

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2024-86-1-26-35

**РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК
НА ОСНОВЕ СМЕШАННОГО ВАРИАНТА МКЭ
С ТЕНЗОРНО-ВЕКТОРНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ
ИСКОМЫХ ВЕЛИЧИН**

© 2024 г.

**Клочков Ю.В.¹, Николаев А.П.¹,
Вахнина О.В.¹, Клочков М.Ю.², Дюкина Н.С.³**

¹*Волгоградский государственный аграрный университет,
Волгоград, Российская Федерация*

²*Волгоградский государственный технический университет,
Волгоград, Российская Федерация*

³*Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

klotchkov@bk.ru

Поступила в редакцию 03.09.2023

Предложен алгоритм расчета тонких оболочек на основе смешанного метода конечных элементов в двумерной постановке. Для корректного учета возможных смещений оболочки как твердого тела в алгоритме реализована разработанная тензорно-векторная форма интерполяционной процедуры искомых величин, в качестве которых были выбраны тензоры деформаций и искривлений в точке срединной поверхности и векторы перемещений данной точки. Элементом дискретизации являлся четырехугольный фрагмент срединной поверхности с узловыми неизвестными в виде перемещений и их первых производных, а также компонент тензоров деформаций и искривлений срединной поверхности в узлах конечного элемента. После минимизации модифицированного смешанного функционала сформирована матрица жесткости конечного элемента размером 36×36 . С целью верификации разработанного алгоритма было выполнено решение ряда тестовых задач, имеющих аналитическое решение, по расчету фрагмента эллиптического цилиндра, а также по расчету оболочки с пружинными опорами, позволяющими смещаться эллипсоидальной оболочке как абсолютно твердому телу. Анализ полученных результатов показал, что при расчете фрагмента эллиптического цилиндра, расчетная схема которого позволяет получить аналитическое решение, численные значения изгибающих моментов и нормальных напряжений совпадают со значениями, вычисленными из условия статического равновесия. Анализ результатов расчета эллипсоидальной оболочки, имеющей пружинные опоры, позволил сделать вывод о том, что разработанная тензорно-векторная интерполяционная процедура в смешанном варианте метода конечных элементов позволяет корректно учитывать смещения оболочек как твердых тел и получать адекватную оценку их напряженно-деформированного состояния.

Ключевые слова: смешанный функционал, четырехугольный конечный элемент, тензорно-векторная интерполяция искомых величин.

Введение

Учитывая все более широкое распространение оболочек в качестве конструктивных элементов многих объектов техносферы, можно констатировать, что задача численной реализации теоретических положений [1] в расчетах процессов деформированного и напряженного состояний инженерных конструкций остается актуальной. Среди численных методов прочностных расчетов таких объектов особенно широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) в различных формулировках [2]. Наиболее широко МКЭ использовался в формулировке метода перемещений в линейных расчетах пластин и оболочек при учете гипотезы Кирхгофа [3–9], а также при определении напряженно-деформированных состояний (НДС) композитных конструктивных элементов инженерных сооружений [10, 11]. МКЭ применялся в задачах нестационарного деформирования тонкостенных элементов [12, 13]. На основе МКЭ в формулировке метода перемещений определялись параметры НДС оболочек и пластин при конечных упругих деформациях [14–16]. Использовался МКЭ в расчетах тонкостенных элементов при упругопластическом деформировании [17, 18] и в процессах резания металлических изделий [19]. Вполне успешным является применение МКЭ в расчетах оболочек и при использовании объемных конечных элементов [20, 21]. Так же успешно МКЭ применялся при учете гипотезы Тимошенко [22] и в смешанной формулировке [23].

Важным при реализации МКЭ является использование хорошо разработанной теории аппроксимации искомых физических величин внутренней точки конечного элемента через их значения в узлах элемента.

При выполнении прочностных расчетов в криволинейных системах координат применение известных функций формы непосредственно к компонентам векторов перемещений и к компонентам тензоров второго ранга является математически некорректным, так как у этих геометрических величин переменными являются векторы базиса и их диадные произведения. Такая некорректность в результатах расчета эллиптической оболочки показана в [24], где использовался конечный элемент в формулировке метода перемещений.

