

УДК 534.1

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-60-70

К ТЕОРИИ ФРИКЦИОННЫХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА*

© 2024 г.

Игумнов Л.А.¹, Метрикин В.С.¹,
Стародубровская Н.С.²

¹Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

²Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация

v.s.metrikin@mail.ru

Поступила в редакцию 18.10.2023

Исследована нелинейная динамика фрикционных вибрационных систем, математические модели которых учитывают существенно нелинейную функцию, описывающую работу сил трения с памятью. Рассматриваемая проблема объединяет известную проблему Пенлеве и проблему действия сил наследственного трения. В обоих случаях реальные упругие тела и податливые связи представлены соответственно идеальными абсолютно твердыми и жесткими. С использованием известной экспериментально доказанной гипотезы А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского о наследственной зависимости коэффициента трения относительного покоя при небольших скоростях движения тел исследуемая динамическая система преобразуется из автономной в неавтономную, в которой появляются новые, ранее не наблюдавшиеся при исследовании вибрационных систем типы движений. В частности, при учете парадокса Пенлеве появляется возможность возникновения неустойчивости и автоколебаний, а при учете наследственности коэффициента трения – хаотических движений тел. Разработана численно-аналитическая методика исследования поведения динамических характеристик фрикционных вибрационных систем в зависимости от выбранной модели коэффициента трения относительного покоя. Представленные в статье новые бифуркационные диаграммы по основным параметрам демонстрируют наличие сколь угодно сложных периодических режимов движения тела, включая хаотические. Установлено, что переход к хаотическим режимам движения осуществляется по известному сценарию удвоения периода. Приводятся аналитические соотношения для точечных отображений поверхностей Пуанкаре, позволивших получить функции последования, иллюстрирующие сколь угодно сложные режимы движения тела, включая хаотические. Отмечается, что подобных движений тела при исследовании таких вибрационных систем обнаружено не было.

Ключевые слова: моделирование, фрикционные системы, коэффициент трения относительного покоя, парадокс Пенлеве, трение с памятью, точечное отображение, автоколебания, устойчивость, хаос.

* Выполнено при поддержке РНФ (проект №22-19-00138).

Введение

В том, что трение вызывает неустойчивость и автоколебания [1–6], есть что-то парадоксальное: бытует мнение, что трение тормозит и прекращает движение. Но оказывается, что это не всегда так, и парадокс объясняется тем, что трение выступает в роли распределителя энергии некоторого другого, не связанного с трением источника энергии. Само же по себе оно действительно может только тормозить движение. Понятно, что самовозбуждающиеся автоколебания нежелательны для многих конструкций, таких как буровые установки, тормозные устройства, подшипники скольжения, механизмы фрикционного сцепления и многие другие.

Схематическая упрощенная модель, с которой впервые начал исследования систем с парадоксальной ролью сухого трения Б. Ван-дер-Поль [1], состояла из тела, которое через пружину тянут с постоянной скоростью по горизонтальной шероховатой плоскости. Массивное тело при этом медленно движется под влиянием силы растягиваемой пружины. Эту модель также можно представить в виде движущейся с постоянной скоростью шероховатой ленты, а конец пружины, прикрепленный к телу, неподвижен. Будем рассматривать в дальнейшем последний вариант этой модели. В несколько другом конкретном физическом виде модель представляется так называемым маятником Фроуда, который является обычным маятником, насаженным с помощью муфты на вращающуюся с постоянной скоростью ось. Ось вращается в муфте с некоторым не очень большим трением, чтобы маятник мог качаться на ней, но не вращаться вместе с нею. Реальными прототипами описанной схематической модели могут служить тормозные колодки автомобиля, трамвая, железнодорожного вагона, а также других разнообразных механических тормозных устройств. Впоследствии многие варианты этой модели были рассмотрены в публикациях [7–18] и приведенной в них литературе. В исследованиях предполагалось, что сила сухого трения не зависит от относительной скорости трущихся поверхностей, действие ее направлено против скорости и по величине пропорционально нормальному давлению. А когда тело движется вместе с лентой, как бы скрепленное с ней, сила трения покоя может быть любой в определенных пределах.

