УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-4-461-469

О ВЕТВЛЕНИИ РАВНОВЕСИЙ СЖАТОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ НА НЕЛИНЕЙНО УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Пешхоев И.М., Соболь Б.В., Левченков А.М.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 29.08.2023

Рассматривается задача о потере устойчивости и послекритическом поведении сжатого упругого стержня на нелинейно упругом основании, находящегося под действием малого поперечного давления. Исследование проводится на основе нелинейного уравнения равновесия, полученного с учетом точной формулы кривизны осевой линии стержня, при этом кривизна аппроксимируется асимптотической формулой третьего порядка относительно прогиба. Краевые условия соответствуют свободному защемлению или подвижной шарнирной опоре концов стержня. Исследуется влияние малой поперечной нагрузки и параметров реакции нелинейно упругого основания на критические нагрузки потери устойчивости. Критическая нагрузка определяется из задачи на собственные значения, полученной линеаризацией уравнения равновесия. Проблема собственных значений для случая свободного защемления концов стержня решается вариационно-разностным методом. Для исследования послекритического поведения сжатого стержня применяется метод Ляпунова – Шмидта в сочетании с численными методами вычисления коэффициентов системы уравнений разветвления. Рассмотрены случаи ветвления равновесий сжатого стержня по одной собственной форме. Построены асимптотические формулы новых равновесий в окрестности точки бифуркации с учетом малой нормальной нагрузки. Реакция основания рассматривается в виде кубической функции от прогиба. Установлены условия для параметров нелинейности упругого основания, при выполнении которых сжатый стержень становится чувствительным к несовершенствам в виде малой поперечной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов для классического случая линейной формулы выражения кривизны осевой линии стержня через вторую производную прогиба и случая, когда кривизна аппроксимируется асимптотической формулой третьего порядка относительно прогиба.

Ключевые слова: упругий стержень, ветвление равновесий, критическая нагрузка, нелинейно упругое основание, метод Ляпунова – Шмидта.

Введение

Амазиго и Франк [1] с помощью метода возмущений по параметру нагрузки исследовали вопрос о потере устойчивости по одной собственной форме шарнирно опертого стержня и получили асимптотическую формулу для статической верхней нагрузки потери устойчивости. Хансен [2] провел анализ устойчивости по двум собственным формам продольно сжатого шарнирно опертого стержня на квадратично упругом основании и классифицировал возможные типы потери устойчивости в соответствии с теорией катастроф. Седиги и Ширази в статье [3] предложили формулировку задачи о колебаниях балки на линейно упругом основании на основе нелинейного уравнения равновесия, построенного с помощью аппроксимации полиномом пятого порядка зависимости кривизны осевой линии балки от прогиба [4]. Методом разложения по параметру решено частотное уравнение. С использованием первого члена разложения решения описаны колебания балки на упругом основании. В статье [4] обсуждается реакция идеальных и геометрически несовершенных упругих колонн на линейно упругом основании после потери устойчивости. Установлено, что критическое состояние идеальных колонн представляет собой устойчивую симметричную точку бифуркации и, следовательно, отсутствует их чувствительность к исходным геометрическим несовершенствам.

В [5] рассмотрена задача о ветвлении равновесий сжатого стержня на нелинейно упругом основании. Построены асимптотические формулы новых решений в окрестности тривиального решения. В статье [6] с использованием методов асимптотики представлен анализ динамического выпучивания защемленной конечной неидеальной вязкодемпфированной колонны, лежащей на квадратично-кубическом упругом основании. Предлагаемое основное уравнение содержит два малых независимых параметра, которые используются в асимптотических разложениях. Показано, что динамическая нагрузка потери устойчивости колонны уменьшается при наличии дефектов, а также с увеличением демпфирования. В [7] рассмотрена нелинейная краевая задача о равновесии сжатого упругого стержня на нелинейном основании. Обсуждаются численные и аналитические методы решения: метод Ньютона – Канторовича и метод Ляпунова – Шмидта. В статье [8] рассматривается несовершенная конечная балка, лежащая на нелинейном основании, безразмерная жесткость которой уменьшается с 1 до k по мере увеличения прогиба балки. Траектории равновесия могут иметь предельную точку, существование которой связано с размером дефекта и параметром жесткости k посредством явного условия. В [9] рассматривается закритический изгиб продольно сжатого упругого стержня, имеющего в шарнирных опорах нелинейно упругое сопротивление повороту его оси. Прогиб представлен в виде тригонометрического ряда, через который выражен угол наклона оси стержня. Получено разрешающее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение. Приводятся результаты численных исследований закритического поведения стержней при различных геометрических и механических характеристиках стержней и опор.

