

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

В.А. Постнов, Г.А. Тумашик, И.В. Москвина

Санкт-Петербург

Рассматриваются вопросы устойчивости круговой цилиндрической оболочки, подкрепленной круговыми ребрами жесткости. Решение строится на основе строгой постановки, учитывающей дискретность расположения подкрепляющих ребер и условия сопряжения ребер с оболочкой. Исследовано влияние граничных условий, внешнего или внутреннего расположения ребер, установки усиленных ребер на величину критического давления общей потери устойчивости оболочки. Произведено сравнение результатов с имеющимися аналитическими решениями и расчетами с помощью конечно-элементного комплекса ANSYS.

1. Введение

Конструкции, включающие в себя круговые цилиндрические оболочки, используются в судостроении, самолетостроении, ракетостроении, реакторостроении и других отраслях. При всем многообразии нагрузок, воспринимаемых подкрепленными круговыми оболочками, вопросы расчета последних на действие внешнего равномерно распределенного давления продолжают занимать важное место. В этом случае постановка подкрепляющих ребер предназначается, главным образом, для повышения устойчивости оболочек.

В работе реализован предложенный в статьях [1, 2] метод решения задачи устойчивости цилиндрической оболочки, подкрепленной круговыми шпангоутами различной жесткости. Краткое описание метода изложено ниже.

2. Основные зависимости

Для составления дифференциальных зависимостей, которыми описывается задача об устойчивости оболочки, подкрепленной ребрами, применен метод расчленения. Взаимодействие j -го ребра и оболочки по линии их сопряжения характеризуется нормальной нагрузкой $q_j(y)$ и касательными усилиями $r_j(y)$ (рис. 1).

Система дифференциальных уравнений для оболочки имеет вид [1]:

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2} - \frac{pr}{2h} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} - \frac{p}{rh} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 F(x, y) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

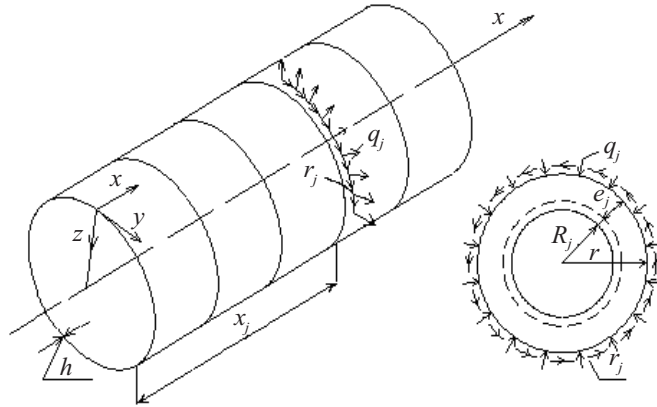


Рис. 1

Дополнительно могут быть записаны уравнения сопряжения оболочки и j -го ребра:

$$w(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \quad (3a)$$

$$M_1(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \quad N_1(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = r_j(y),$$

$$T_1(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \quad S(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = -q_j(y), \quad (36)$$

$$u(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \quad v(x, y)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0.$$

В уравнениях (1)–(3) $u(x, y)$, $v(x, y)$ и $w(x, y)$ – соответственно осевое, окружное и радиальное перемещение оболочки, $F(x, y)$ – функция напряжений, $M_1(x, y)$, $N_1(x, y)$, $T_1(x, y)$ и $S(x, y)$ – изгибающий момент и усилия в поперечном сечении оболочки, E и ν – характеристики материала оболочки, r и h – радиус и толщина обшивки, $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$ – цилиндрическая жесткость изотропной оболочки, p – внешнее гидростатическое давление.

