УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-404-413

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ И МЕХАНИЧЕСКАЯ ВЗАИМОСВЯЗЬ ТРЕЩИН ГРИФФИТСА И НОВОГО ТИПА В НЕКОТОРЫХ НАНОТЕХНОЛОГИЯХ*

© 2023 г. **Бабешко В.А.**[1], **Евдокимова О.В.**[2], **Бабешко О.М.**[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 26.06.2023

Впервые математически строго строятся совместно модели трещин Гриффитса и трещин нового типа. Модели представляют собой объекты со сближением торцами двух полубесконечных деформируемых штампов, расположенных на деформируемом многослойном основании.

Механизм разрушения среды трещинами нового типа кардинально отличается от механизма разрушения среды трещинами Гриффитса и пока изучен слабо. Трещины Гриффитса с гладкой границей формируются как результат сжатия с боков эллиптической полости в пластине. Трещины нового типа имеют кусочно-гладкую границу, получаются в результате замены эллипса прямоугольником, сжимаемым с боков. Построение моделей основано именно на этих описаниях происхождения трещин, формируемых торцами сближающихся деформируемых штампов. При создании моделей применяются результаты ранее выполненных и опубликованных исследований по построению точных решений ряда интегральных уравнений контактных задач. Установлено, что разрушение среды в случае трещин нового типа происходит раньше, чем в случае трещин Гриффитса, что, по мнению авторов, объясняет причину разрушения трещин Гриффитса в эксперименте раньше, чем предсказывает теория. По предположению Гриффитса, это объясняется наличием микротрещин на границе основной трещины. Авторы склонны считать, что причиной является трансформация одного типа трещин в другой при определенных условиях. Полученные результаты позволяют сопоставлять и количественно оценивать поведение среды при наличии как одного, так и другого типа трещин. Разработанный подход применим для исследования взаимных переходов трещин Гриффитса и трещин нового типа, а также для построения моделей слипания смоченных наночастиц.

Ключевые слова: трещины Гриффитса, трещины нового типа, математические модели, интегральные уравнения, факторизация.

Введение

В предлагаемой статье используются результаты достаточно ограниченного числа публикаций по точному решению контактных задач для деформируемых штам-

* Выполнено при финансовой поддержке РНФ (проект 22-29-00213).

пов на деформируемом основании. Поскольку, как показано в [1], контактные задачи для деформируемых штампов требуют предварительного решения контактных задач для абсолютно жесткого штампа, следует упомянуть ряд оригинальных работ для такого штампа [2–16], в которых рассмотрены случаи контактных задач о действии на многослойное основание деформируемых штампов в форме полуплоскости, полосы, четверти плоскости. Разработанные подходы позволили построить точные решения контактных задач, выделить в динамических задачах дисперсионные уравнения, построить точные решения интегральных уравнений Винера – Хопфа на конечном отрезке [17]. Однако в этих публикациях недостаточно полно изложена связь локальных свойств трещин Гриффитса и трещин нового типа [18, 19]. В настоящей статье выполнено исследование, включающее в себя изучение локальных свойств трещин Гриффитса и трещин нового типа, основанное на правилах их построения как объектов сжатия эллиптической и прямоугольной полостей. Также следует отметить, что с применением универсального метода моделирования [20] открывается возможность в нанотехнологиях более глубоко изучать вопросы поведения наночастиц с усложненными реологическими свойствами, диктуемыми способами выращивания наноматериалов. При этом можно выбором типов реологии оптимизировать процесс слипания наночастиц.

1. Постановка задачи

Для построения математических моделей трещин Гриффитса и трещин нового типа рассматривается многослойная линейно деформируемая среда с действующими на поверхности деформируемыми штампами. На ее верхней границе вводится декартова система координат таким образом, что ось Ox_3 направлена по внешней нормали, остальные оси Ox_1, Ox_2 лежат в касательной плоскости. Предполагается, что в областях $\Omega_{-A}(-\infty \le x_1 \le -A, |x_2| \le \infty)$, $\Omega_A(A \le x_1 \le \infty, |x_2| \le \infty)$ действуют деформируемые штампы, контактирующие без трения с многослойным основанием.