В настоящей статье на основе нелинейного уравнения равновесия сжатого стержня на нелинейно упругом основании, которое получено с помощью аппроксимации полиномом третьего порядка зависимости кривизны осевой линии стержня от прогиба, исследуется влияние малого поперечного давления на потерю устойчивости и послекритическое поведение равновесий.

Уравнение равновесия и постановка задачи

Рассмотрим лежащий на нелинейно упругом основании упругий стержень, который сжимается усилиями P вдоль своей оси и находится под действием малой поперечной нагрузки $\xi G(X)$, $\xi \ll 1$. Уравнение равновесия стержня с учетом точной формулы кривизны можно записать в виде [1, 10]:

$$\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{EI}{[1+(dW/dX)^2]^{3/2}}\right)+P\frac{d^2W}{dX^2}+K_1W-K_3W^3=\xi G,\quad -L<X<L,\qquad (1)$$

$$1)\ W\big|_{|X|=L}=0,\quad \frac{dW}{dX}\bigg|_{|X|=L}=0,\quad 2)\ W\big|_{|X|=L}=0,\quad \frac{d^2W}{dX^2}\bigg|_{|X|=L}=0.\qquad (2)$$

Здесь функция $W(X)$ – прогиб стержня в точке X; $2L$ – длина стержня; E – модуль Юнга; I – момент инерции поперечного сечения; EI – изгибная жесткость. Краевые условия 1) в (2) соответствуют свободному защемлению концов стержня, а условия 2) – подвижному шарнирному опиранию; $K_1W-K_3W^3$ – сила реакции основания на единицу длины стержня [1, 2], $K_1>0$. При $K_3>0$ основание называется «размягчающимся» (softening), а при $K_3<0$ – «упрочняющимся» (hardening) [1]. В статье [11] Е. Рейсснер рассмотрел наряду с кубическим основанием квадратичное основание $K_1W-K_2W^2$. Предполагается, что энергия деформации упругого основания положительна, то есть выполняется условие

$$\int\limits_{-L}^{L}\left(\frac{K_1W^2}{2}-\frac{K_3W^4}{4}\right)dX>0.$$

Представляя кривизну осевой линии стержня асимптотическим приближением третьего порядка относительно прогиба

$$\frac{d^2W/dX^2}{[1+(dW/dX)^2]^{3/2}}\simeq\frac{d^2W}{dX^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dW}{dX}\right)^2\right]$$

и полагая $EI=\text{const}$, запишем уравнение (1) в виде

$$EI\frac{d^2}{dX^2}\left(\frac{d^2W}{dX^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dW}{dX}\right)^2\right]\right)+P\frac{d^2W}{dX^2}+K_1W-K_3W^3=\xi G.$$

Переходя к безразмерным переменным по формулам

$$x=Lx,\quad W(X)=Lw(x),\quad P=\frac{EI}{L^2}p,\quad G(X)=\frac{EI}{L^3}g(x),\quad K_1=\frac{EI}{L^4}k_1,\quad K_3=\frac{EI}{L^6}k_3,$$

получим уравнение равновесия и краевые условия в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\left[1-\frac{3}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]\right)+p\frac{d^2w}{dx^2}+k_1w-k_3w^3=\xi g,\quad -1<x<1,\qquad (3)$$

$$1)\ w\big|_{|x|=1}=\frac{dw}{dx}\bigg|_{|x|=1}=0,\qquad 2)\ w\big|_{|x|=1}=\frac{d^2w}{dx^2}\bigg|_{|x|=1}=0.\qquad (4)$$

Метод решения

Пусть гильбертово пространство E^2 – замыкание множества функций $u(x)$, $v(x)$ с нормой, определяемой скалярным произведением $(u,v)_{\mathrm{E}^2}=\int_{-1}^{1}uv\,dx$, $u,v\in\mathrm{E}^2$, E^1 – замыкание линейного множества бесконечно дифференцируемых в области $[-1, 1]$