1. Постановка рассматриваемой проблемы. Предварительные сведения

В настоящей статье на примере ряда физических моделей наглядно иллюстрируется влияние коэффициента трения относительного покоя на нелинейную динамику фрикционных систем. Экспериментально известно [2], что коэффициент трения относительного покоя не является постоянной величиной, а обладает наследственностью от интервалов времени относительного покоя взаимодействующих тел. Соответствующую математическую модель в безразмерных времени $\tau = \omega t$, координате $\xi = kx/(f_*P)$ и $\varepsilon(\tau) = (f(\tau) - f_*)/f_*$, характеризующем функциональную зависимость коэффициента трения относительного покоя (КТОП), можно записать в виде [19]

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -\xi - \operatorname{sgn}(\dot{\xi} - \theta) + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta), \quad \dot{\xi} \neq \theta, \\ |\dot{\xi}| &\leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = \theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь P – сила давления на движущееся тело; f_* , $\tilde{\alpha}_1$ – коэффициенты трения скольжения; x – относительная координата тела; k – коэффициент жесткости пружины; $\omega^2 = k/m$, $\theta = V\sqrt{mk}/(f_*P)$ – безразмерная скорость ленты; m – масса тела; V – ско-

рость ленты; $f(\tau)$ – кусочно-непрерывная неубывающая функция, τ_k – интервал времени k -го относительного покоя тела с лентой.

Из структуры системы (1) следует, что трехмерное фазовое пространство $F(\xi, \dot{\xi}, \tau)$ плоскостью $\dot{\xi} = \theta$ делится на три подпространства:

$$F_+(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau), \quad F_-(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau), \quad F_0(\xi, \dot{\xi} = \theta, \tau).$$

В подпространствах $F_+(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$, $F_-(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$ движение фазовых точек подчиняется, согласно (1), уравнениям $\ddot{\xi} = -\xi \mp 1 + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta)$, $\dot{\xi} \neq \theta$, каждое из которых является гармоническим осциллятором со своим состоянием равновесия соответственно в точке $\xi = 1 - \tilde{\alpha}_1\theta$, $\dot{\xi} = 0$ или в точке $\xi = -1 - \tilde{\alpha}_1\theta$, $\dot{\xi} = 0$. Движения тела в них соответствуют мгновенным остановкам относительно ленты, вызванным сменой направления проскальзывания, совершаемого со скоростью $\dot{\xi} - \theta$. В подпространстве $F_0(\xi, \dot{\xi} = \theta, \tau)$ проскальзывания нет, тело движется вместе с лентой со скоростью θ из-за того, что сила пружины не превосходит величины силы трения покоя. В фазовом пространстве это соответствует наличию отрезка скользящих движений $L(|\xi| \leq 1, \dot{\xi} = \theta)$ (отрезок стыка фазовых траекторий) [19, 20]. Состояние равновесия $\xi = 1 - \tilde{\alpha}_1\theta$, $\dot{\xi} = 0$ – устойчивое типа центра. Возле него возможно бесконечное множество гармонических колебаний до некоторой предельной амплитуды. Эти гармонические колебания не затухают, несмотря на наличие трения. Трение как бы исчезает. Все остальные движения после нескольких колебаний с уменьшающимся размахом приводят к временному движению тела вместе с движущейся лентой. Изображающая точка движется согласно второму уравнению системы (1). Поэтому очевидно, что исследование нелинейной динамики можно проводить с помощью точечного отображения [19–21] последующих интервалов времени относительного покоя тела и ленты. Эту зависимость (функцию последования), согласно (1), можно представить в виде $\psi(\tau_{k+1}) = \varphi(\tau_k)$, где

$$\psi(\tau) = \theta(\tau) - \varepsilon(\tau), \tag{2}$$

$$\varphi(\tau) = 1 - (-1)^j [\varepsilon(\tau) - 2j + 1], \quad 2(j-1) < \varepsilon(\tau) < 2j, \quad j = 1, 2, \dots$$

На рис. 1 представлена функция последования $\tau_{k+1} = f(\tau_k)$ и лесенка Ламерея при $\varepsilon^* = (f^* - f_*)/f_* = 6$, где f^* – максимальное значение коэффициента трения относительного покоя. Неподвижная точка (точка пересечения биссектрисы и функции последования) неустойчивая.

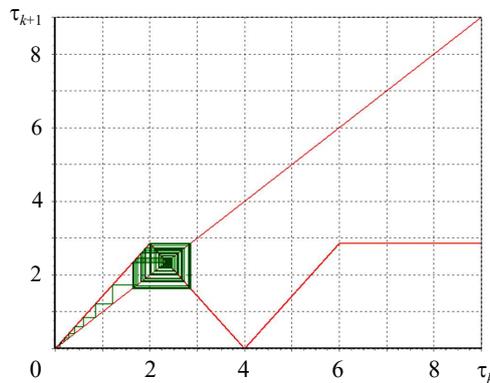


Рис. 1. Вид функции последования при $\theta = 1,7$, $\varepsilon^* = 6$

Из этого рисунка также следует, что в пространстве параметров системы эта точка принадлежит области хаотических движений тела [21].

