

УДК 534.11:519.624.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ СТЕРЖНЕЙ ПРИ НЕКОНСЕРВАТИВНОМ НАГРУЖЕНИИ ПО КРИТЕРИЮ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ

Ю.М. Темис, И.М. Федоров

Москва

Рассматривается проблема оптимального проектирования прямолинейных стержней по критерию потери устойчивости при нагружении следящими силами. Реализован алгоритм оптимизации первого порядка, использующий аналитические функции градиентов критической нагрузки. Получены оптимизированные формы консольно закрепленного и свободного стержней, устойчивость которых характеризуется взаимодействием многих пар собственных частот. Исследовано влияние дополнительной опоры на оптимизированные формы консольно закрепленного стержня.

Введение

Развивая работы Л. Эйлера [1] об устойчивости упругих стержней, Ж.-Л. Лагранж [2] поставил задачу оптимизации формы колонны заданной высоты, нагруженной консервативной продольной силой, по критерию потери устойчивости. Задача состояла в определении очертаний стержня, максимизирующих отношение нагрузки потери устойчивости колонны к квадрату ее объема. Правильное решение задачи Лагранжа было получено Т. Клаузенем [3]. Экономия материала, которой можно достичь при оптимизации формы нагруженной продольной силой колонны, шарнирно опертой на обоих концах, составляет 13,4%. Это соответствует увеличению критической силы потери устойчивости по сравнению со стержнем постоянного сечения того же объема в 1,33 раза. Подробный исторический очерк проблемы оптимизации стержней, нагруженных консервативно, содержится в [4]. Этой проблеме посвящены, в частности, работы О. Таджбаха, Дж. Келлера [5], Н.В. Баничука [6], В.Б. Гринева, А.П. Филиппова [7], В.А. Троицкого, Л.В. Петухова [8], Н. Ольхоффа [9].

По аналогии с задачей Лагранжа проблема оптимизации формы стержня по критерию потери устойчивости может быть поставлена и для случая неконсервативного нагружения стержней следящей силой [10], в частности, для расчетных схем М. Бека [11] (консольно закрепленный стержень, рис. 1,а) и К.Н. Гопака, В.И. Феодосьева [12, 13] (свободный стержень, рис. 1,б). Потеря устойчивости стержня, нагруженного следящей силой, происходит динамически [10]. Так как задача анализа динамической устойчивости стержня с переменным сечением в общем случае может быть решена только численно, недостаточное развитие вычислительных возможностей в течение длительного времени затрудняло проведение оптимизации неконсервативно нагруженных стержней. Частичная оптимизация в задаче Бека рассматривалась, в частности, Р. Плаутом [14], анализирувавшим оптимальное

соотношение между размерами сечений колонны, состоящей из 2-х участков постоянной толщины. Найденное им оптимальное соотношение позволило увеличить критическую силу потери устойчивости до 3-х раз. Впоследствии оптимизация в задаче Бека проводилась в работах О.Таджбаха [15], М.Ханаоки [16], И.Сугиямы [17]. Обзор ряда основных результатов оптимизации в задаче Бека приведен в [17]. В работе [17] показано, что достигнутая экономия массы составляет 62%, что соответствует увеличению критической силы потери устойчивости в 6,9 раз по сравнению с колонной постоянного сечения. Оптимизация в задаче Феодосьева (см. рис. 1,а) проводится в работах А.П. Сейраняна и О.Н.Кириллова [18, 19]. За счет оптимизации критическую нагрузку удалось повысить в 2,6 раза.

Помимо рассмотренных расчетных схем интерес может представлять оптимизация стержня с дополнительной опорой (рис. 1,б), устойчивость которого рассматривается в работах [20–22]. Дело в том, что при высоте опоры $h = 0$ расчетная схема соответствует задаче Бека и стержень теряет устойчивость динамически. Если же, напротив, $h = L$, всю горизонтальную составляющую нагрузки воспринимает на себя опора, и заделанный на одном конце и шарнирно опертый на другом стержень теряет устойчивость статически [23] под воздействием вертикальной составляющей следящей нагрузки. Таким образом, при движении опоры снизу вверх происходит переход от динамической формы потери устойчивости к статической.

Сравнивая экономию массы при оптимизации в задачах Лагранжа и Бека (13,4% и не менее 62%), можно сделать вывод, что оптимизация колонны более эффективна, когда потеря устойчивости ее исходной конфигурации происходит динамически. Проводя оптимизацию колонны с опорой для различных положений опоры, можно исследовать влияние преобладающего типа потери устойчивости на свойства оптимизированных решений.

Важным аспектом решения задачи оптимизации колонны является анализ устойчивости ее промежуточных конфигураций в течение оптимизационного процесса. В работе [24] была выявлена сильная зависимость результата исследования устойчивости стержней с переменным поперечным сечением от типа и параметров применяемого для этого численного метода. В связи с этим целью настоящей статьи является проведение оптимизации стержней по критерию потери устойчивости для расчетных схем Бека, Феодосьева, а также колонны с дополнительной опорой, с учетом рекомендаций [24]. В настоящем исследовании по аналогии с работами [15–19] при решении задач устойчивости не принимается во внимание эффект дестабилизации неконсервативной системы диссипативными силами [10, 25, 26], учет которого потенциально может приводить к существенному изменению границы области устойчивости стержней.