функций $u(x)$, $v(x)$, удовлетворяющих одному из краевых условий (4), с конечной нормой, порожденной скалярным произведением

$$(u,v)_{E^1} = \int_{-1}^{1}\left(\frac{d^4u}{dx^4}\frac{d^4v}{dx^4} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2} + uv\right)dx, \quad u,v \in E^1.$$

Считая функцию $g(x)$ достаточно гладкой в области [–1, 1], запишем краевую задачу (3) с одним из краевых условий (4) как нелинейное операторное уравнение

$$\mathrm{M}_0 u = \mathrm{T}_0 u + k_3 u^3 + \xi g, \quad u \in E^1, \tag{5}$$

$$\mathrm{M}_0 u = \frac{d^4u}{dx^4} + p\frac{d^2u}{dx^2} + k_1 u, \quad \mathrm{T}u = \frac{3}{2}\frac{d^4u}{dx^4}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 9\frac{d^3u}{dx^3}\frac{du}{dx}\frac{d^2u}{dx^2} + 3\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^3.$$

Отметим здесь, что слагаемое Тu в правой части уравнения (5) обусловлено учетом нелинейности формулы кривизны стержня в уравнении (3). Если кривизна стержня аппроксимируется второй производной от прогиба, то Тu = 0.

При $\xi = 0$ уравнение (5) имеет тривиальное решение $u^*(x) = 0$ при любых значениях p. Точка бифуркации p_0 уравнения (5) определяется в [12] как наименьшее собственное число краевой задачи $M_0 u = 0$, которая получена линеаризацией уравнения (5) на тривиальном решении.

Пусть $p = p_0 + \lambda$, $u = u^* + \omega$ ($u = \omega$ при $u^* = 0$). Запишем уравнение для малых возмущений λ, ω в виде

$$\mathrm{M}_0\omega = \lambda \mathrm{C}\omega + \mathrm{T}\omega + k_3\omega^3 + \xi g, \tag{6}$$

$$\mathrm{C}\omega = -\omega_{xx}, \quad \mathrm{C}: \mathrm{E}^1 \to \mathrm{E}^2.$$

Линеаризованное уравнение $M_0\omega = 0$ сводится к краевой задаче на собственные значения, в которой при заданном значении параметра k_1 требуется определить собственные значения параметра p и соответствующие собственные функции:

$$\frac{d^4\omega}{dx^4} + p\frac{d^2\omega}{dx^2} + k_1\omega = 0, \tag{7}$$

$$1)\ \ \omega\big|_{|x|=1} = \frac{d\omega}{dx}\bigg|_{|x|=1} = 0, \qquad 2)\ \ \omega\big|_{|x|=1} = \frac{d^2\omega}{dx^2}\bigg|_{|x|=1} = 0, \tag{8}$$

где функция ω удовлетворяет одному из краевых условий (8). В случае краевых условий 2) в (8) задача (7) имеет точное решение

$$\omega_n(x) = \sin\frac{\pi n(x+1)}{2}, \quad p_n = \frac{\pi^4 n^4 + 16k_1}{4\pi^2 n^2}. \tag{9}$$

В случае краевых условий 1) в (8) для решения задачи на собственные значения (7) можно применить вариационно-разностный метод [13]. Пусть p_0 – наименьшее собственное значение задачи (7) при заданных значениях параметра k_1 и ему отвечает единственная собственная функция ω. Строим оператор Шмидта [12] в виде

$$\mathrm{M}_1 u = \mathrm{M}_0 u + a\mu\omega, \quad \mu = (\mathrm{M}_1 u, \omega)_{\mathrm{E}^2}, \quad a\int_{-1}^{1}\omega^2 dx = 1. \tag{10}$$

Нелинейное уравнение (5) с учетом (10) приводится к уравнению

$$\mathrm{M}_1 u = a\mu\omega + \lambda \mathrm{C} u + \mathrm{T} u + k_3 u^3 + \xi g. \qquad (11)$$