На рис. 2 представлены бифуркационные диаграммы [19–21] по параметру ε^* для безразмерных скоростей ленты $\theta = 1,7$ (рис. 2а) и $\theta = 1,2$ (рис. 2б) и по параметру θ (рис. 2в) для $\varepsilon^* = 3$. На осях ординат на всех рисунках отложены последовательные значения интервалов времени относительного покоя тела и ленты τ_k , $k = 1, 2, 3 \dots$

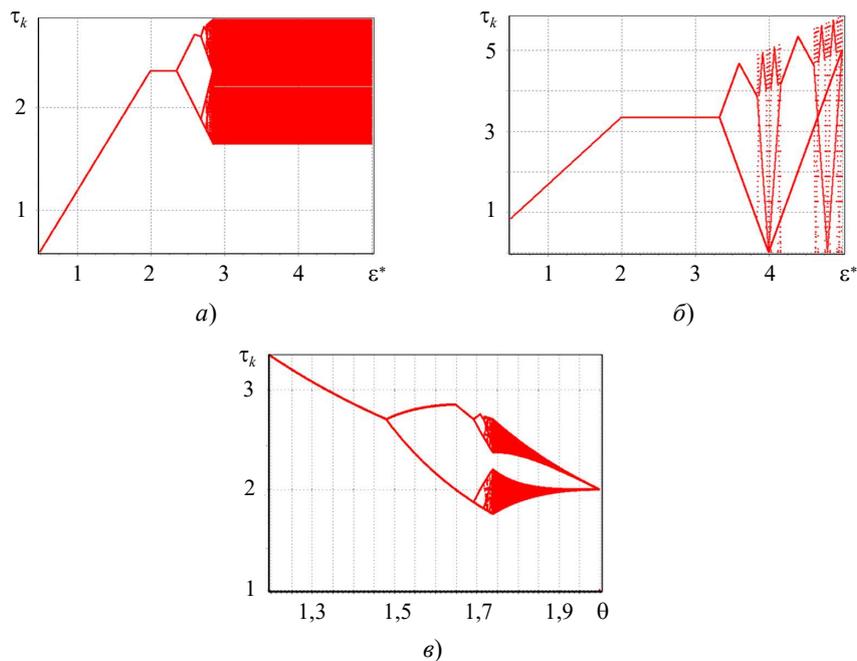


Рис. 2. Бифуркационные диаграммы по параметру ε^* и по параметру θ

Из рис. 2 следует, что переход к хаотическим движениям происходит по сценарию удвоения периода [21]. Следует отметить, что при рассмотрении динамики системы (1) без учета наследственности КТОП движений хаотического типа не наблюдалось. Из рис. 2а и рис. 2б видно, что с увеличением ε^* сначала наблюдаются периодические движения с одной длительной остановкой, причем с ростом ε^* увеличивается и время длительной остановки, затем время длительной остановки остается постоянным до некоторого бифуркационного значения, после которого возникают периодические движения с двумя, четырьмя и так далее до бесконечности длительными остановками. Затем периодические движения переходят в хаотические.

2. Математическая модель фрикционной системы с ограничителем колебаний

Проведенные исследования динамической системы с постоянной скоростью движения ленты указывают на то, что для ряда технических конструкций постоянство скорости ленты и отсутствие постоянно действующих внешних воздействий на тело существенно сокращают диапазон возможных рабочих движений, пригодных для предварительного исследования с помощью математических моделей. К ним относятся, например, система Пенлеве – Клейна (движение под действием постоянной

силы стержня между параллельными направляющими, из которых одна гладкая, а другая шероховатая), тормозная колодка, прижимаемая к колесу, вращаемому моментом, и много других. Поэтому в математическую модель (1) включим дополнительные слагаемые, которые обеспечат возможность изучения движения ленты с изменяющейся со временем скоростью $V(t)$ и внешним воздействием на тело $f(t)$. Особенно такое включение важно при исследовании динамики глубоководных скважин для добычи нефти, газа, а также забивки свай большого диаметра и большой длины при построении мостов особого назначения, ветряков на море и т.д. Будем предполагать, что движение тела по направлению движения ленты со скоростью $V(t)$ ограничено стенкой, находящейся на расстоянии b от положения равновесия тела при неподвижной ленте.