Математическая постановка задачи

В силу сделанных допущений запишем линеаризованное уравнение динамики стержня без диссипативных членов [23]:

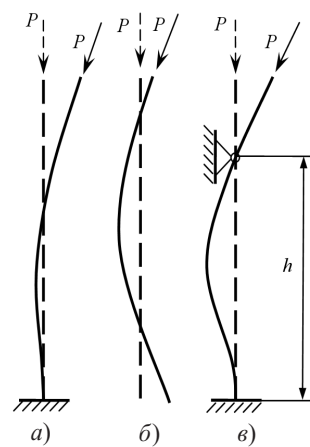


Рис. 1. Расчетные схемы следящего нагружения стержней

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(EJ(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(N(\xi) \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) + \rho F(\xi) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$\xi \in [0, L]$, где L – длина стержня, $y(\xi, t)$ – его перемещения в поперечном направлении, $EJ(\xi)$ – жесткость стержня на изгиб, ρ – плотность материала стержня, $F(\xi)$ – площадь его поперечного сечения, $N(\xi)$ – осевая нагрузка. Будем искать решение в виде

$$y(\xi, t) = Y(\xi)e^{i\omega t}. \quad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(EJ(\xi) \frac{d^2 Y}{d\xi^2} \right) + \frac{d}{d\xi} \left(N(\xi) \frac{dY}{d\xi} \right) - \rho F(\xi) \omega^2 Y = 0. \quad (3)$$

Далее рассмотрим уравнение (3) в безразмерной форме

$$(s(x)u'')'' + (n(x)u')' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (4)$$

$x = \xi/L$, $0 \leq x \leq 1$, $u(x) = Y(xL)$, $s(x) = L^4 EJ(xL)/\rho$ характеризует жесткость, $n(x) = L^2 N(xL)/\rho$ – осевую нагрузку, $m(x) = F(xL)$ – линейную плотность стержня. Для задач Бека и Феодосьева уравнение (4) принимает вид соответственно:

$$(s(x)u'')'' + p u'' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (5)$$

$$(s(x)u'')'' + p \left(u' \int_x^1 m(\zeta) d\zeta \right)' - \omega^2 m(x)u = 0, \quad (6)$$

так как в первом случае распределенные силы отсутствуют и осевая нагрузка совпадает с величиной следящей силы p , а во втором вклад в осевую нагрузку вносят силы инерции. Уравнение движения стержня в виде (5) приводится авторами [17], уравнение вида (6) – в работе [18]. Граничные условия для двух рассмотренных задач приведены ниже:

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad u'''(1) = 0 \quad \text{– для задачи Бека,} \quad (7)$$

$$u''(0) = 0, \quad u'''(0) = 0, \quad u''(1) = 0, \quad u'''(1) = 0 \quad \text{– для задачи Феодосьева.}$$

В задаче Феодосьева интерес представляет исследование колебаний стержня в системе отсчета, движущейся вместе со стержнем. Для этого к граничным условиям необходимо добавить условия отсутствия смещения и поворота стержня как жесткого целого [18]:

$$\int_0^1 u m(x) dx = 0, \quad \int_0^1 x u m(x) dx = 0. \quad (8)$$

Под решением задачи устойчивости подразумевается определение зависимости собственных частот колебаний стержня от величины приложенной нагрузки. График такой зависимости в координатах нагрузка p – квадрат частоты ω^2 носит название

частотной диаграммы. Различные виды потери устойчивости подробно описаны в монографии [10]. Для уравнения (5) (или (6)) обращение собственной частоты в 0 при некоторой нагрузке $p = P_{cr}$ означает исчезновение члена $\omega^2 m(x)u$, следовательно, выполнение уравнения статики и существование нового положения равновесия для стержня, что характеризует его статическую неустойчивость (дивергенцию). Если при некоторой величине нагрузки существует значение $\omega = \alpha - i\beta$, где $\beta > 0$, то, согласно выражению (2), это соответствует появлению формы колебаний с нарастающей амплитудой – динамической неустойчивости (флаттера). Возникновение динамической неустойчивости в рассматриваемых задачах будет соответствовать нагрузке, при которой происходит совпадение двух ветвей собственных частот на частотной диаграмме, сопровождающееся появлением комплексно сопряженной пары $\omega = \alpha \pm i\beta$, $\beta > 0$, [10, 11, 13].

Последующий анализ устойчивости зачастую будет приводить к рассмотрению стержней с сильно изменяющимся поперечным сечением и анализу высших собственных частот их колебаний. Будем предполагать, что все гипотезы, необходимые для использования уравнений динамики в виде (1)–(3), выполнены в любом случае. В частности, скорость движения стержня при колебаниях по соответствующим собственным формам много меньше скорости распространения упругих волн в материале стержня. Эффекты, связанные с дестабилизацией устойчивости неконсервативных систем малым демпфированием [10], в настоящей работе не учитываются. Так как использование численных методов для решения задачи устойчивости предполагает дискретизацию задачи, под устойчивостью в дальнейшем подразумевается устойчивость по ограниченному набору степеней свободы, выбор которых определяется применяемой дискретизацией.