Решение уравнения (11) будем искать в виде ряда

$$u = u_{100}\mu + u_{010}\lambda + u_{001}\xi + \sum_{i+j+k\geq 2} u_{ijk}\,\mu^i \lambda^j \xi^k \qquad (12)$$

и, приравнивая нулю выражения при степенях $\mu^i \lambda^j \xi^k$, выведем уравнения для определения коэффициентов $\mathrm{M}_1 u_{ijk} = f_{ijk}$. Функции f_{ijk} находятся с помощью правой части (11). Находим $f_{100} = a\omega$, отсюда следует, что $u_{100} = \omega$ и, учитывая это, получим $f_{010} = 0$, $f_{001} = g$, $f_{110} = -d^2/dx^2$, $f_{200} = 0$, $f_{300} = \mathrm{T}\omega + k_3\omega^3$. Учитывая (12), из второго уравнения (10) получим уравнение разветвления [12]

$$\sum_{i+j+k>2} L_{ijk}\,\mu^i \lambda^j \xi^k = \mu, \quad L_{ijk} = (f_{ijk}, \omega)_{\mathrm{E}^2}. \qquad (13)$$

Будем считать, что собственному значению p_0 задачи (7) соответствуют четная собственная функция $\omega(x)$. Полагая, что $g(x)$ – четная функция, с учетом выражений для f_{ijk} по формулам (13) находим коэффициенты уравнения разветвления для степеней до третьего порядка включительно:

$$\begin{gathered} L_{100} = a\int_{-1}^{1}\omega^2 dx = 1, \quad L_{001} = \int_{-1}^{1} g\omega dx, \quad L_{110} = -\int_{-1}^{1}\omega_{xx}\omega dx = \int_{-1}^{1}\omega_x^2 dx > 0, \\ L_{200} = L_{210} = 0, \quad L_{300} = \int_{-1}^{1} T\omega\,\omega dx + k_3\int_{-1}^{1}\omega^4 dx. \end{gathered} \qquad (14)$$

Уравнение разветвления (13) имеет вид

$$\Phi(\mu) = b\mu^3 - \lambda\mu + d\xi = 0, \quad b = -\frac{L_{300}}{L_{110}}, \quad d = -\frac{L_{001}}{L_{110}}. \qquad (15)$$

Решая уравнение (15) с учетом условия потери устойчивости [14, 15]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} = 3b\mu^2 - \lambda = 0, \qquad (16)$$

получим, что при $b < 0$ ($b > 0$) критическое значение $p_s < p_0$ ($p_s > p_0$) определяется соотношением

$$p_s - p_0 = \begin{cases} -\left(1{,}5\,|d\xi|\sqrt{-3b}\right)^{2/3}, & b < 0, \\ \left(1{,}5\,|d\xi|\sqrt{3b}\right)^{2/3}, & b \geq 0. \end{cases} \qquad (17)$$

При этом в левой (правой) малой полуокрестности p_0 существует пара смежных с тривиальным решением $u^* = 0$ малых решений уравнения (5) с асимптотическими представлениями

$$\widehat{u} = \pm\sqrt{\frac{\lambda_s}{3b}}\,\omega + \xi u_{001}, \quad \lambda_s = p_s - p_0, \qquad (18)$$

где функция u_{001} определяется из уравнения

$$\mathrm{M}_0 u_{001} = a\sqrt{\frac{\lambda_s}{3b}}\,\omega = g. \qquad (19)$$

Уравнения вида (15) впервые были получены В.Т. Койтером [16], а затем Б. Будянским и Д.У. Хатчинсоном в статьях [17, 18]. Коэффициент b (параметр Койтера) называется параметром чувствительности конструкции к несовершенствам. Если $b < 0$, то сжатый стержень на нелинейно упругом основании считается чувствительным к несовершенствам (в виде малой поперечной нагрузки), так как в этом случае критическая нагрузка потери устойчивости p_s меньше критической нагрузки потери устойчивости p_0 идеального стержня на нелинейно упругом основании. Учитывая формулы (14), (15), находим, что условие $b < 0$ выполняется при $L_{300} > 0$, из чего следует

$$k_3 > k_3^* = -\frac{\int_{-1}^{1} \mathrm{T}\omega\,\omega dx}{\int_{-1}^{1} \omega^4 dx}. \tag{20}$$

Получилось условие для значений коэффициента k_3, характеризующего нелинейную часть реакции упругого основания, при выполнении которого сжатый стержень на нелинейно упругом основании считается чувствительным к несовершенствам. Значение k_3^* является «пороговым» значением параметра k_3, при превышении которого сжатый стержень на кубическом основании становится чувствительным к несовершенствам.