В настоящей статье при получении матрицы деформирования конечного элемента в смешанной формулировке известные функции формы применены непосредственно к векторным и тензорным величинам. Аппроксимирующие выражения искомых величин получены после выполнения координатных преобразований, заключающихся в использовании матричных выражений базисных векторов узловых точек через базисные векторы внутренней точки конечного элемента и в использовании матричных выражений диадных произведений базисных векторов узловых точек через диадные произведения базисных векторов внутренней точки конечного элемента.

1. Матрица податливости и столбец узловых усилий конечного элемента

Смешанный функционал Рейсснера трехмерного напряженного состояния для оболочки при учете гипотезы Кирхгофа без учета объемных сил записывается соотношением

$$\Phi_R = \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}_c\}^T \{\mathbf{h}_c\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_c^k\}^T dV - \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}_c\}^T \{\mathbf{h}_c\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_c\}^T dV - \frac{1}{2} \int_F \{\mathbf{U}\}^T \{\mathbf{P}\} dF, \quad (1)$$

где V – объем оболочки; F – площадь поверхности оболочки с заданной внешней нагрузкой; $\{\boldsymbol{\varepsilon}_c\}^T = \{\varepsilon_{11} \varepsilon_{22} 2\varepsilon_{12} \aleph_{11} \aleph_{22} 2\aleph_{12}\}$ – строка деформаций и искривлений в точке срединной поверхности, элементы которой определяются через узловые величины с использованием аппроксимирующих выражений; $\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^k\} = \{\mathbf{L}\} \{\mathbf{U}\}$ – деформации и искривления в точке срединной поверхности, определяемые соотношениями Коши [25]; $\{\mathbf{U}\}^T = \{v^1 v^2 v^3\}$ – матрица-строка компонент вектора перемещения точки срединной поверхности; $\{\mathbf{P}\}^T = \{p_1 p_2 p\}$ – матрица-столбец компонент вектора внешней поверхностной нагрузки; $\{\mathbf{h}\}$ – матрица связи столбца продольных сил и изгибающих моментов $\{\mathbf{S}\}^T = \{N^{11} N^{22} N^{12} M^{11} M^{22} M^{12}\}$ со столбцом деформаций и искривлений в точке срединной поверхности $\{\boldsymbol{\varepsilon}_c\}$, компонуемая на основе закона Гука [26].

В алгоритме реализованы два варианта интерполяционной процедуры: традиционная покомпонентная интерполяция отдельных компонент тензоров деформаций, искривлений и вектора перемещения посредством узловых значений этих же самых компонент, например [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \{\boldsymbol{\Phi}\}^T \{\varepsilon_{11}^i \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{11}^l\}, \quad \aleph_{11} = \{\boldsymbol{\Phi}\}^T \{\aleph_{11}^i \aleph_{11}^j \aleph_{11}^k \aleph_{11}^l\}, \\ \{v^1\} &= \{\boldsymbol{\Psi}\}^T = \{v^{1i} v^{1j} v^{1k} v^{1l} v_{,\xi}^{1i} v_{,\xi}^{1j} v_{,\xi}^{1k} v_{,\xi}^{1l} v_{,\eta}^{1i} v_{,\eta}^{1j} v_{,\eta}^{1k} v_{,\eta}^{1l}\}, \end{aligned} \quad (2)$$

и разработанная тензорно-векторная интерполяция, при которой в качестве интерполируемых объектов выбираются тензоры деформаций и искривлений и вектор перемещения точки внутренней области четырехугольного элемента дискретизации с узлами i, j, k, l , например

$$\begin{aligned} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}\} &= \{\boldsymbol{\Phi}\}^T \{\{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^i\} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^j\} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^k\} \{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\alpha\beta}^l\}\}, \quad \bar{\boldsymbol{\aleph}} = \{\boldsymbol{\Phi}\}^T \{\{\aleph^i\} \{\aleph^j\} \{\aleph^k\} \{\aleph^l\}\}, \\ \{\bar{\mathbf{v}}\} &= \{\boldsymbol{\Psi}\}^T = \{\bar{v}^i \bar{v}^j \bar{v}^k \bar{v}^l \bar{v}_{,\xi}^i \bar{v}_{,\xi}^j \bar{v}_{,\xi}^k \bar{v}_{,\xi}^l \bar{v}_{,\eta}^i \bar{v}_{,\eta}^j \bar{v}_{,\eta}^k \bar{v}_{,\eta}^l\}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{\boldsymbol{\Phi}\}^T, \{\boldsymbol{\Psi}\}^T$ – функции формы, представляющие собой билинейные соотношения и произведения полиномов Эрмита третьего порядка локальных координат $-1 \leq \xi \leq 1, -1 \leq \eta \leq 1$ [24].