Поставим задачу оптимального проектирования колонны, нагруженной следящей силой. Целевой функцией является критическая нагрузка P_{cr} , вызывающая неустойчивость колонны – равно как статическую (дивергенцию), так и динамическую (флаттер):

$$P_{cr} = P_{cr}(m_0, m_1, \dots, m_M) \rightarrow \max, \quad (9)$$

где критическая нагрузка P_{cr} является функцией $M + 1$ параметров, определяющих форму колонны. В настоящей работе форма колонны будет описываться кусочно-линейной функцией, и параметрами $\{m_i\}_{i=0}^M = \{m(i/M)\}_{i=0}^M$ являются безразмерные площади сечений колонны. По аналогии с работами [17, 18] будем считать, что $s(x) = m^2(x)$. На оптимизируемую колонну накладывается изопериметрическое ограничение постоянства объема

$$V = \int_0^1 m(x) dx = V_0 = \text{const}. \quad (10)$$

Кроме того, высота колонны предполагается неизменной. Помимо указанных условий также возможен учет критерия прочности, приводящего к ограничению на минимальный размер сечения колонны. В настоящей работе учет такого критерия не производится, так как задача рассмотрена в безразмерной постановке.

Метод решения задачи устойчивости

Пусть $v(x)$ – решение задач, сопряженных к (5)–(7). Очевидно, что $u(\xi)$ и $v(\xi)$ для задач Бека и Феодосьева соответствуют стационарным точкам функционалов

$$J(u, v) = \int_0^1 (s(x) u'' v'' - p v(1) u'(1) - p u' v' - m(x) \omega^2 u v) dx, \quad (11)$$

$$J(u, v) = \int_0^1 \left(s(x) u'' v'' - p v(0) u'(0) m(x) - p u' v' \int_0^1 m(\zeta) d\zeta - m(x) \omega^2 u v \right) dx. \quad (12)$$

Приведенные выражения для функционалов можно найти, в частности, в работах [17, 18]. Условие стационарности функционала в комбинации с методом конечных элементов дает простой способ дискретизации задачи (5)–(7). Метод конечных элементов используется для анализа устойчивости стержней переменного сечения, в частности, в работе [17] и при достаточном числе разбиений обеспечивает наиболее высокую точность решения задачи устойчивости в сравнении с рядом других численных методов, включая широко применяющийся метод Бубнова–Галеркина [24].

На стержне вводится сетка из N конечных элементов (КЭ). Решение прямой и сопряженной задач аппроксимируется на элементах кубическими полиномами с использованием эрмитова представления:

$$u(\eta) = \left(1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \frac{\eta - 2\eta^2 + \eta^3}{N}, 3\eta^2 - 2\eta^3, \frac{-\eta^2 + \eta^3}{N} \right) U_e = N_e U_e, \quad (13)$$

$\eta \in [0, 1]$ на каждом элементе, составляющем модель стержня. Здесь U_e – вектор перемещений и поворотов в узлах элемента. Для учета граничных условий в данном случае удобно применить метод множителей Лагранжа. В результате подстановки аппроксимации решения в функционал и записи условия его стационарности приходим к задаче

$$\mathbf{A} \mathbf{U} + \omega^2 \mathbf{B} \mathbf{U} = 0. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{U} – вектор перемещений и поворотов всех узлов стержня, матрица \mathbf{A} характеризует его жесткость и зависит от величины приложенной нагрузки p , \mathbf{B} отражает инерционные характеристики стержня. Матрицы не зависят от ω^2 . Выражения для \mathbf{A} и \mathbf{B} в случае задачи Бека приведены в [17], для задачи Феодосьева выражение для матрицы \mathbf{A} будет отличаться. Теперь собственные частоты ω^2 колебаний стержня можно определить как собственные числа в обобщенной проблеме собственных значений (14).

Метод решения задачи оптимизации

Общая структура процесса оптимального проектирования на каждой итерации состоит из решения задачи устойчивости стержня текущей конфигурации, определения его критической нагрузки и задания новой конфигурации, не нарушающей наложенные ограничения, для следующего шага.

Особенностью задачи оптимизации формы колонны, нагруженной следящими силами, является высокая чувствительность критической нагрузки к изменению геометрических параметров сечений [17, 18]. Это, в первую очередь, связано с возможностью резкого изменения величины критической нагрузки при изменении характера потери устойчивости, обнаруженном в работе [18] (переход от флаттера по первым двум частотам к дивергенции), или внезапном совпадении высших

собственных частот [24]. Такие особенности задачи устойчивости играют значительную роль при оптимизации.

При оптимальном проектировании предпочтительным является использование методов порядка выше нулевого, так как они позволяют получать оптимизированные формы точнее и за меньшее число итераций. В то же время использование градиентных методов сопряжено с необходимостью вычисления градиентов целевых функций и ограничений. Численное определение таких градиентов требует многократного решения исходной задачи, существенно увеличивая время работы оптимизационного алгоритма. Кроме того, численное определение градиентов связано с неопределенностью в выборе шага численного дифференцирования, что в условиях сложной топологии области устойчивости в пространстве параметров оптимизации (в особенности при упомянутом выше изменении характера потери устойчивости, когда критическая нагрузка не является непрерывной функцией) может привести к неверному определению градиентов.

В связи с этим эффективная процедура оптимизации формы стержня, включающая в себя градиентный метод, должна использовать аналитически найденные градиенты критических нагрузок. В настоящей работе используются аналитические функции градиентов, выведенные в [18] (задача Феодосьева) и [27] (задача Бека).