Отметим, что в случае линейной формулы выражения кривизны осевой линии стержня через вторую производную прогиба в уравнении (5) будет $\mathrm{T}\omega = 0$ и $k_3^* = 0$. Отсюда следует, что сжатый стержень на «размягчающемся» основании ($k_3 > 0$) чувствителен к несовершенствам в виде малого поперечного давления – малое поперечное давление снижает критическую нагрузку потери устойчивости. Стержень на «упрочняющемся» основании ($k_3 < 0$) не снижает свою несущую способность при малых несовершенствах.

Результаты численных расчетов

Пример 1. Рассмотрим задачу (7) с краевыми условиями 2) в (8). Учитывая точные формулы для собственных значений и собственных функций (9), находим, что при $0 < k_1 < 24{,}3$ наименьшее собственное значение $p_1 = (\pi^4 + 16k_1)/(4\pi^2)$ и соответствующая собственная функция $\omega(x) = \sin(\pi(x+1)/2)$. С учетом (5), (9) и (14) получаем точное значение коэффициента L_{300} и по формуле (20) находим $k_3^* = -\pi^6/128 \approx -7{,}51$. Отсюда следует, что при $0 < k_1 < 24{,}3$ и $k_3 > k_3^*$ сжатый стержень на кубическом основании становится чувствительным к несовершенствам в виде малой поперечной нагрузки. При $24{,}3 < k_1 < 219{,}2$ наименьшее собственное значение $p_2 = \pi^4/4 + k_1$ и пороговое значение параметра k_3 равно $k_3^* = -\pi^6/2 \approx -480{,}7$.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу (7) с краевыми условиями 1) в (8). С применением вариационно-разностного метода [13, 19] при фиксированных значениях параметра k_1 были найдены критические значения p_0 и соответствующие собственные функции $\omega(x)$ в виде разностных функций. С использованием квадратурных формул Симпсона [20] для вычисления определенного интеграла по формуле (20) при фиксированных значениях k_1 найдены пороговые значения параметра k_3. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1

Пороговые значения параметра k_3^* (подвижное защемление концов)

k_1	0	10	20	50	100
k_3^*	–41,2	–44,9	–50,4	–90,4	–1590

Заключение

Построены асимптотические формулы новых равновесий в окрестности точки бифуркации с учетом малой нормальной нагрузки. Установлены условия для параметров нелинейности упругого основания, при выполнении которых сжатый стержень становится чувствительным к несовершенствам в виде малой поперечной нагрузки. Проведено сравнение полученных результатов для классического случая линейной формулы выражения кривизны осевой линии стержня через вторую производную прогиба и случая, когда кривизна аппроксимируется асимптотической формулой третьего порядка относительно прогиба. Установлено, что в классическом случае сжатый стержень на кубическом «размягчающемся» основании является чувствительным к малым поперечным нагрузкам, а стержень на «упрочняющемся» основании не снижает свою несущую способность под действием малых поперечных нагрузок.

Список литературы

1. Amasigo J.S., Frank D. Dinamic buckling of an imperfect column on nonlinear foundation. *Qwarterly of Applied Mathematics*. 1973. Vol. XXXI. No 1. P. 1–9.

2. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA Journal.* 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644. https://doi.org/10.2514/3.7463.

3. Седиги Х.М., Ширази К.Х. Исследование поперечных колебаний балки на упругом основании на основе нелинейной теории пятого порядка с использованием точного выражения для кривизны балки. *ПМТФ*. 2014. Т. 55. №6. С. 186–194.

4. Kounadis A.N., Mallis J., Sbarouni A. Postbuckling analysis of columns resting on an elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*. 2006. Vol. 75. P. 395–404. DOI: 10.1007/s00419-005-0434-1.