Используя известные зависимости теории оболочек и представляя функции прогиба и напряжений в виде ряда Фурье в окружном направлении:

$$w(x, y) = \sum_n w_n(x) \sin(ny/r),$$

$$F(x, y) = \sum_n F_n(x) \sin(ny/r),$$

перейдем от (1)–(3) к двум связным системам дифференциальных уравнений относительно компонент $w_n(x)$ и $F_n(x)$. Каждая система состоит из основного уравнения, описывающего поведение функций в пределах одной шпации (пролета оболочки между смежными ребрами), и условий по линии сопряжения ребра и оболочки. От этих систем, в свою очередь, удобно перейти путем ряда преобразований к уравнениям относительно функции прогиба:

$$\frac{d^8 w_n(\xi)}{d\xi^8} + b_1 \frac{d^6 w_n(\xi)}{d\xi^6} + b_2 \frac{d^4 w_n(\xi)}{d\xi^4} + b_3 \frac{d^2 w_n(\xi)}{d\xi^2} + b_4 w_n(\xi) = 0, \quad (4)$$

$$\left. \frac{d^i w_n(\xi)}{d\xi^i} \right|_{\xi_j-0}^{\xi_j+0} = \sum_{k=0,2,4,6} A_{ik,j} \frac{d^k w_n(\xi_j)}{d\xi^k} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 7; j = 1, 2, \dots, m-1). \quad (5)$$

Здесь m – число пролетов подкрепленной оболочки, $\xi = x/l$, l – длина пролета оболочки. Коэффициенты b_s ($s = 1, 2, 3, 4$) и $A_{ik,j}$ использованные в выражениях (4)–(5), являются функциями жесткостных и геометрических параметров оболочки со шпангоутами и внешнего давления.

Выбор в качестве основных неизвестных значений функции прогиба и ее четных производных в местах постановки ребер позволяет автоматически удовлетворить соответствующим дополнительным условиям из (5). Оставшиеся неудовлетворенными условия перехода через сечения и граничные условия на кромках оболочки могут быть записаны через основные неизвестные в случае подстановки общего решения уравнения (4) для шпации. Это позволяет связать между собой значения нечетных производных функции прогиба в местах постановки ребер и основных неизвестных. Как итог, описанный подход приводит к формированию системы из $4(m+1)$ уравнений относительно основных неизвестных. При этом условием потери устойчивости (как глобальной, так и локальной) будет равенство нулю определителя полученной системы уравнений.

3. Результаты

Рассмотрим потерю устойчивости неподкрепленной оболочки. В табл. 1 приведено сопоставление результатов предлагаемого решения с расчетами на основе конечно-элементного комплекса ANSYS неподкрепленной оболочки с фиксированным отношением $r/h = 140$ и варьируемым параметром $U = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \cdot L/2\sqrt{rh}$, где L – длина оболочки.

В качестве граничных условий принимались свободное опирание и жесткая заделка оболочки на торцах при отсутствии ограничений на осевые перемещения торцов. Таким образом, первый вариант граничных условий соответствует классическому варианту.

Результаты в табл. 1 представлены в виде значений критических нагрузок $p = P$ (кгс/см²), соответствующих различным числам волн потери устойчивости n . Жирным шрифтом выделена наименьшая критическая нагрузка. В первых четырех столбцах таблицы дополнительно приведены результаты использования формулы Мизеса [3] для классических граничных условий соответственно с учетом (II) и без учета (III) предположения о пологости оболочки.

Приведенные результаты показывают, что предлагаемое решение в силу принятого предположения о применимости линейной теории пологих оболочек при оценке устойчивости неподкрепленной оболочки, а также при оценке местной устойчивости подкрепленной оболочки совпадает с результатами использования формулы Мизеса с допущением о пологости оболочки. Следует также отметить хорошее совпадение формулы Мизеса и предлагаемого решения с расчетами в конечно-элементном комплексе ANSYS.

При рассмотрении общей потери устойчивости подкрепленных оболочек будем

считать, что шпангоуты имеют тавровый профиль, удовлетворяющий соотношениям $i_j = (1/0,71)^2 F_j^2$, $e_j = 2,73(i_j)^{1/4}$, где F_j – площадь сечения шпангоута, e_j – расстояние от центра тяжести сечения от срединной поверхности оболочки, i_j – собственный момент инерции шпангоута.