Функции градиентов критической нагрузки $g(\xi)$ для задач Бека и Феодосьева (5)–(7) в отношении изменения линейной плотности стержня $m(\xi)$ в точке ξ имеют вид:

$$g(\xi) = \frac{2mv_*''w_*'' - \omega_*^2 v_* w_*}{\int_0^1 v_*' w_*' d\eta - v_*'(1)w_*(1)} \quad (15)$$

– задача Бека [26];

$$g(\xi) = \frac{\omega_*^2 v_* w_* - 2mv_*''w_*'' + P_* w_*(0)v_*(0) + P_* \int_{\xi}^1 v_*' w_*' d\eta}{\int_0^1 w_* \left(v_*' \int_{\eta}^1 m(\zeta) d\zeta \right) d\eta} \quad (16)$$

– задача Феодосьева [18].

Здесь P_* – критическая нагрузка для данной конфигурации стержня; ω_* – частота, соответствующая форме колебаний, по которой происходит потеря устойчивости (одна из совпадающих при флаттере частот либо частота, обращающаяся в ноль при дивергенции); v_* и w_* – простая и сопряженная собственные формы колебаний, соответствующие частоте ω_* .

Алгоритм оптимизации, примененный в данной работе, реализует метод проекции градиента [18]. Для произвольной вариации распределения массы $\delta m(x)$, удовлетворяющей изопериметрическому условию (10), вариацию критической нагрузки P_* запишем в виде

$$\delta P_* = \int_0^1 (g(x) - \bar{g}) \delta m(x) dx, \quad (17)$$

где \bar{g} – некоторая константа.

Запишем вариацию распределения массы в виде

$$\delta m(x) = \alpha \frac{g(x) - \bar{g}}{\max_{x \in [0,1]} (g(x) - \bar{g})}, \quad (18)$$

где $\alpha \sim 10^{-5}$ – малый шаг по градиенту. Константа \bar{g} определяется из изопериметрического условия, которому должна удовлетворять вариация (18):

$$\bar{g} = \int_0^1 g(x) dx. \quad (19)$$

Каждая итерация состоит из трех этапов. Сначала для данной конфигурации стержня находится критическая нагрузка и устанавливается механизм потери устойчивости: дивергенция или флаттер по какой-либо из частот. Затем вычисляется градиент критической нагрузки $g(x)$ по формулам (15), (16). На последнем этапе вычисляется вариация распределения масс (18) и находится новое приближение для параметров оптимизации.

Результаты оптимизации

На рис. 2 представлен результат оптимизации стержня Бека с использованием изложенного алгоритма: его оптимизированные очертания (нормированная безразмерная площадь сечения

$$a^* = \frac{m(x)}{\max_{x \in [0,1]} m(x)} \quad (20)$$

по длине $x = \xi/L$) и частотная диаграмма.

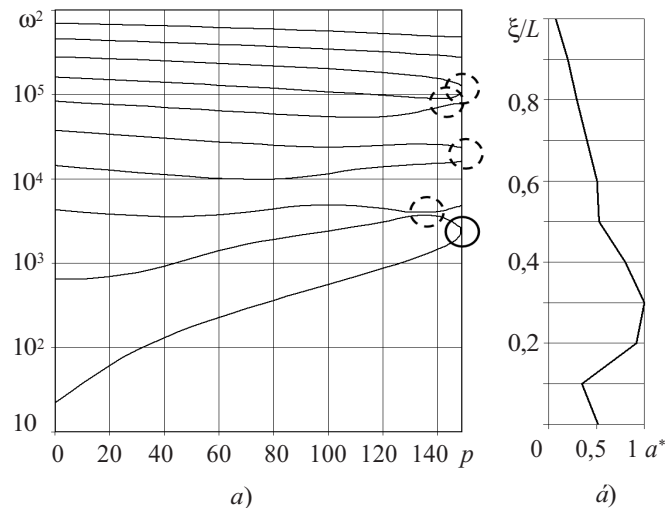


Рис. 2. Частотная диаграмма и форма оптимизированного стержня Бека

Оптимизация проводилась по 11 параметрам (безразмерным площадям m_i одиннадцати сечений). Число КЭ при анализе устойчивости стержня в процессе оптимизации равнялось 40, после оптимизации устойчивость оптимизированной формы

подтверждалась 80-элементной моделью. Таким образом, результаты оптимизации в настоящей работе соответствуют результатам оптимизации устойчивости минимум по 80 степеням свободы. Кроме проверки на большем числе КЭ, характер потери устойчивости оптимизированного стержня также подтверждался методом сагиттарной функции [24].

Потеря устойчивости стержня оптимизированной формы происходит при нагрузке $P_{cr} = 148,62$ по флаттеру на первых двух частотах, что превышает критическую нагрузку для стержня постоянного сечения в 7,41 раза. В табл. 1, позаимствованной из [17], приведены известные авторам результаты оптимизации формы стержня Бека. Критическая нагрузка потери устойчивости стержня Бека постоянного сечения $P_{cr}^* = 20,05$ [11]. Во всех работах, кроме настоящей, рассматривалась модель стержня, состоящая из 10 КЭ, которая, как было показано в [24], недостаточна для предсказания потери устойчивости на высших частотах. Это может служить причиной завышенной оценки критической нагрузки в некоторых работах, включая работу Рингерца.