Посредством координатных преобразований, заключающихся в использовании матричных выражений базисных векторов каждой узловой точки $\bar{\mathbf{a}}_\alpha^0$ через базисные векторы внутренней точки конечного элемента $\bar{\mathbf{a}}_\alpha$, а также матричных выражений диадных произведений базисных векторов каждой узловой точки $\bar{\mathbf{a}}_\alpha^0 \bar{\mathbf{a}}_\beta^0$ через диадные произведения базисных векторов внутренней точки конечного элемента $\bar{\mathbf{a}}_\alpha \bar{\mathbf{a}}_\beta$, интерполяционные зависимости (3) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= [\mathbf{D}_{\alpha\beta}] \{ \{\varepsilon_{11}^i \varepsilon_{11}^j \varepsilon_{11}^k \varepsilon_{11}^l\} \{\varepsilon_{22}^i \varepsilon_{22}^j \varepsilon_{22}^k \varepsilon_{22}^l\} \{2\varepsilon_{12}^i 2\varepsilon_{12}^j 2\varepsilon_{12}^k 2\varepsilon_{12}^l\} \}, \\ \mathbf{v}^\alpha &= [\mathbf{C}^\alpha] \{ \{v^{1i} v^{1j} v^{1k} v^{1l} v_{,\xi}^{1i} v_{,\xi}^{1j} v_{,\xi}^{1k} v_{,\xi}^{1l} v_{,\eta}^{1i} \dots v_{,\eta}^{1l}\}, \\ &\{v^{2i} v^{2j} v^{2k} v^{2l} v_{,\xi}^{2i} \dots v_{,\xi}^{2l} v_{,\eta}^{2i} \dots v_{,\eta}^{2l}\} \{v^i v^j v^k v^l v_{,\xi}^i \dots v_{,\xi}^l v_{,\eta}^i \dots v_{,\eta}^l\} \}. \end{aligned} \quad (4)$$

Из анализа (4) следует, что при тензорно-векторной форме интерполяционной

процедуры каждая компонента тензоров деформаций и искривлений зависит от узловых значений всех компонент вышеупомянутых тензоров, а не от узловых значений компоненты одного какого-либо направления, как это реализуется в (2) при традиционной для МКЭ форме покомпонентной интерполяции. То же самое можно сказать и об интерполяции вектора перемещения точки внутренней области элемента дискретизации через векторы перемещения узлов и производные этих векторов.

На основании (2) или (4) формируются матричные зависимости

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_c\} = [\mathbf{T}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}, \quad \{\mathbf{U}\} = [\mathbf{Z}]\{\mathbf{U}^{y3l}\}. \quad (5)$$

С учетом (5) функционал (1) примет вид

$$\begin{aligned} & \{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}^T \int_F [\mathbf{T}]^T [\mathbf{h}] [\mathbf{B}] dF \{\mathbf{U}^{y3l}\} - \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}^T \int_F [\mathbf{T}]^T [\mathbf{h}] [\mathbf{T}] dF \{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\} - \\ & - \frac{1}{2} \{\mathbf{U}^{y3l}\}^T \int_F [\mathbf{Z}]^T \{\mathbf{P}\} dF, \end{aligned} \quad (6)$$

где матрица $[\mathbf{B}]$ компонуется на основе соотношений Коши [1] для тонких оболочек.