Математическую модель в этом случае можно записать в безразмерном виде:

$$\ddot{\xi} = -\xi - \operatorname{sgn}(\dot{\xi} - \theta) + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta) + F(\tau), \quad \dot{\xi} \neq \theta, \xi < b, \quad (3)$$

$$|\xi - F(\tau) + \dot{\theta}| \leq 1 + \varepsilon_k, \quad \dot{\xi} = \theta, \xi < b, \quad (4)$$

$$\dot{\xi}^+ = -R\xi^-, \quad \xi = b, \dot{\xi}^- > 0. \quad (5)$$

Смысл параметров в системе (3)–(5) очевиден. Фазовое пространство усечено по фазовой координате $\xi \leq b$. В подпространствах $F_+(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$, $F_-(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$ движение фазовых точек подчиняется, согласно (3)–(5), уравнениям $\ddot{\xi} = -\xi \pm 1 + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta) + F(\tau)$, $\dot{\xi} \neq \theta, \xi < b$, каждое из которых является гармоническим осциллятором, на который воздействует внешняя сила.

Динамика системы с учетом стенки

Рассмотрим случай $F(\tau) = A \sin \Omega \tau$.

Математическая модель с использованием (3)–(5) при $\theta = \text{const}$ имеет вид:

$$\ddot{\xi} = -\xi - \operatorname{sgn}(\dot{\xi} - \theta) + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta) + A \sin \Omega \tau, \quad \dot{\xi} \neq \theta, \xi < b, \quad (6)$$

$$|\xi - A \sin \Omega \tau| \leq 1 + \varepsilon_k, \quad \dot{\xi} = \theta, \xi < b, \quad (7)$$

$$\dot{\xi}^+ = -R\xi^-, \quad \xi = b, \dot{\xi}^- > 0.$$

Третье уравнение системы (6), (7) описывает процесс взаимодействия тела с неподвижной преградой, согласно гипотезе Ньютона, в котором $\dot{\xi}^-, \dot{\xi}^+$ – скорости тела непосредственно до и после ударного взаимодействия тела с неподвижным ограничителем, $0 \leq R < 1$ – коэффициент восстановления скорости тела при ударном взаимодействии массы с неподвижным ограничителем.

Фазовые траектории в подпространствах $F_+(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $F_-(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$ описываются уравнениями

$$\ddot{\xi} + \xi = \mp 1 + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - \theta) \text{ при } \dot{\xi} \neq \theta, \xi < b, \quad (8)$$

а в подпространстве $F_0(\xi, \dot{\xi} = \theta, \tau)$ – уравнениями

$$\dot{\xi} = \theta, \quad |\xi - A \sin \Omega \tau| \leq 1 + \varepsilon_k, \quad \xi < b. \quad (9)$$

3. Результаты численных расчетов

На рис. 3 приведены фазовые портреты при различных значениях коэффициента восстановления скорости. Рисунок 3а соответствует следующим значениям парамет-

ров: $\varepsilon^* = 3$, скорость ленты постоянна и равна 1, внешняя сила $F(\tau) = 0,25\cos 2\tau$, координата стенки равна 2, коэффициент $R = 0,5$. Рисунок 3б отличается от рис. 3а только значением коэффициента R , который равен 0,7. Из рисунков видно, что при значении коэффициента $R = 0,5$ система имеет устойчивый предельный цикл, описывающий фрикционные колебания тела с тремя длительными остановками: за первой остановкой следуют удар о стенку, затем участок в полупространстве $\xi < \theta$, после чего еще 2 аналогичных витка, и затем цикл повторяется. При значении коэффициента $R = 0,7$ поведение системы хаотично.

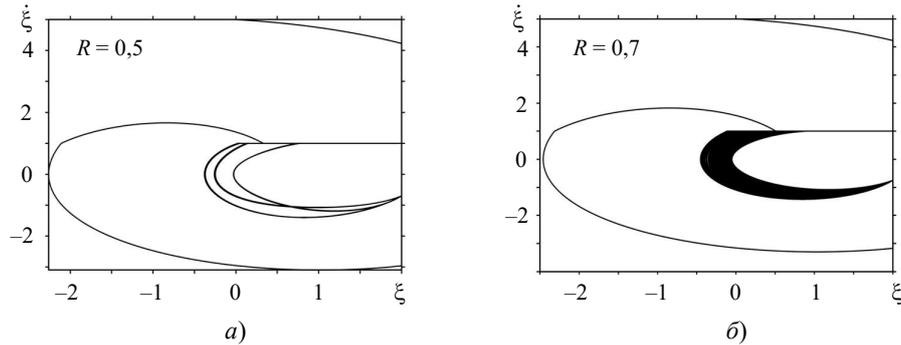


Рис. 3. Фазовые портреты

На рис. 4 и 5 по осям ординат отложены последовательности интервалов времени относительного покоя тела с лентой τ_k , а по осям абсцисс – расстояния до стенки (см. рис. 4) и значения скорости ленты (см. рис. 5).