Таблица 1. Известные результаты оптимизации стержня Бека [17]

| Источник, год | Критическая нагрузка оптимизированного стержня единичного объема | P_{cr}/P_{cr}^* |
|----------------------------|--|-------------------|
| Hanaoka and Washizu (1980) | 83,53 | 4,166085 |
| Seguchi et al. (1984) | 87,34 | 4,35611 |
| Tada et al. (1988) | 90,80 | 4,528678 |
| Gutkowski et al. (1993) | 92,56 | 4,616459 |
| Sugiyama (2000) [17] | 139,30 | 6,947631 |
| Настоящая работа | 148,62 | 7,412469 |
| Ringertz (1994) | 188,07 | 9,38005 |

Рассмотрим теперь ход самого процесса оптимизации. Как видно из рис. 2,а, оптимизированная форма стержня, хотя и теряет устойчивость при совпадении ветвей квадратов 1-й и 2-й собственных частот (обведено сплошной линией), также близка к критическому состоянию по частотам 2-3, 4-5, 6-7, 7-8 (обведено штриховыми линиями). При оптимизации все эти и другие виды потери устойчивости сложным образом чередуются, вызывая постоянные скачки критической нагрузки как в сторону увеличения, так и уменьшения. При этом существуют более выгодные с точки зрения оптимизации виды взаимодействия частот, приводящие к более поздней потере устойчивости, и менее выгодные.

На рис. 3 представлена история процесса оптимизации очертаний стержня и структура видов потери устойчивости при оптимизации. Оптимизированное решение: итерация №2498; флаттер по частотам 1-2; $P_{cr} = 148,62$.

Рассмотрим ряд характерных особенностей, присущих процессу оптимального проектирования в данном случае. Исходная конфигурация стержня (стержень постоянного сечения) теряет устойчивость по флаттеру первых двух частот (флаттер 1-2) при нагрузке $P_{cr}^* = 20,05$. После монотонного роста критической нагрузки до ~45 у стержня начинают совпадать не только квадраты 1-й и 2-й частоты, но и 3-й, 4-й частот приблизительно при той же нагрузке. Дальнейшее увеличение критической силы сопровождается взаимодействием частот между двумя первичными парами (вместо 1-2 и 3-4 совпадают 2-3). Такое взаимодействие происходит при нагрузке, меньшей чем нагрузка потери устойчивости по 1-2 и 3-4 частотам.

"Атавизм" от такого взаимодействия сохраняется и на частотной диаграмме оптимизированного стержня, представленной на рис. 2 (область сближения квадратов частот 2-3).

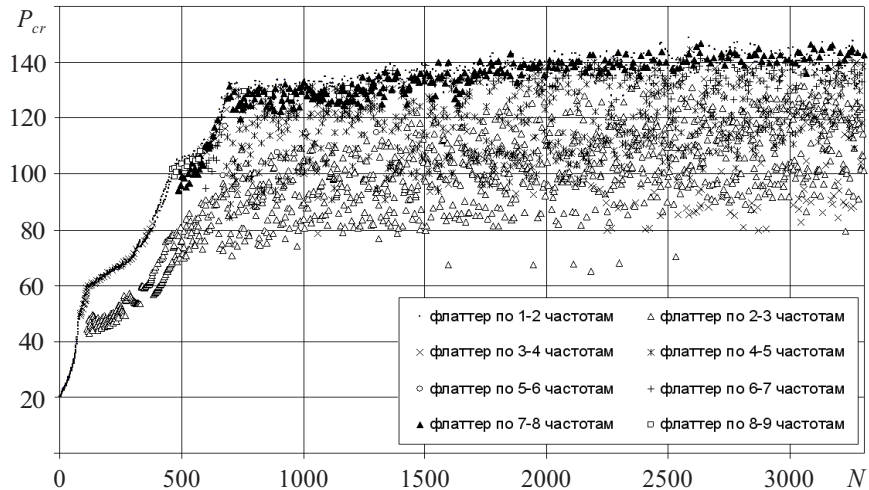


Рис. 3. Структура видов потери устойчивости в процессе оптимизации стержня Бека

По достижению 700-й итерации критическая нагрузка достигает величины ~ 130 и ее рост практически прекращается. Видимо, в пространстве параметров оптимизации система приближается к области, в которой на небольшом интервале изменения параметров происходят всевозможные взаимодействия частот, что подтверждает разброс критических значений нагрузки после 700-й итерации. Согласно рабочей гипотезе [17], оптимальной форме стержня Бека соответствует одновременное попарное взаимодействие всех частот. Продолжая процесс, удастся несколько увеличить критическую силу и получить представленное выше оптимизированное решение.

Аналогично оптимизации стержня Бека рассмотрим оптимизацию свободного стержня Феодосьева. Параметры алгоритма остались прежними. Потеря устойчивости свободного стержня оптимизированной формы (рис. 4,а, б) происходит при нагрузке $P_{cr} = 1012,6$ при совпадении ветвей квадратов 8-й и 9-й частот, что превышает критическую нагрузку для свободного стержня постоянного сечения $P_{cr}^* = 109,69$ [13] в 9,23 раза.

В табл. 2 приведены известные авторам на данный момент результаты оптимизации формы свободного стержня.

Таблица 2. Известные результаты оптимизации свободного стержня

| Источник, год | Критическая нагрузка оптимизированного стержня единичного объема | P_{cr} / P_{cr}^* |
|--------------------------------------|--|---------------------|
| Сейранян, Кириллов (1999) [18], [19] | 290 | 2,64 |
| Настоящая работа | 1012,6 | 9,23 |

Существенное отличие полученного в настоящей работе результата от критической нагрузки, найденной в [18, 19], может быть объяснено использованием

в этих работах метода Бубнова–Галеркина для анализа устойчивости. Это могло приводить (см. [24]) к погрешностям в определении критических нагрузок, частот и форм колебаний, и, соответственно, градиентов критической нагрузки, необходимых для работы оптимизационного алгоритма.

