12. Praveen J.P., Mahaboob B., Rao B.N., Rajaiah M., Harnath Y., Narayana C. On the simulation of beck column through a simple xiong-wang-tabarrok experimental model of centripetally loaded column. *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*. 2020. Vol. 8. Iss. 9. P. 5100–5103. <https://doi.org/10.30534/ijeter/2020/35892020>.
13. Mutyalarao M., Bharathi D., Narayana K.L., Rao B.N. How valid are Sugiyama's experiments on follower forces? *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 122–125. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.007>.
14. Praveen J.P., Rao B.N. Reinvestigation on assessing the stability of mullagulov tested steel rods under follower forces. *Pertanika Journal of Science and Technology*. 2022. Vol. 30. Iss. 1. P. 801–811. <https://doi.org/10.47836/pjst.30.1.44>.
15. Cazzolli A., Dal Corso F., Bigoni D. Flutter instability and Ziegler destabilization paradox for elastic rods subject to non-holonomic constraints. *Journal of Applied Mechanics*. 2021. Vol. 88. Iss. 3. Article No 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4047132>.
16. Bigoni D., Kirillov O.N., Misseroni D., Noselli G., Tommasini M. Flutter and divergence instability in the Pflüger column: Experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2018. Vol. 116. P. 99–116. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.03.024.
17. Агафонов С.А., Георгиевский Д.В. Зависимость скачка критической следящей силы для вязкоупругого стержня от вида нелинейной внутренней вязкости. *Прикладная математика и механика*. 2011. Т. 75. №3. С. 519–527.
18. Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Численно-аналитическое исследование устойчивости консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце. *Проблемы прочности и пластичности*. 2007. Вып. 69. С. 177–184. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2007-69-1-177-184>.
19. Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Неконсервативная устойчивость трубопровода и консольного стержня. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2010. №2. С. 117–123.
20. Аврамов К.В., Михлин Ю.В. *Нелинейная динамика упругих систем. Т.1. Модели, методы, явления*. М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. 704 с.
21. Vizzaccaro A., Salles L., Touzé C. Comparison of nonlinear mappings for reduced-order modelling of vibrating structures: normal form theory and quadratic manifold method with modal derivatives. *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 103. P. 3335–3370. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05813-1>.



22. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. М.: Физматгиз, 1959. 916 с.
23. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. М.: Наука, 1976. 496 с.
24. Горяченко В.Д. *Элементы теории колебаний*. М.: Высшая школа, 2001. 395 с.

#### References

11. Bolotin V.V. *Nekonservativnye zadachi teorii uprugoy ustoychivosti [Non-Conservative Problems of the Elastic Stability Theory]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 1961. 340 p. (In Russian).
2. Zhinzher N.I. O destabiliziruyushchem vliyaniy treniya na ustoychivost nekonservativnykh uprugikh system [On the destabilizing effect of friction on the stability of nonconservative elastic systems]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1968. No 3. P. 44–47 (In Russian).
3. Denisov G.G., Novikov V.V. Ob ustoychivosti sterzhnya, nagruzhennogo “sledyashchey” siloy [On the stability of a rod loaded with a “tracking” force]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1975. No 1. P. 150–153 (In Russian).
4. Kirillov O.N., Seyranian A.O. The effect of small internal and external damping on the stability of distributed non-conservative systems. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2005. Vol. 69. No 4. P. 529–552. <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2005.07.004>.
5. Kirillov O.N., Verhulst F. Paradoxes of dissipation-induced destabilization or who opened Whitney's umbrella? *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*. 2010. Bd. 90. Ausgabe 6. S. 462–488. <https://doi.org/10.1002/zamm.200900315>.
6. D'Annibale F., Ferretti M. On the effects of linear damping on the nonlinear Ziegler's column. *Nonlinear Dyn.* 2021. Vol. 103. P. 3149–3164. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05797-y>.
7. Mascolo I. Recent developments in the dynamic stability of elastic structures. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. 2019. Vol. 5. <https://doi.org/10.3389/fams.2019.00051>.
8. Kirillov O.N. Classical results and modern approaches to nonconservative stability. In: *CISM International Centre for Mechanical Sciences. Courses and Lectures*. 2018. Vol. 586. P. 129–190. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-93722-9\\_4](https://doi.org/10.1007/978-3-319-93722-9_4).
9. Luongo A., Ferretti M., D'Annibale F. Paradoxes in dynamic stability of mechanical systems: investigating the causes and detecting the nonlinear behaviors. *SpringerPlus*. 2016. Vol. 5. Iss. 1. P. 1–22. <https://doi.org/10.1186/s40064-016-1684-9>.
10. Luongo A., D'Annibale F., Ferretti M. Hard loss of stability of Ziegler's column with nonlinear damping. In: *Meccanica*. 2016. Vol. 51. P. 2647–2663. <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0471-6>.
11. Sugiyama Y., Langthjem M.A., Katayama K. Dynamic stability of columns under nonconservative forces: Theory and experiment. In: *Solid Mechanics and its Applications*. 2019. Vol. 255. P. 1–12. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-00572-6>.
12. Praveen J.P., Mahaboob B., Rao B.N., Rajaiah M., Harnath Y., Narayana C. On the simulation of beck column through a simple xiong-wang-tabarrok experimental model of centripetally loaded column. *International Journal of Emerging Trends in Engineering Research*. 2020. Vol. 8. Iss. 9. P. 5100–5103. <https://doi.org/10.30534/ijeter/2020/35892020>.
13. Mutyalarao M., Bharathi D., Narayana K.L., Rao B.N. How valid are Sugiyama's experiments on follower forces? *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 93. P. 122–125. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.12.007>.
14. Praveen J.P., Rao B.N. Reinvestigation on assessing the stability of mullagulov tested steel rods under follower forces. *Pertanika Journal of Science and Technology*. 2022. Vol. 30. Iss. 1. P. 801–811. <https://doi.org/10.47836/pjst.30.1.44>.
15. Cazzolli A., Dal Corso F., Bigoni D. Flutter instability and Ziegler destabilization paradox for elastic rods subject to non-holonomic constraints. *J. Appl. Mech.* 2021. Vol. 88. Iss. 3. Article No 031003. <https://doi.org/10.1115/1.4047132>.
16. Bigoni D., Kirillov O.N., Misseroni D., Noselli G., Tommasini M. Flutter and divergence instability in the Pflüger column: Experimental evidence of the Ziegler destabilization paradox. *J. Mech. Phys. Solids*. 2018. Vol. 116. P. 99–116. DOI: 10.1016/j.jmps.2018.03.024.
17. Agafonov S.A., Georgiyevskii D.V. The dependence of the jump in the critical follower