Применяя к (6) процедуру минимизации по $\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}^T$ и $\{\mathbf{U}^{y3l}\}^T$, можно получить систему матричных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_R}{\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}^T} = [\mathbf{Q}]\{\mathbf{U}^{y3l}\} - [\mathbf{X}]\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\} = 0, \\ \frac{\partial \Phi_R}{\{\mathbf{U}^{y3l}\}^T} = [\mathbf{Q}]^T \{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\} - [\mathbf{R}] = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$[\mathbf{Q}] = \int_F [\mathbf{T}]^T [\mathbf{h}] [\mathbf{B}] dF, \quad [\mathbf{X}] = \int_F [\mathbf{T}]^T [\mathbf{h}] [\mathbf{T}] dF, \quad [\mathbf{R}] = \int_F [\mathbf{Z}]^T \{\mathbf{P}\} dF.$$

Из первого уравнения системы (7) можно выразить столбец $\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\}$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_c^{y3l}\} = [\mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{Q}]\{\mathbf{U}^{y3l}\}. \quad (8)$$

В результате подстановки (8) во второе уравнение системы (7) можно получить матричное соотношение

$$[\mathbf{Q}]^T [\mathbf{X}]^{-1} [\mathbf{Q}]\{\mathbf{U}^{y3l}\} = \{\mathbf{R}\}. \quad (9)$$

С использованием (9) компонуется матрица жесткости и столбец узловых усилий четырехугольного конечного элемента.

Верификация разработанного алгоритма выполнялась путем решения ряда тестовых задач по расчету оболочек, в том числе допускающих смещения как абсолютно твердого тела под действием заданной нагрузки.

2. Численные эксперименты

Эксперимент 1. В качестве тестовой была решена задача об определении НДС консольного фрагмента эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль свободной образующей равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 0,1$ Н/см, направленной вдоль внешней нормали (рис. 1). Параметры эллипса поперечного сечения были приняты равными $a = 50$ см, $b = 10$ см, $E = 2,1 \cdot 10^7$ Н/см², $\nu = 0,3$, толщина оболочки $h = 0,2$ см; длина образующей $l = 1,0$ см.

Выбранная расчетная схема позволяет вычислить изгибающий момент $M_{\theta\theta}$ и нормальные напряжения $\sigma_{\theta\theta}$ в полярном направлении опорного сечения оболочки (θ – полярный угол эллипса):

$$M_{\theta\theta} = qlb = 1 \text{ Н} \cdot \text{см}, \quad \sigma_{\theta\theta} = M_{\theta\theta} / W = 150,0 \text{ Н/см}^2,$$

где $W = lh^2/6$ – момент сопротивления поперечного сечения.

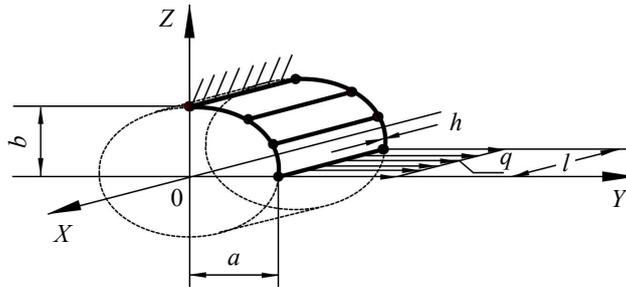


Рис. 1. Расчетная схема консольного фрагмента эллиптического цилиндра

Расчеты были выполнены в двух вариантах: в первом варианте был реализован разработанный смешанный МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией искомых величин; во втором варианте был использован МКЭ в форме метода перемещений с общепринятой интерполяцией компонент вектора перемещения [2].

Результаты повариантных расчетов представлены в таблице 1, в которой приведены значения $M_{\theta\theta}$, $\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$ и $\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$ (верхние индексы in и out указывают на внутреннюю и внешнюю поверхности оболочки) в опорном сечении в зависимости от густоты сетки узлов. Кроме того, в таблице приведены значения $\sigma_{\theta\theta}$ на свободном конце, которые должны быть равны нулю. Угол θ отсчитывается от оси OZ в плоскости YOZ .

Таблица 1

θ , рад	$M_{\theta\theta}$, Н·см $\sigma_{\theta\theta}$, Н/см ²	Варианты расчета								
		I				II				
		Сетка узлов								
		2×31	2×61	2×91	2×121	2×91	2×121	2×241	2×361	2×481
$\theta = 0$	$M_{\theta\theta}$	-0,997	-1,000	-1,000	-1,000	-0,126	-0,397	-0,963	-0,996	-0,999
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$	150,2	150,5	150,5	150,5	19,0	59,8	145,0	149,9	150,4
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$	-149,1	-149,4	-149,4	-149,4	-18,9	-59,4	-143,9	-148,8	-149,3
$\theta = \pi/2$	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$	-5,99	-1,65	-0,542	-0,236	-494,6	-799,1	-356,1	-145,4	-78,3
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$	6,32	1,57	0,505	0,218	-187,0	228,4	123,2	77,0	46,9