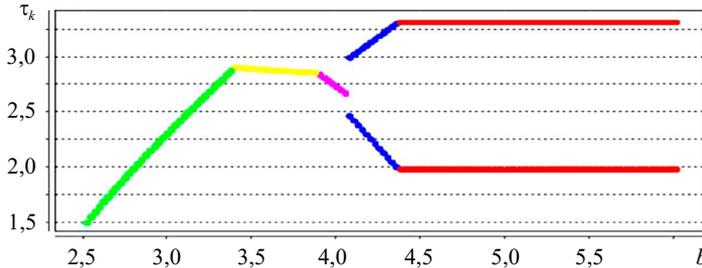


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма по параметру b стенки-ограничителя

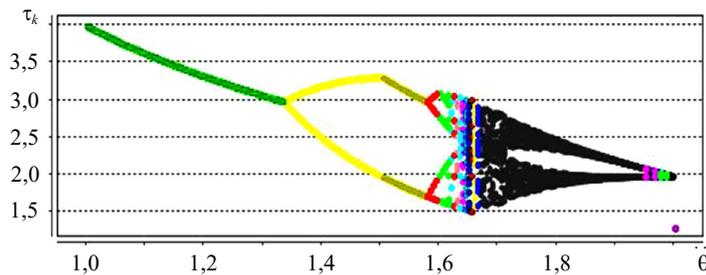


Рис. 5. Бифуркационная диаграмма по параметру скорости ленты θ

На рис. 6 приведены фазовые портреты в плоскости (τ, ξ) при различных значениях амплитуды A . Из рисунка видно, что с увеличением амплитуды хаотические движения (широкие полосы красного цвета) становятся интенсивнее и располагаются в большем пространстве фазовой плоскости. В первом случае ($A = 1$, рис. 6а)

наблюдаются режимы движения тела со скоростью тела меньшей либо равной скорости ленты, во втором случае ($A = 2$, рис. 6б) движения тела происходят как с опережением, так и без опережения ленты. Приведенные на рис. 6 фазовые портреты не наблюдались при изучении фрикционных динамических систем с трением без учета наследственности коэффициента трения относительного покоя.

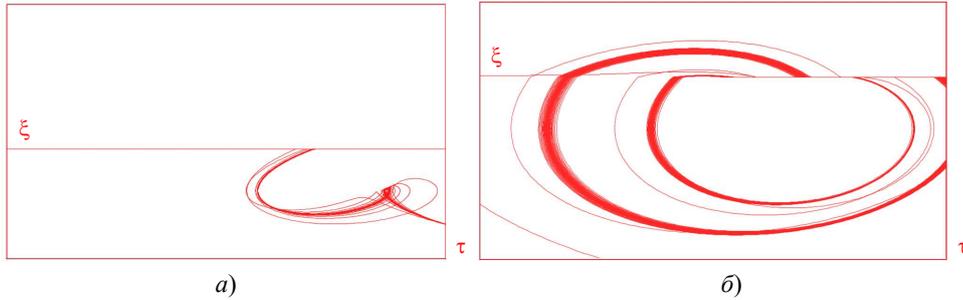


Рис. 6. Фазовые портреты для $A = 1$ (а) и $A = 2$ (б)

Рассмотрим случай $\theta(\tau) = B + A \sin \Omega \tau$, $F(\tau) = 0$.

Математическая модель с учетом (3)–(5) записывается в виде

$$\ddot{\xi} + \xi = -\text{sign}(\dot{\xi} - B - A \sin \Omega \tau) + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - B - A \sin \Omega \tau), \quad \dot{\xi} \neq B + A \sin \Omega \tau, \quad (10)$$

$$|\xi + A \Omega \cos \Omega \tau| \leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = B + A \sin \Omega \tau, \quad (11)$$

$$\dot{\xi}^+ = -R \xi^-, \quad \xi = b, \quad \dot{\xi}^- > 0.$$

В трехмерном фазовом пространстве в подпространствах $F_+(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $F_-(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$ процессы описываются уравнениями

$$\ddot{\xi} + \xi = \mp 1 + \tilde{\alpha}_1(\dot{\xi} - B - A \sin \Omega \tau) \text{ при } \dot{\xi} \neq \theta, \xi < b, \quad (12)$$

а в подпространстве $F_0(\xi, \dot{\xi} = \theta, \tau)$ – уравнениями

$$\dot{\xi} = \theta, \quad \xi - |\xi - A \Omega \cos \Omega \tau| \leq 1 + \varepsilon_k, \quad \xi < b.$$

На рис. 7 приведены бифуркационные диаграммы по параметру θ при $A = 0$ и $\varepsilon^* = 3,2$ (рис. 7а); $\varepsilon^* = 3,7$ (рис. 7б). По осям ординат отложены значения интервалов времени τ_k относительного покоя тела и ленты.