5. Пешхоев И.М., Срубщик Л.С. *О выпучивании сжатого стержня на нелинейно упругом основании*. Ростов. ун-т. Ростов-на-Дону, 28 с. 1990. Деп. в ВИНИТИ 21.11.1990, №5856-В-90.

6. Bassey J., Ette A., Joy C., Osuji A. Dynamic buckling of a clamped finite column resting on a non-linear elastic foundation. *Asian Research Journal of Mathematics.* 2019. Vol. 14. Iss. 4. P. 1–47. DOI: 10.9734/arjom/2019/v14i430132.

7. Peshkhoev I.M., Kanygin G.I., Fatkhi D.V. Methods for solving the nonlinear equilibrium equation of a compressed elastic rod. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2131(3). Article No 032085. DOI: 10.1088/1742-6596/2131/3/032085.

8. Lagrange R. Limit point buckling of a finite beam on a nonlinear foundation. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2014. Vol. 4. Iss. 3. Article No 031001. DOI: 10.1063/2.1403101.

9. Каюмов Р.А. Закритическое поведение сжатых стержней с нелинейно упругими опорами. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2022. №3. С. 23–31. DOI: 10.15593/perm.mech/2022.3.03.

10. Вольмир А.С. *Устойчивость упругих систем*. М.: Физматгиз, 1963. 880 с.

11. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57 DOI: 10.1002/SAPM197049145.

12. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1969. 528 с.

13. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике*. М.: Наука, 1970. 512 с.

14. Срубщик Л.С., Треногин В.А. О выпучивании гибких пластин. *ПММ*. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 721–727.

15. Friedrichs K.O., Stoker J.J. The non-linear boundary value problem of the buckled plate. *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*. 1939. Vol. 25(10). P. 535–540. DOI: 10.1073/pnas.25.10.535.

16. Koiter W.T. Elastic stability and postbuckling behaviour in nonlinear problems. *Nonlinear*

Problems: Proceedings of a Symposium. Ed. R.E. Langer. Madison: University of Wisconsin Press, 1963. P. 257–275.

17. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*. 1974. Vol. 14. P. 1–65. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9.

18. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. No 9. P. 1505–1510. https://doi.org/10.2514/3.3727.

19. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики*. М.: Наука, 1977. 456 с.

20. Бахвалов Н.С. *Численные методы. Анализ, алгебра, уравнения*. М.: Наука, 1973. 632 с.

References

1. Amasigo J.S., Frank D. Dinamic buckling of an imperfect column on nonlinear foundation. *Q. Appl. Math*. 1973. Vol. XXXI. No 1. P. 1–9.

2. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA J.* 1977. Vol. 15. No 11. P. 1638–1644. https://doi.org/10.2514/3.7463.

3. Sedighi H.M., Shirazi K.H. Accurate investigation of lateral vibrations of a quintic nonlinear beam on an elastic foundation: using an exact formulation of the beam curvature. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*. 2014. Vol. 55. No 6. P. 1066–1074. DOI: 10.1134/S0021894414060194.

4. Kounadis A.N., Mallis J., Sbarouni A. Postbuckling analysis of columns resting on an elastic foundation. *Arch. Appl. Mech*. 2006. Vol. 75. P. 395–404. DOI: 10.1007/s00419-005-0434-1.

5. Peshkhoev I.M., Srubshchik L.S. *O vypuchivanii szhatogo sterzhnya na nelineyno uprugom osnovanii* [*On Buckling of a Compressed Rod on a Nonlinearly Elastic Foundation*]. Rostov university. Rostov-on-Don, 1990. 28 p. Deposited at VINITI. 21.11. 1990. No 5856-V-90 (In Russian).

6. Bassey J., Ette A., Joy C., Osuji A. Dynamic buckling of a clamped finite column resting on a non-linear elastic foundation. *Asian Research Journal of Mathematics.* 2019. Vol. 14. Iss. 4. P. 1–47. DOI: 10.9734/arjom/2019/v14i430132.

7. Peshkhoev I.M., Kanygin G.I., Fatkhi D.V. Methods for solving the nonlinear equilibrium equation of a compressed elastic rod. *J. Phys. Conf. Ser*. 2021. Vol. 2131(3). Article No 032085. DOI: 10.1088/1742-6596/2131/3/032085.