force for a viscoelastic bar on the form of the non-linear internal viscosity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011. Vol. 75. No 3. P. 367–373. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2011.07.016

18. Kapitanov D.V., Ovchinnikov V.F., Smirnov L.V. Chislenno-analiticheskoe issledovanie ustoychivosti konsolno zakreplennogo sterzhnya so sledyashchey siloy na svobodnom kontse [Numerical-analytical stability investigation of beam with servo force fixed as cantilever at free end]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2007. No 69. P. 177–184 (In Russian).

19. Kapitanov D.V., Ovchinnikov V.F., Smirnov L.V. Nonconservative stability of a pipeline and cantilever rod. *J. Mach. Manuf. Reliab.* 2010. Vol. 39. No 2. P. 197–202.

20. Avramov K.V., Mikhlin Yu.V. *Nelineynaya dinamika uprugikh sistem. T.1. Modeli, metody, yavleniya [Nonlinear Dynamics of Elastic Systems. T.1. Models, Methods, Phenomena]*. Moscow. Izhevsk. NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika” Publ. Institut kompyuternykh issledovaniy. 2010. 704 p. (In Russian).

21. Vizzaccaro A., Salles L., Touzé C. Comparison of nonlinear mappings for reduced-order modelling of vibrating structures: normal form theory and quadratic manifold method with modal derivatives. *Nonlinear Dyn.* 2021. Vol. 103. P. 3335–3370. <https://doi.org/10.1007/s11071-020-05813-1>.

22. Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E. *Teoriya kolebaniy [Theory of Oscillations]*. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1959. 916 p. (In Russian).

23. Bautin N.N., Leontovich E.A. *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and Techniques of Qualitative Research of Dynamical Systems on a Plane]*. Moscow. Nauka Publ. 1976. 496 p. (In Russian).

24. Goryachenko V.D. *Elementy teorii kolebaniy [Elements of the Theory of Oscillations]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 2001. 395 p. (In Russian).

## INFLUENCE OF EXTERNAL CUBIC VISCOSITY ON THE DYNAMICS OF A CANTILEVER ROD LOADED WITH A TRACKING FORCE\*

**Ovchinnikov V.F., Kapitanov D.V., Glazova E.G.**

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,  
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

ovchv-48@mail.ru

*Received by the Editor 2023/12/06*

The analysis of the influence of external nonlinear cubic viscosity on the behavior of a cantilever rod loaded with a compressive tracking force is performed. The Bernoulli – Euler beam model is used for the describing of the rod bending deformations. After the transition to dimensionless variables, we obtained the form of notation in which the coefficients of the equation do not depend on the coefficient of cubic viscous friction. This indicates the independence of the critical load and system frequency characteristics from the level of nonlinear attenuation. Using the standard procedure of the Bubnov – Galerkin method, taking into account the first two forms of eigen oscillations, the problem is reduced to the analysis of a fourth order nonlinear system of ordinary differential equations with respect to generalized coordinates and generalized velocities. For the linear version of the equations with low attenuation, the values of the critical load are obtained in dependence on the ratio of the damping coefficients of the eigenforms. The behavior of the system is analyzed taking into account the considered cubic nonlinearity using the method of nonlinear normal forms. The problem is reduced to the analysis of a nonlinear dynamical system with one degree of freedom. There are constructive analytical methods of qualitative and approximate

---

\*This research was supported by financial support from the State assignment Ministry of Education and Science of Russia (project No FSWR-2023-0036).

quantitative research for this class of problems. The critical value of the compressive force was determined by the analysis of the dependence of the first Lyapunov magnitude on the load parameter. It turned out to be less than the value corresponding to the system without damping (the destabilizing effect of external nonlinear friction). A bifurcation occurs in the system at the critical load value. Therefore, the zero equilibrium becomes an unstable complex focus of the first order and a limit cycle is born. The function of the self-oscillations amplitude of the load magnitude is constructed using the harmonic linearization method.

*Keywords:* cantilever rod, tracking force, external nonlinear cubic viscosity, critical force, method of nonlinear normal forms, bifurcation, amplitude of self-oscillations.