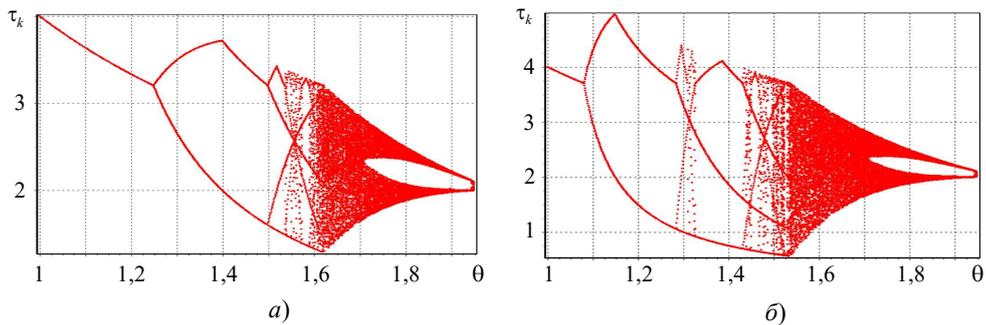


Рис. 7. Бифуркационные диаграммы по параметру θ

Из рис. 7 следует, что с увеличением ε^* возникновение хаотических движений тела происходит при меньших скоростях движения ленты, а область хаотических

движений тела по площади увеличивается. Наблюдается процесс удвоения периода Фейгенбаума (увеличение числа длительных остановок тела относительно ленты [22]).

Заключение

Впервые исследование неавтономной динамической системы проводится при наличии проблемы парадокса Пенлеве и проблемы трения с памятью.

Приведена методика исследования сильно нелинейных фрикционных вибрационных динамических систем для трения с памятью.

Впервые приведены бифуркационные диаграммы, позволившие показать сценарий рождения хаотических режимов движения. Представленные бифуркационные диаграммы позволили доказать, что сценарий возникновения хаоса в рассмотренных фрикционных системах происходит в результате удвоения периода.

Список литературы

1. Ван-дер-Поль Б. *Нелинейная теория электрических колебаний*. М.: Связьиздат, 1935. 42 с.
2. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении. *Журнал технической физики*. 1944. Т. 14. №4/5. С. 276–282.
3. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа. *Изв. РАН. МТТ*. 1990. №1. С. 23–28.
4. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа. *Прикладная математика и механика*. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859–864.
5. Зайцев М.В., Метрикин В.С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2012. №3(1). С. 141–146.
6. Ветюков М.М., Платовских М.Ю. Фрикционные автоколебания в системе с одной и двумя степенями свободы. *Современные проблемы механики и ее преподавания в вузе: Тр. Всерос. научно-методич. конф.* СПб., Военно-космическая академия им. А.Ф. Можайского. 2015. Т. 1. С. 58–63.
7. Chao Wang, Hekan Nilsson, Jiandong Yang, Olivier Petit. 1D-3D coupling for hydraulic system transient simulations. *Computer Physics Communications*. 2017. Vol. 210. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.09.007>.
8. Gómez S.S., Geurts C.P.W., Metrikine A. On the importance of soil damping for tall buildings loaded by wind. *Engineering Structures*. 2018. Vol. 163. P. 426–435. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.11.029>.
9. Margielewicz J., Gaska D., Litak G. Evolution of the geometric structure of strange attractors of a quasi-zero stiffness vibration isolator. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. Vol. 118. P. 47–57. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.012>.
10. Yang Liu, Pavlovskaja E., Wiercigroch M., Zhike Peng. Forward and backward motion control of a vibro-impact capsule system. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2015. Vol. 70. P. 30–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.009>.
11. Luo G.W., Xie J.H. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two strong resonance cases. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2002. Vol. 37(1). P. 19–34. DOI: 10.1016/s0020-7462(00)00089-5.
12. Chávez J.P., Yang Liu, Pavlovskaja E., Wiercigroch M. Path-following analysis of the dynamical response of a piecewise-linear capsule system. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2016. Vol. 37. P. 102–114. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.01.009>.
13. Yang Liu, Haibo Jiang, Pavlovskaja E., Wiercigroch M. Experimental investigation of the vibro-impact capsule system. *Procedia IUTAM*. 2017. Vol. 22. P. 237–243. <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.08.029>.