Как следует из таблицы, в первом варианте расчета наблюдается быстрая сходимость и устойчивость численных значений $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ при относительно редкой сетке узлов. Во втором варианте для достижения приемлемой точности значений $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ понадобилось на порядок большее число элементов дискретизации, а на свободном конце значения $\sigma_{\theta\theta}$ далеки от нулевых значений даже при густой сетке узлов, что подтверждает эффективность разработанного смешанного МКЭ по сравнению со стандартным МКЭ в форме метода перемещений.

Эксперимент 2. Был рассчитан эллиптический цилиндр единичной длины, расчетная схема которого представлена на рис. 2. Были приняты исходные данные: $a = 50$ см, $b = 20$ см, $l = 1$ см, $h = 0,1$ см, $E = 2,1 \cdot 10^7$ Н/см², $\nu = 0,3$, $q = 0,1$ Н/см.

Под действием приложенной нагрузки интенсивностью q оболочка может

смещаться в горизонтальном направлении как абсолютно твердое тело. Величина жесткого смещения обратно пропорциональна жесткости пружинных опор. Расчеты, как и в предыдущем примере, выполнялись в двух вариантах: первый вариант был реализован для сетки узлов 2×61 ; второй вариант – для сетки узлов 2×361 (то есть в 6 раз гуще). Результаты расчетов сведены в таблицу 2, в которой приведены значения $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ в точках приложения нагрузки ($\theta = \pi/2$) и в точках пружинного опирания ($\theta = -\pi/2$) в зависимости от величины жесткого смещения.

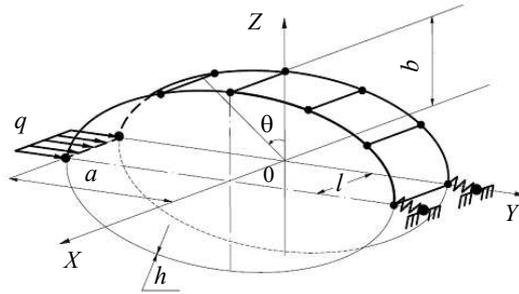


Рис. 2. Расчетная схема эллиптического цилиндра с пружинными опорами

Таблица 2

θ , рад	$M_{\theta\theta}$, Н·см $\sigma_{\theta\theta}$, Н/см ²	Варианты расчета					
		I			II		
		Величина жесткого смещения, см					
		0	10	100	0	10	100
$\theta = \pi/2$	$M_{\theta\theta}$	-1,446	-1,446	-1,446	-1,458	-2,095	-7,607
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$	873,02	873,02	873,02	883,93	1448,2	6333,0
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$	-862,29	-862,29	-862,29	-865,88	-1070,2	-2839,0
$\theta = -\pi/2$	$M_{\theta\theta}$	-1,446	-1,446	-1,446	-1,446	-0,804	4,758
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{in}}$	873,02	873,02	873,02	873,52	305,74	-4609,1
	$\sigma_{\theta\theta}^{\text{out}}$	-862,29	-862,29	-862,29	-862,09	-654,33	1144,1

Анализ табличных данных показывает, что в первом варианте при относительно редкой сетке узлов значения $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ до второго знака после запятой совпадают в точках приложения нагрузки и в точках пружинного опирания (что следует из симметрии расчетной схемы) и остаются абсолютно стабильными, несмотря на значительную величину жесткого смещения оболочки. Во втором варианте даже при значительном сгущении сетки при отсутствии жестких смещений имеются некоторые различия в значениях $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ в контролируемых точках. А при наличии смещений оболочки как абсолютно твердого тела значения $M_{\theta\theta}$ и $\sigma_{\theta\theta}$ становятся неприемлемыми.

Закключение

Разработанный алгоритм расчета оболочек на основе смешанного варианта МКЭ с тензорно-векторной интерполяцией искомых величин позволяет выполнять корректные исследования НДС оболочек, имеющих возможность смещения как абсолютно твердых тел под действием внешней нагрузки, и обеспечивает высокую точность вычисления контролируемых прочностных параметров.