Таблица 1. Устойчивость неподкрепленной оболочки

Формула Мизеса		Свободное опирание				Жесткая заделка					
П		НП		Решение авторов		ANSYS		Решение авторов		ANSYS	
<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>	<i>P</i>	<i>n</i>
$U = 1,304$											
66,469	15	65,971	16	66,469	15	66,007	16	121,14	22	121,28	22
66,002	16	66,027	17	66,002	16	66,01	17	120,935	23	120,938	23
66,064	17	66,555	18	66,065	17	66,496	18	121,151	24	121,05	24
$U = 2,607$											
27,703	13	27,674	13	27,703	13	27,71	13	36,596	15	36,996	14
27,381	14	27,34	14	27,382	14	27,361	14	36,878	16	36,595	15
27,816	15	27,766	15	27,816	15	27,785	15	37,674	17	36,864	16
$U = 6,518$											
10,081	9	10,053	9	10,082	9	10,059	9	11,378	9	11,369	9
9,925	10	9,876	10	9,926	10	9,884	10	10,99	10	10,957	10
10,562	11	10,504	11	10,562	11	10,517	11	11,449	11	11,41	11
$U = 13,04$											
5,505	6	5,513	6	5,505	6	5,528	6	5,89	6	5,923	6
4,77	7	4,727	7	4,771	7	4,748	7	5,051	7	5,034	7
5,152	8	5,093	8	5,152	8	5,131	8	5,363	8	5,344	8

В табл. 2 представлены результаты для оболочки, равномерно подкрепленной одинаковыми шпангоутами, для случаев 10 и 6 шпаций и при значении параметра $u = \sqrt[4]{3(1-v^2)} \cdot l / 2\sqrt{rh}$, l – длина шпации, соответственно 1,304 и 2,171. Площадь сечения ребер принята равной 10 см². В первых четырех столбцах таблицы приведены результаты, полученные при использовании формулы В.В. Новожилова [3].

Как и при расчете неподкрепленной оболочки, можно говорить о хорошем совпадении представленных решений. При этом результаты предлагаемого решения и расчета с помощью ANSYS практически совпадают как по величине критической нагрузки, так и по форме потери устойчивости вдоль оболочки при одном и том же числе волн по окружности. Отметим, что при моделировании шпангоутов в ANSYS использовались трехмерные двухузловые балочные конечные элементы с явным заданием сечения.

Результаты табл. 2 соответствуют случаю внутреннего расположения ребер. Результаты расчета общей устойчивости оболочки при внешнем расположении ребер представлены в табл. 3. В первых четырех столбцах таблицы приведены результаты аналитического решения согласно [4]. Решение В.М. Рябова и предлагаемое решение практически совпадают по величине наименьшего критического давления и в общем случае дают величины давлений, меньшие по сравнению с конечно-элементным расчетом. Сопоставление табл. 2 и 3 позволяет сделать вывод, что для выбранных параметров оболочки установка внешних ребер приводит к уменьшению критического давления до 20% по сравнению с подкреплением внутренними ребрами.

Таблица 2. Устойчивость подкрепленной оболочки – внутренние ребра

Формула В.В. Новожилова		Свободное опирание				Жесткая заделка					
П		НП		Решение авторов		ANSYS		Решение авторов		ANSYS	
P	n	P	n	P	n	P	n	P	n	P	n
10 шпаций: $u = 1,304$											
39,047	4	39,528	4	37,722	4	40,61	4	39,362	4	41,343	4
31,058	5	30,369	5	31,307	5	31,365	5	31,784	5	31,864	5
37,125	6	36,216	6	38,668	6	36,614	6	38,045	6	36,952	6
6 шпаций: $u = 2,173$											
33,893	4	34,727	4	33,6	4	35,382	4	34,309	4	36,131	4
22,719	5	22,384	5	22,79	5	22,912	5	23,301	5	23,441	5
24,882	6	24,328	6	24,959	6	24,294	6	25,334	6	24,679	6

Таблица 3. Общая устойчивость подкрепленной оболочки – внешние ребра

Формула В.М. Рябова		Свободное опирание				Жесткая заделка					
П		НП		Решение авторов		ANSYS		Решение авторов		ANSYS	
P	n	P	n	P	n	P	n	P	n	P	n
10 шпаций: $u = 1,304$											
36,812	4	37,602	4	35,824	4	38,982	4	36,588	4	39,785	4
26,7	5	26,347	5	26,565	5	28,785	5	27,109	5	29,351	5
29,289	6	28,748	6	31,017	6	33,272	6	31,404	6	33,673	6
6 шпаций: $u = 2,173$											
19,277	5	19,213	5	19,181	5	20,485	5	19,766	5	21,098	5
18,835	6	18,579	6	19,553	6	20,683	6	19,99	6	21,138	6
21,63	7	21,352	7	23,21	7	24,218	7	23,553	7	24,575	7