14. Savi M.A., Pereira-Pinto F.H.I., Viola F.M., de Paula A.S., Bernardini D., Litak G., Rega G. Using 0-1 test to diagnose chaos on shape memory alloy dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2017. Vol. 103. P. 307–324. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.06.016>.
15. Крагельский И.В. *Трение и износ*. М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
16. Howe P.G., Benton D.P., Puddington I.E. London – van der Waals attractive forces between glass surfaces. *Canadian Journal of Chemistry*. 1955. Vol. 33. Iss. 9. P. 1375–1383. <https://doi.org/10.1139/v55-165>.
17. Chávez J.P., Brzeski P., Perlikowski P. Bifurcation analysis of non-linear oscillators interacting via soft impacts. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2017. Vol. 92. P. 76–83. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.018>.
18. Defant F., Albertelli P. A novel harmonic solution for chatter stability of time periodic systems. *Journal of Sound and Vibration*. 2020. Vol. 490. Article No 115719. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115719>.
19. Метрикин В.С., Стародубровская Н.С. Фрикционные автоколебания в вибрационной системе с учетом сил трения наследственного типа. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №2. С. 147–155. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-2-147-155>.
20. Фейгин М.И. *Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями*. М.: Наука, 1994. 288 с.
21. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1972. 471 с.
22. Шустер Г. *Детерминированный хаос. Введение*. М.: Мир, 1988. 240 с.

References

1. Van der Pol B. The nonlinear theory of electrical oscillations. In: *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. 1934. Vol. 22. Iss. 9. P. 1051–1086.
2. Ishlinskiy A.Yu., Kragelskiy I.V. O skachkakh pri trenii [About friction jumps]. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki [Technical Physics]*. 1944. Vol. 14. No 4/5. P. 276–282 (In Russian).
3. Vetyukov M.M., Dobroslavskiy S.V., Nagaev R.F. Avtokolebaniya v sisteme s kharakteristikoy sukhogo treniya nasledstvennogo tipa [Periodic and stochastic self-oscillations in a system with hereditary dry friction]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1990. No 1. P. 23–28 (In Russian).
4. Metrikin V.S., Nagaev R.F., Stepanova V.V. Periodicheskie i stokhasticheskie avtokolebaniya v sisteme s sukhim treniem nasledstvennogo tipa [Periodic and stochastic self-oscillations in a system with hereditary dry friction]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1996. Vol. 60. Iss. 5. P. 859–864 (In Russian).
5. Zaytsev M.V., Metrikin V.S. K teorii neavtonomnoy dinamicheskoy sistemy s treniem nasledstvennogo tipa [On the theory of a nonautonomous dynamical system with hereditary-type dry friction]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod]*. 2012. No 3(1). P. 141–146 (In Russian).
6. Vetyukov M.M., Platovskikh M. Yu. Friksionnye avtokolebaniya v sisteme s odnoy i dvumya stepenyami svobody [Frictional autoconvulsions in a system with one and two degrees of freedom]. *Sovremennyye problemy mekhaniki i ee prepodavaniya v vuze: Trudy Vserossiyskoy nauchno-metodicheskoy konferentsii [Modern Problems of Mechanics and its Teaching in Higher Education: Proceedings of the All-Russian Scientific and Methodical Conference]*. Sant Petersburg. Voenno-kosmicheskaya akademiya imeni A.F. Mozhayskogo. 2015. Vol. 1. P. 58–63 (In Russian).
7. Chao Wang, Hekan Nilsson, Jiandong Yang, Olivier Petit. 1D-3D coupling for hydraulic system transient simulations. *Comput. Phys. Commun.* 2017. Vol. 210. P. 1–9. <https://doi.org/10.1016/j.cpc.2016.09.007>.
8. Gómez S.S., Geurts C.P.W., Metrikine A. On the importance of soil damping for tall buildings loaded by wind. *Eng. Struct.* 2018. Vol. 163. P. 426–435. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.11.029>.
9. Margielewicz J., Gaska D., Litak G. Evolution of the geometric structure of strange attractors of a quasi-zero stiffness vibration isolator. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2019. Vol. 118. P. 47–57. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2018.11.012>.