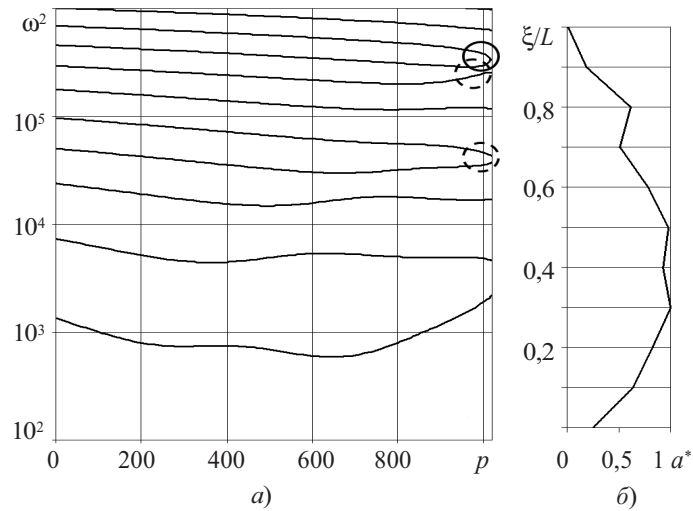


Рис. 4. Частотная диаграмма и форма оптимизированного свободного стержня

На рис. 5 представлена история процесса оптимизации очертаний стержня. Оптимизированное решение: итерация №1024; флаттер по частотам 8-9; $P_{cr} = 1012,6$. Кроме отмеченного выше взаимодействия пар квадратов частот, для задачи оптимизации свободного стержня характерна также возможность падения критической нагрузки за счет дивергенции, отмеченная в [18] (см. рис. 5 – дивергентная форма потери устойчивости формирует нижнюю границу величины критической нагрузки).

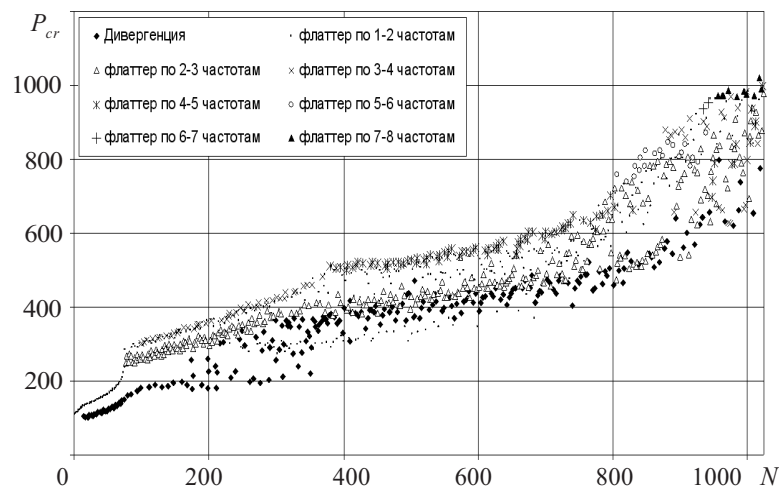


Рис. 5. Структура видов потери устойчивости в процессе оптимизации свободного стержня

Оптимизированное решение было получено на 1024-й итерации, для единственного случая взаимодействия 8 и 9 частот. Дальнейшие итерации не привели к увеличению критической нагрузки.

Результаты оптимизации стержня с дополнительной опорой (см. рис.1,б) при высоте опоры $h = 0,25L; 0,5L; 0,75L; L$ представлены на рис.6–9 и сведены в табл. 3, где полученные значения критической нагрузки сопоставляются с нагрузкой потери устойчивости стержня постоянного сечения с опорой.

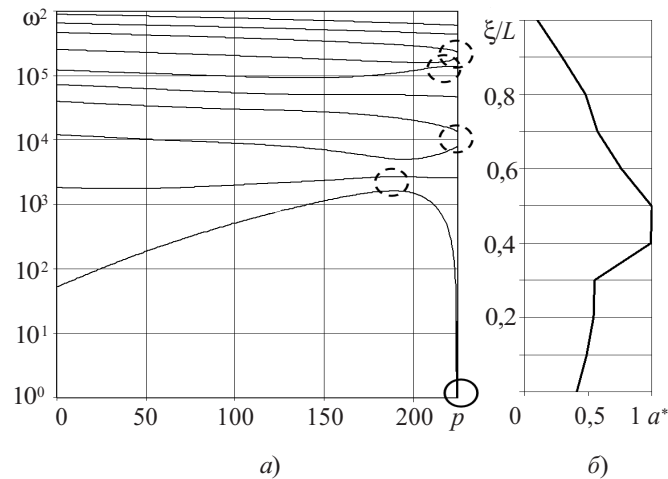


Рис. 6. Частотная диаграмма и форма оптимизированного стержня с опорой на высоте $h = 0,25L$