Список литературы

1. Новожилов В.В. *Теория тонких оболочек*. СПб.: СПбГУ, 2010. 378 с.
2. Бате К.Ю. *Метод конечных элементов*. М.: Физматлит, 2010. 1022 с.
3. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *International Journal for Numerical Methods Engineering*. 2014. Vol. 97. Iss. 1. P. 1–31. <https://doi.org/10.1002/nme.4562>
4. Talischi C., Pereira A., Menezes I.F., Paulino G.H. Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2015. Vol. 102. Iss. 3-4. P. 728–747. <https://doi.org/10.1002/nme.4851>.
5. Manzini G., Russo A., Sukumar N. New perspective on polygonal and polyhedral finite element method. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. 2014. Vol. 24. No 08. P. 1665–1699. <https://doi.org/10.1142/S0218202514400065>.
6. Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H. On the virtual element method for three dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2014. Vol. 282. No 08. P. 132–160. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1311.0932>.
7. Tang J., Xi P., Zhang B., Hu B. A finite element parametric modeling technique of aircraft wing structures. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2013. Vol. 26. Iss. 5. P. 1202–1210. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2013.07.019>.
8. Gao L., Wang C., Liu Z., Zhuang Z. Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2017. Vol. 30. Iss. 4. P. 1417–1426. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2017.05.010>.
9. Ko Y., Lee Ph.-S., Bathe K.-J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Computers & Structures*. 2017. Vol. 192. P. 34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>.
10. Schüllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells. *International Journal for Numerical Methods Engineering*. 2021. Vol. 122. Iss. 5. P. 1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>.
11. Li Shiqiang, Lu Guoxing, Wang Zhihua, Zhao Longmao, Wu Guiying. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected to internal blast loading. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2015. Vol. 96-97. P. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011>.
12. Xiacong He. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints. *International Journal of Adhesion and Adhesives*. 2014. Vol. 48. P. 59–66. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017>.
13. Баженов В.Г., Кибец А.И., Демарева А.В., Калинина Ю.А. Алгоритм консервативного сглаживания разрывных волн напряжений в МКЭ. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 331–342. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-3-331-342>.
14. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Bd. 67. Ausgabe 3. S. 1–24. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>.
15. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H. A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2016. Vol. 306. P. 216–251. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.12.025>.
16. Jin He, Jiayi Zhao, Chenbo Yin. Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations. *International Journal of Solids and Structures*. 2020. Vol. 202. No 1. P. 660–671. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.06.037>.
17. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Кибец А.И., Нагорных Е.В., Самсонова Д.А. Постановка и численное решение задачи потери устойчивости упругопластических оболочек вращения с упругим наполнителем при комбинированных осесимметричных нагружениях с кручением. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. №3. С. 95–106. DOI: 10.15593/pern.mech/2022.3.10.
18. Баженов В.Г., Казаков Д.А., Осетров С.Л., Осетров Д.Л., Рябов А.А. Анализ предельных состояний цилиндрических упругопластических оболочек при растяжении и комбиниро-

ванном нагружении внутренним давлением и растяжением. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. №2. С. 39–48. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2022.2.04>.

19. Wang L. et al. Conventional and micro scale finite element modeling for metal cutting process: A review. *Chinese Journal of Aeronautics*. 2023 (In Press). <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.03.004>.

20. Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S., Verani M. A C^1 virtual element method for the Cahn – Hilliard equation with polygonal meshes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2016. Vol. 54. Iss. 1. P. 34–56. <https://doi.org/10.1137/15M1008117>.

21. Капустин С.А., Чурилов Ю.А., Горохов В.А., Рябов А.А., Романов В.И., Плакунов Д.А. Применение твердотельных конечных элементов в задачах расчета оболочек. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №2. С. 204–219.

22. Yamashita H., Valkeapaa Antti I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 10. Iss. 5. P. 051012-1 – 051012-9. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>.

23. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 54. P. 105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>.

24. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41. No 3. P. 373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>.

25. Демидов С.П. *Теория упругости*. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.

26. Седов Л.И. *Механика сплошной среды*. М.: Наука, 1970. Т. 1. 492 с.

References

1. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek [Theory of Thin Shells]*. Saint-Petersburg. SPbGU Publ. 2010. 378 p. (In Russian).

2. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. New Jersey. Prentice Hall. 1996. 1037 p.