10. Yang Liu, Pavlovskaya E., Wiercigroch M., Zhike Peng. Forward and backward motion control of a vibro-impact capsule system. *Int. J. Non Linear Mech.* 2015. Vol. 70. P. 30–46. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2014.10.009>.
11. Luo G.W., Xie J.H. Hopf bifurcation and chaos of a two-degree-of-freedom vibro-impact system in two strong resonance cases. *Int. J. Non-Linear Mech.* 2002. Vol. 37(1). P. 19–34. DOI: 10.1016/s0020-7462(00)00089-5.
12. Chávez J.P., Yang Liu, Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Path-following analysis of the dynamical response of a piecewise-linear capsule system. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 2016. Vol. 37. P. 102–114. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.01.009>.
13. Yang Liu, Haibo Jiang, Pavlovskaya E., Wiercigroch M. Experimental investigation of the vibro-impact capsule system. *Procedia IUTAM.* 2017. Vol. 22. P. 237–243. <https://doi.org/10.1016/j.piutam.2017.08.029>.
14. Savi M.A., Pereira-Pinto F.H.L., Viola F.M., de Paula A.S., Bernardini D., Litak G., Rega G. Using 0-1 test to diagnose chaos on shape memory alloy dynamical systems. *Chaos, Solitons & Fractals.* 2017. Vol. 103. P. 307–324. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.06.016>.
15. Kragelskiy I.V. *Trenie i iznosc [Friction and Wear]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1968. 480 p. (In Russian).
16. Howe P.G., Benton D.P., Puddington I.E. London – van der Waals attractive forces between glass surfaces. *Can. J. Chem.* 1955. Vol. 33. Iss. 9. P. 1375–1383. <https://doi.org/10.1139/v55-165>.
17. Chávez J.P., Brzeski P., Perlikowski P. Bifurcation analysis of non-linear oscillators interacting via soft impacts. *Int. J. Non Linear Mechs.* 2017. Vol. 92. P. 76–83. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2017.02.018>.
18. Defant F., Albertelli P. A novel harmonic solution for chatter stability of time periodic systems. *J. Sound Vib.* 2020. Vol. 490. Article No 115719. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115719>.
19. Metrikin B.S., Starodubrovskaya N.S. Friktsionnye avtokolebaniya v vibratsionnoy sisteme s uchetom sil treniya nasledstvennogo tipa [Frictional self-oscillations in an oscillatory system accounting for hereditary-type friction forces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 2. P. 147–155 (In Russian).
20. Feygin M.I. *Vynuzhdennyye kolebaniya sistem s razryvnymi nelineynostyami [Forced Oscillations of Systems with Discontinuous Nonlinearities]*. Moscow. Nauka Publ. 1994. 288 p. (In Russian).
21. Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy [The Method of Point Mappings in the Theory of Nonlinear Oscillations]*. Moscow. Nauka Publ. 1972. 471 p. (In Russian).
22. Schuster H.G. *Deterministic Chaos. An Introduction*. Weinheim. John Wiley & Sons. 1984. 312 p.

ON THE THEORY OF FRICTION SYSTEMS WITH HEREDITARY TYPE FRICTION*

Igumnov L.A.¹, Metrikin V.S.¹, Starodubrovskaya N.S.²

¹National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

²Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

v.s.metrikin@mail.ru

Received by the Editor 2023/10/18

The work is devoted to the study of the nonlinear dynamics of frictional vibration systems, which take into account, when developing mathematical models of vibration systems, an essentially nonlinear function that describes the work of friction forces with memory. The problem considered

*This research was supported by the Russian Science Foundation (project No 22-19-00138).

in the work combines two well-known Painlevé problems and the problem of studying the friction forces of hereditary friction. In both cases, we are talking about the idealization of real elastic bodies and flexible bonds with ideal absolutely hard and rigid ones. Using the well-known experimentally proven hypothesis of A.Yu. Ishlinsky and I.V. Kragelsky about the hereditary dependence of the coefficient of friction of relative rest at low speeds of movement of bodies, the dynamic system under study is transformed from autonomous to non-autonomous, in which new types of movements that have not previously been observed in the study of vibration systems appear. In particular, taking into account the Painlevé paradox entails the previously unexpected possibility of the occurrence of instability and self-oscillations, and taking into account the heredity of the friction coefficient leads to the appearance of chaotic movements of bodies. A numerical and analytical method has been developed for studying the behavior of the dynamic characteristics of friction vibration systems depending on the chosen model of the relative static friction coefficient. Based on the main parameters, the new bifurcation diagrams presented in this work demonstrate the presence of arbitrarily complex periodic regimes of body motion, including chaotic ones. It has been established that the transition to chaotic modes of motion occurs according to the well-known period doubling scenario. Analytical relations are given for point mappings of Poincaré surfaces, which made it possible to obtain succession functions illustrating arbitrarily complex modes of body motion, including chaotic ones. It is noted that such body movements were not found during the study of such vibration systems.

Keywords: modeling, friction systems, coefficient of friction relative to rest, Painlevé paradox, friction with memory, point mapping, self-oscillations, stability, chaos.