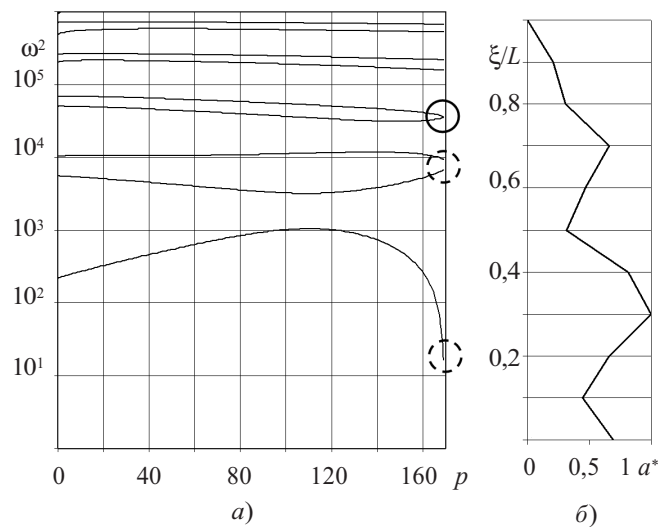


Рис. 7. Частотная диаграмма и форма оптимизированного стержня с опорой на высоте $h = 0,5L$

Из приведенных результатов следует, что возрастанию роли статической потери устойчивости для стержня постоянного сечения с опорой соответствует снижение эффективности оптимизации. Вид оптимизированной формы стержня Бека, шарнирно опертого на верхнем конце (см. рис. 9), хорошо соотносится с известным аналитическим решением (см. [4]), что подтверждает корректность проводимой оптимизации.

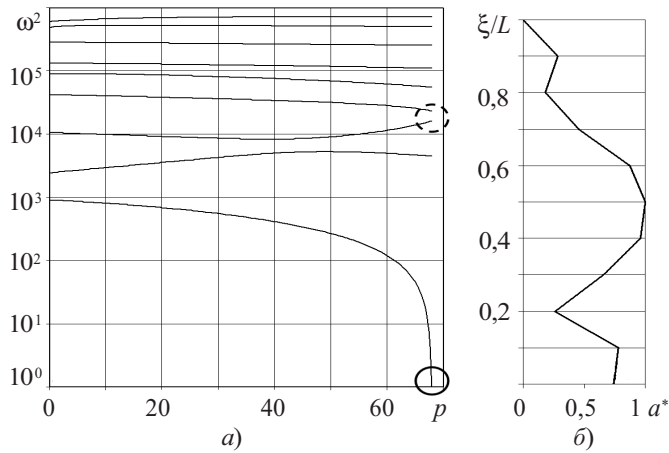


Рис. 8. Частотная диаграмма и форма оптимизированного стержня с опорой на высоте $h = 0,75L$

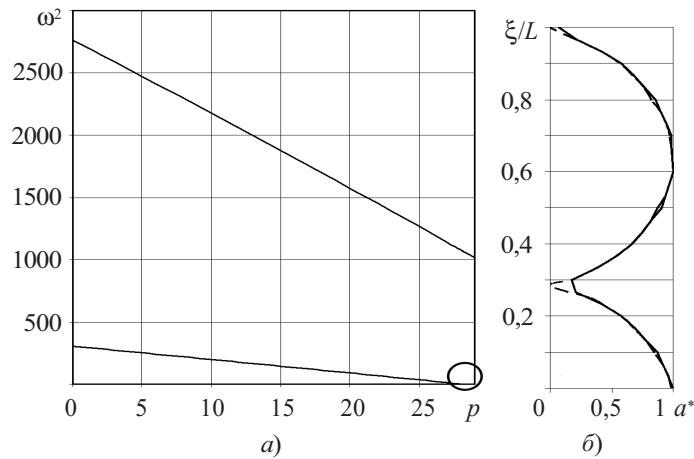


Рис. 9. Частотная диаграмма и форма оптимизированного стержня с опорой на высоте $h = L$. Штриховой линией показаны очертания оптимальной формы колонны [4]

Таблица 3. Результаты оптимизации стержня с дополнительной опорой

| Высота опоры h/L | $P_{cr \text{ opt}}$ – критическая нагрузка оптимизированного стержня | $P_{cr \text{ const}}$ – критическая нагрузка постоянного сечения того же объема | $P_{cr \text{ opt}} / P_{cr \text{ const}}$ |
|--------------------|---|--|---|
| 0 | 148,62 | 20,05 | 7,412469 |
| 0,25 | 224,42 | 31,55 | 7,113154 |
| 0,50 | 168,85 | 80,76 | 2,090763 |
| 0,75 | 68,00 | 35,89 | 1,894678 |
| 1,00 | 28,16 | 20,19 [23] | 1,39475 |

Весьма вероятно, что у рассмотренных задач оптимизации существуют решения, превосходящие решение, представленное в настоящей работе. Вопрос их получения связан с использованием более чувствительных оптимизационных алгоритмов 2-го порядка, использующих аналитические выражения для компонентов матрицы

Гессе. В то же время уже полученные оптимизированные решения чувствительны настолько, что незначительное изменение размера сечения вызывает значительную перестройку частот, в связи с чем подобные оптимизированные решения могут оказаться неприменимыми на практике. Проблема поиска глобальных оптимумов также остается открытой.

Выводы

Оптимизация упругих стержней в постановках Бека и Феодосьева, а также консольно закрепленного стержня с дополнительной опорой позволила получить оптимизированные с точки зрения устойчивости минимум по 80 степеням свободы формы стержней. Важной особенностью найденных оптимизированных решений являются их частотные диаграммы, характеризующиеся множественным попарным взаимодействием собственных частот и высокой чувствительностью к незначительным изменениям переменных проектирования. На основании анализа влияния дополнительной опоры на оптимизированные формы консольно закрепленного стержня установлено, что возрастанию роли статической потери устойчивости соответствует снижение эффективности оптимизации.