Таблица 4. Устойчивость подкрепленной оболочки в случае усиленных ребер

Схема установки усиленных ребер по длине оболочки	Внутренние ребра				Внешние ребра				
	Решение авторов		ANSYS		Решение авторов		ANSYS		
	P	n	P	n	P	n	P	n	
Схема 1									
	40,091	4	41,952	4	36,685	4	39,948	4	
	33,406	5	33,243	5	27,824	5	30,121	5	
	39,882	6	38,568	6	32,472	6	34,766	6	
Схема 2									
	43,787	4	45,385	4	38,955	4	42,476	4	
	38,792	5	38,035	5	31,139	5	33,607	5	
	45,109	6	43,348	6	36,22	6	38,573	6	
Схема 3									
	48,506	4	49,747	4	41,855	4	45,711	4	
	46,61	5	44,812	5	35,64	5	38,311	5	
	54,885	6	51,79	6	42,083	6	44,521	6	
Схема 4									
	52,186	4	53,166	4	44,199	4	48,321	4	
	52,147	5	49,745	5	39,164	5	42,061	5	
	59,457	6	56,386	6	46,089	6	48,604	6	
Схема 5									
	54,294	5	51,227	5	45,33	4	49,292	4	
	54,513	6	52,318	6	39,103	5	41,652	5	
	56,071	7	54,551	7	43,454	6	45,739	6	

Случай установки усиленных ребер представлен в работе на примере оболочки с 10 шпациями и параметром $u = 1,304$. Основная площадь ребра – 10 см². Рассмотрены варианты симметричной установки усиленных ребер площадью 20 см² и центрального усиленного ребра площадью 30 см². Схемы установки ребер и результаты расчетов для классического варианта граничных условий при внешнем и внутреннем расположении ребер приведены в табл. 4. Полученные результаты подтверждают основные выводы, сделанные при рассмотрении оболочки, подкрепленной набором одинаковых ребер. Можно еще раз отметить хорошее совпадение предлагаемого решения с конечно-элементным расчетом. Заметим также, что при перестановке усиленных ребер к центру оболочки наблюдается рост критического давления. В то же время при переходе от схемы 4 установки ребер к схеме 5 в случае внешних ребер оба решения показывают незначительное уменьшение критического давления.

Заключение

Предлагаемый метод решения задачи устойчивости подкрепленной оболочки показал свою эффективность в сравнении с аналитическими решениями и расчетами с помощью комплекса ANSYS.

Литература

1. *Постнов, В.А.* Устойчивость круговой цилиндрической оболочки подкрепленной поперечными ребрами / В.А. Постнов // Труды ЛКИ. – 1964. – Вып. 46. – С. 49–58.
2. *Курнаев, В.М.* Устойчивость при внешнем давлении ортотропных круговых цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами / В.М. Курнаев, В.А. Постнов // Изв. РАН. МТТ. – 1972. – № 6. – С. 129–137.
3. *Гришин, Н.Ф.* Строительная механика подводной лодки / Н.Ф. Гришин, В.А. Родосский. – СПб.: Аверс, 2004. – 286 с.
4. *Рябов, В.М.* Устойчивость подкрепленных поперечным набором цилиндрических оболочек при внешнем давлении и осевом сжатии / В.М. Рябов // Расчет пространственных конструкций. Вып. 12. – М.: Стройиздат, 1969. – С. 156–167.

[05. 06. 2007]

ABOUT STABILITY OF A REINFORCED CYLINDRICAL SHELL

V. A. Postnov, G.A. Tumashik, I.A. Moskvina

The questions of stability of a circular cylindrical shell supported with circular ribs are considered. The solution is based on the exact statement which is taking into account a discrete location of circular ribs along the shell and the conditions of their conjunction with the middle shell surface. The influence of the boundary conditions, the external and internal arrangement of the ribs, the installation of the strengthened ribs on the value of critical pressure of general stability is investigated. The comparison of the obtained results with the some analytical solutions and numerical results obtained by usage of the finite-elements complex ANSYS is fulfilled.