8. Lagrange R. Limit point buckling of a finite beam on a nonlinear foundation. *Theoretical and Applied Mechanics Letters*. 2014. Vol. 4. Iss. 3. Article No 031001. DOI: 10.1063/2.1403101.

9. Kayumov R.A. Zakriticheskoe povedenie szhatykh sterzhney s nelineyno uprugimi oporami [Postbuckling behavior of compressed bars with nonlinearly elastic supports]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatelskogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika* [*PNRPU Mechanics Bulletin*]. 2022. No 3. P. 23–31 (In Russian).

10. Volmir A.S. *Ustoychivost uprugikh system* [*Stability of Elastic Systems*]. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1963. 880 p. (In Russian).

11. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Stud. Appl. Math*. 1970. Vol. XLIX. No 1. P. 45–57 DOI: 10.1002/SAPM197049145.

12. Vaynberg M.M., Trenogin V.A. *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [*Branching Theory for Solutions of Nonlinear Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1969. 528 p. (In Russian).

13. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [*Variational Methods in Mathematical Physics*]. Moscow. Nauka Publ. 1970. 512 p. (In Russian).

14. Srubshchik L.S., Trenogin V.A. O vypuchivanii gibkikh plastin [About buckling of flexible plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 1968. Vol. 32. No 4. P. 721–727 (In Russian).

15. Friedrichs K.O., Stoker J.J. The non-linear boundary value problem of the buckled plate. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 1939. Vol. 25(10). P. 535–540. DOI: 10.1073/pnas.25.10.535.

16. Koiter W.T. Elastic stability and postbuckling behaviour in nonlinear problems. *Nonlinear Problems: Proceedings of a Symposium*. Ed. R.E. Langer. Madison. University of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.

17. Budiansky B. Theory of buckling and postbuckling behaviour of elastic structures. *Adv. Appl. Mech*. 1974. Vol. 14. P. 1–65. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9.

18. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA J*. 1966. Vol. 4. No 9. P. 1505–1510. https://doi.org/10.2514/3.3727.

19. Marchuk G.I. *Metody vychislitelnoy matematiki* [*Methods of Computational Mathematics*]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 456 p. (In Russian).

20. Bakhvalov N.S. *Chislennye metody. Analiz, algebra, uravneniya* [*Numerical Methods. Analysis. Algebra. Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1973. 632 p. (In Russian).

ON BRANCHING OF EQUILIBRIUMS OF A COMPRESSED ELASTIC ROD ON A NONLINEAR ELASTIC BASE

Peshkhoev I.M., Sobol B.V., Levchenkov A.M.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

peshkhoev@rambler.ru

Received by the Editor 2023/08/29

The problem of buckling and postcritical behavior of a compressed elastic rod on a non-linearly elastic foundation under the action of a small transverse pressure is considered. The study is carried out on the basis of a non-linear equilibrium equation obtained taking into account the exact formula for the curvature of the axial line of the rod, while the curvature is approximated by a third-order asymptotic formula with respect to deflection. The boundary conditions correspond to free pinching or a movable hinged support of the ends of the rod. The influence of a small transverse load and the reaction parameters of a nonlinearly elastic foundation on the critical buckling loads is studied. The critical load is determined from the eigenvalue problem obtained by linearization of the equilibrium equation. The problem of eigenvalues for the case of free pinching of the ends of the rod is solved by the variational-difference method. To study the post-critical behavior of a compressed rod, the Lyapunov – Schmidt method is used in combination with numerical methods for calculating the coefficients of the system of branching equations. The cases of branching of equilibria of a compressed rod along one eigenmode are considered. Asymptotic formulas for new equilibria are constructed in the vicinity of the bifurcation point, taking into account a small normal load. The base reaction is considered as a cubic function of deflection. Conditions are established for the parameters of the nonlinearity of the elastic foundation, under which the compressed rod becomes sensitive to imperfections in the form of a small transverse load. The obtained results are compared for the classical case of the linear formula for expressing the curvature of the axial line of the rod through the second derivative of the deflection and the case when the curvature is approximated by a third-order asymptotic formula with respect to the deflection.

Keywords: elastic rod, equilibrium branching, critical load, non-linear elastic foundation, Lyapunov – Schmidt method.