3. Bishop J. A displacement-based finite element formulation for general polyhedra using harmonic shape functions. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2014. Vol. 97. Iss. 1. P. 1–31. <https://doi.org/10.1002/nme.4562>.

4. Talischi C., Pereira A., Menezes I.F., Paulino G.H. Gradient correction for polygonal and polyhedral finite elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2015. Vol. 102. Iss. 3-4. P. 728–747. <https://doi.org/10.1002/nme.4851>.

5. Manzini G., Russo A., Sukumar N. New perspective on polygonal and polyhedral finite element method. *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2014. Vol. 24. No 08. P. 1665–1699. <https://doi.org/10.1142/S0218202514400065>.

6. Gain A.L., Talischi C., Paulino G.H. On the virtual element method for three dimensional linear elasticity problems on arbitrary polyhedral meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2014. Vol. 282. No 08. P. 132–160. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1311.0932>.

7. Tang J., Xi P., Zhang B., Hu B. A finite element parametric modeling technique of aircraft wing structures. *Chinese J. Aeronaut.* 2013. Vol. 26. Iss. 5. P. 1202–1210. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2013.07.019>.

8. Gao L., Wang C., Liu Z., Zhuang Z. Theoretical aspects of selecting repeated unit cell model in micromechanical analysis using displacement-based finite element method. *Chinese J. Aeronaut.* 2017. Vol. 30. Iss. 4. P. 1417–1426. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2017.05.010>.

9. Ko Y., Lee Ph.-S., Bathe K.-J. A new 4-node MITC element for analysis of two-dimensional solids and its formulation in a shell element. *Comput. Struct.* 2017. Vol. 192. P. 34–49. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.07.003>.

10. Schüllhammer D., Fries T.P. A higher-order trace finite element method for shells. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2021. Vol. 122. Iss. 5. P. 1217–1238. <https://doi.org/10.1002/nme.6558>

11. Li Shiqiang, Lu Guoxing, Wang Zhihua, Zhao Longmao, Wu Guiying. Finite element simulation of metallic cylindrical sandwich shells with graded aluminum tabular cores subjected

to internal blast loading. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. Vol. 96–97. P. 1–12. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2015.03.011>.

12. Xiacong He. Finite element analysis of torsional free vibration of adhesively bonded single-lap joints. *Int. J. Adhes. Adhes.* 2014. Vol. 48. P. 59–66. <https://doi.org/10.1016/j.ijadhadh.2013.09.017>.

13. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Demareva A.V., Kalinina Yu.A. Algoritm konservativnogo sglazhivaniya razryvnykh voln napryazheniy v MKE [Algorithm for conservative smoothing of stress waves in FEM]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Placticity]*. 2022. Vol. 84. No 3. P. 331–342 (In Russian).

14. Nguyen N., Waas A. Nonlinear, finite deformation, finite element analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 2016. Bd. 67. Ausgabe 3. S. 1–24. <https://doi.org/10.1007/s00033-016-0623-5>.

15. Chi H., Talischi C., Lopez-Pamies O., Paulino G.H. A paradigm for higher order polygonal elements in finite elasticity using a gradient correction scheme. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2016. Vol. 306. P. 216–251. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.12.025>.

16. Jin He, Jiayi Zhao, Chenbo Yin. Constitutive equations and stiffness related properties for elastic and hyperelastic solid surfaces: Theories and finite element implementations. *Int. J. Solids Struct.* 2020. Vol. 202. No 1. P. 660–671. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.06.037>.

17. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Kibets A.I., Nagornykh E.V., Samsonova D.A. Postanovka i chislennoe reshenie zadachi poteri ustoychivosti uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniya s uprugim zapolnitelem pri kombinirovannykh osesimmetrichnykh nagruzheniyakh s krucheniem [Formulation and numerical solution of the stability loss problem of elastic-plastic shells of revolution with an elastic filler under combined axisymmetric and torsional loadings]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [NRPU Mechanics Bulletin]*. 2022. No 3. P. 95–106 (In Russian).

18. Bazhenov V.G., Kazakov D.A., Osetrov S.L., Osetrov D.L., Ryabov A.A. Analiz predelnykh sostoyaniy tsilindricheskikh uprugoplasticheskikh obolochek pri rastyazhenii i kombinirovannom nagruzhenii vnutrennim davleniem i rastyazheniem [Analysis of the limiting states of cylindrical elastic-plastic shells under tension and combined loading by internal pressure and tension]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [NRPU Mechanics Bulletin]*. 2022. No 2. P. 39–48 (In Russian).