Литература

1. Эйлер, Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Л. Эйлер. – М.: ГТТИ, 1934. – 600 с.
2. Lagrange, J.-L. Sur la figure des colonnes. / J.L. Lagrange // Ouvres de Lagrange. – Paris: Gauthier-Villars, 1868. – P. 125–170.
3. Clausen, T. Uber die form architektonischer Saulen / T. Clausen // Bull. cl. physico-math. Acad. – 1851. – V. IX. – P. 371–380.
4. Сейранян, А.П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны / А.П. Сейранян // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, №2. – С. 45–96.
5. Tadjbakhsh, O. Strongest columns and isoperimetric inequalities for eigenvalues. / O. Tadjbakhsh, J.B. Keller // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1962. – V. 29, No.1. – P. 159–164.
6. Баничук, Н.В. Оптимизация устойчивости стержня с упругой заделкой / Н.В. Баничук // Изв. АН СССР. МТТ. – 1974. – № 4. – С. 150–154.
7. Гринев, В.Б. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам / В.Б. Гринев, А.П. Филиппов. – Киев: Наукова думка, 1975. – 294 с.
8. Троицкий, В.А. Оптимизация формы упругих тел / В.А. Троицкий, Л.В. Петухов – М.: Наука, 1982. – 432 с.
9. Ольхофф, Н. Оптимальное проектирование конструкций / Н. Ольхофф. – М.: Мир, 1981. – С. 138–154.
10. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 341 с.
11. Beck, M. Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedruckten Stabes / M. Beck // ZAMP. – 1952. – №3. – P. 225–228.
12. Гопак, К.Н. Потеря устойчивости свободным стержнем, ускоренно движущимся под действием следящей силы / К.Н. Гопак // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1960. – №4. – С. 25–27.
13. Феодосьев, В.И. Об одной задаче устойчивости / В.И. Феодосьев // ПММ. – 1965. – Вып. 2. – С. 43–45.
14. Plaut, R.H. On the optimal Structural Design for a Nonconservative, Elastic Stability Problem / R.H. Plaut // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1971. – V. 7, No.1. – P. 52–60.
15. Tadjbakhsh, O. The Shape of the Strongest Column with a Follower Load / O. Tadjbakhsh // Journal of Optimization Theory and Applications. – 1975. – V. 15. – P. 103–118.

16. *Hanaoka, M.* Optimum Design of Beck's Column / M. Hanaoka, K. Washizu // *Computers & Structures*. – 1980. – V. 11. – P. 473–480.
17. *Langthjem, M.A.* Optimum design of cantilevered columns under the combined action of conservative and nonconservative loads / M.A. Langthjem, Y. Sugiyama // *Computers and Structures*. – 2000. – №74. – P. 385–398.
18. *Кириллов, О.Н.* Оптимизация устойчивости летящего стержня / О.Н. Кириллов // *Вестник молодых ученых*. – 1999. – №1. – С. 64–78.
19. *Kirillov, O.N.* Optimization of Stability of a Flexible Missile under Follower Thrust / O.N. Kirillov, A.P. Seyranian // 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. St.Louis. Missouri (USA). September 2-4. – 1998. – P. 2063–2073.
20. *Lee, H.P.* Dynamic stability of a rod with an intermediate spring support subject to subtangential follower forces / H.P. Lee // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1995. – V. 125. – P. 141–150.
21. *Elishakoff, I.* Computerized symbolic solution for a nonconservative system in which instability occurs by flutter in one range of a parameter and by divergence in another / I. Elishakoff, J. Hollkamp // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1987. – No.62. – P. 27–46.
22. *Светлицкий, В.А.* Механика стержней. Статика / В.А. Светлицкий. – М: Высшая школа, 1987. – 433 с.
23. *Алфутов, Н.А.* Устойчивость движения и равновесия / Н.А. Алфутов, К.С. Колесников. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 256 с.
24. *Темис, Ю.М.* Сравнение методов анализа устойчивости стержней при неконсервативном нагружении / Ю.М. Темис, И.М. Федоров // *Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб.* / Нижегород. ун-т. – 2006. – Вып. 68. – С. 5–17.
25. *Bolotin, V.V.* Effect of damping on stability of elastic systems subjected to non-conservative forces / V.V. Bolotin, N.I. Zhinzher // *International Journal of Solids and Structures*. – 1969. – V.5, №9. – P. 965–989.
26. *Денисов, Г.Г.* Об устойчивости упругих систем с малым внутренним трением / Г.Г. Денисов, В.В. Новиков // *МТТ*. – 1978. – №3. – С. 211–218.
27. *Pedersen, P.* Sensitivity Analysis for Problems of Dynamic Stability / P. Pedersen, A.P. Seyranian // *Int. J. of Solids and Structures*. – 1983. – V. 19, No.4. – P. 315–335.

[15.03.2007]

SHAPE OPTIMIZATION OF NONCONSERVATIVELY LOADED BEAMS WITH A STABILITY CRITERION

Yu.M. Temis, I.M. Fedorov

Problem of optimization with a stability criterion for straight beam under follower force loading is considered. First order optimization algorithm utilizing analytical expressions of critical load gradients is applied. Optimized shapes of clamped and free beams which characterized by interactions of multiple eigenfrequency pairs are produced. The influence of an additional support on the optimized shapes of clamped beam is investigated.