19. Wang L. et al. Conventional and micro scale finite element modeling for metal cutting process: A review. *Chin. J. Aeronaut.* 2023 (In Press). <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.03.004>.

20. Antonietti P.F., Beirao da Veiga L., Scacchi S., Verani M. A C^1 virtual element method for the Cahn – Hilliard equation with polygonal meshes. *SIAM J. Numer. Anal.* 2016. Vol. 54. Iss. 1. P. 34–56. <https://doi.org/10.1137/15M1008117>.

21. Kapustin S.A., Churilov Yu.A., Gorokhov V.A., Ryabov A.A., Romanov V.I., Plakunov D.A. Primenenie tverdotelnykh konechnykh elementov v zadachakh rascheta obolochek [Using solid-body finite elements in analysing shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Placticity]*. 2017. Vol. 79. No 2. P. 204–219 (In Russian).

22. Yamashita H., Valkeapaa Antti I., Jayakumar P., Syqiyama H. Continuum mechanics based bilinear shear deformable shell element using absolute nodal coordinate formulation. *Journal Computational and Nonlinear Dynamics*. 2015. Vol. 10. Iss. 5. P. 051012-1 – 051012-9. <https://doi.org/10.1115/1.4028657>.

23. Lei Zh., Gillot F., Jezeguel. Developments of the mixed grid isogeometric Reissner – Mindlin shell: serendipity basis and modified reduced quadrature. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2015. Vol. 54. P. 105–119. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2015.06.010>.

24. Klochkov Yu.V., Nikolaev A.P., Sobolevskaya T.A., Vakhnina O.V., Klochkov M.Yu. The calculation of the ellipsoidal shell based FEM with vector interpolation of displacements when the variable parameterisation of the middle surface. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2020. Vol. 41. No 3. P. 373–381. <https://doi.org/10.1134/S1995080220030117>.

25. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1979. 432 p. (In Russian).

26. Sedov L.I. *Mekhanika splashnoy sredy [Continuum Mechanics]*. Moscow. Nauka Publ. 1970. Vol. 1. 492 p. (In Russian).

**CALCULATION OF SHELLS BASED ON THE MIXED FEM VARIANT
WITH TENSOR-VECTOR APPROXIMATION OF THE DESIRED VALUES**

**Klochkov Yu.V.¹, Nikolaev A.P.¹, Vakhnina O.V.¹,
Klochkov M.Yu.², Dyukina N.S.³**

¹*Volgograd State Agrarian University, Volgograd, Russian Federation*

²*Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation*

³*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

klotchkov@bk.ru

Received by the Editor 2023/09/03

An algorithm for calculating thin shells based on the mixed finite element method (FEM) in a two-dimensional formulation is proposed. To correctly take into account possible displacements of the shell as a rigid body, the algorithm implements the developed tensor-vector form of the interpolation procedure of the desired values, which were chosen as the tensors of deformations and curvature at the point of the middle surface and the displacement vectors of this point. The discretization element was a quadrangular fragment of the middle surface with unknown nodes in the form of location and their first derivatives, as well as components of strain and curvature tensors among the inner surface at the nodes of the finite element. After minimizing the modified mixed functional, a 36×36 finite element stiffness matrix is formed. In order to verify the developed algorithm, a number of test problems were solved for calculating a fragment of an elliptical cylinder with an analytical solution, as well as for calculating a shell with spring supports that allow the ellipsoidal shell to move as an absolutely rigid body. Analysis of the obtained results showed that when calculating a fragment of an elliptical cylinder, the calculation scheme of which makes it possible to obtain an analytical solution, the numerical values of bending moments and normal stresses completely coincide with the values calculated from the condition of static equilibrium. An analysis of the calculation results for an ellipsoidal shell with spring supports led to the conclusion that the developed tensor-vector interpolation procedure in the mixed FEM version allows one to correctly take into account the displacements of shells as solids and obtain an adequate assessment of their stress-strain state.

Keywords: mixed functional, quadrangular finite element, tensor-vector interpolation of sought values.