Контактная задача, отвечающая этой постановке, описывается системой интегральных уравнений вида [1, 2]:

$$\iint_{\Omega_{-A}} h(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q_{-A}(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 +$$

$$+\iint_{\Omega_A} h(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q_A(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = u_r(x_1,x_2), \ \ x_1, x_2 \in \Omega_r, \ r=-A, A,$$

$$\langle \alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad h(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2}\iint_{R^2} H(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathrm{e}^{-i\langle \alpha, x\rangle}\,d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{1}$$

$$H(\alpha_1,\alpha_2) = O(u^{-1}), \quad u = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty.$$

Здесь $q_r(x_1,x_2)$ – контактные напряжения; $u_r(x_1,x_2)$ представляют собой суммарный результат перемещений деформируемого основания и деформируемого штампа. Уравнения имеют достаточно сложное выражение, содержащее функционалы от контактных напряжений. В статье [1] показано, что они однозначно определяются, не влияя на качественные свойства решения. Считаем, что функция $H(\alpha_1,\alpha_2)$ – четная по обеим переменным мероморфная функция двух комплексных переменных α_k, $k = 1, 2$. Заметим, что при переходе от случая абсолютно жесткого штампа к деформируемому в рассматриваемой контактной задаче штампу с материалом, описываемым уравнением Гельмгольца, функция $H(u)$ содержит слагаемое $c(u^2 + k^2)^{-1}$, $k \ge 0$.

Следуя [1], к двумерному интегральному уравнению (1) применим преобразование Фурье по координате x_2. В результате место координаты x_2 у каждой подвергнутой преобразованию Фурье функции займет свободный параметр преобразования Фурье α_2. Чтобы упростить формулы, временно скроем параметр α_2 введением обозначений

$$h(x_1)=h(x_1,\alpha_2),\quad q_r(\xi_1)=q_r(\xi_1,\alpha_2),\quad h(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\alpha_1)\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1,$$
$$H(\alpha_1)=H(\alpha_1,\alpha_2),\quad u_r(x_1)=u_r(x_1,\alpha_2),\quad r=-A,A. \tag{2}$$

В результате принятых замен получим систему одномерных интегральных уравнений с двумя неизвестными вида

$$\int_{-\infty}^{-A}h(x_1-\xi_1)q_{-A}(\xi_1)\,d\xi_1+\int_{A}^{\infty}h(x_1-\xi_1)q_A(\xi_1)d\xi_1=u_{-A}(x_1),\ -\infty<x_1\le -A,$$
$$\int_{-\infty}^{-A}h(x_1-\xi_1)q_{-A}(\xi_1)d\xi_1+\int_{A}^{\infty}h(x_1-\xi_1)q_A(\xi_1)d\xi_1=u_A(x_1),\ A\le x_1\le\infty. \tag{3}$$

В случае многослойной среды функция $H(\alpha_1)$, являясь мероморфной, имеет счетное количество нулей z_{mo} и полюсов ξ_{so}. Им свойственно асимптотическое поведение вида

$$\xi_{so}=i\nu(s+0{,}5)(1+o(1)),\quad s\to\infty,\quad z_{mo}=i\nu\cdot m(1+o(1)),\ m\to\infty, v=\mathrm{const}>0.$$

Составим в преобразованиях Фурье уравнение перемещения всей поверхности многослойной среды с учетом обеих контактных зон. Для этого продлим систему интегральных уравнений (3) на всю ось, добавив справа на отрезке $[-A,A]$ новую неизвестную функцию $w_0(x_1)$, представляющую собой перемещение поверхности среды в промежутках между штампами. Применив к этой системе уравнений преобразование Фурье по x_1, приходим к функциональному уравнению вида

$$H(\alpha_1)Q_0^-(\alpha_1)+W_0(\alpha_1)+H(\alpha_1)Q_0^+(\alpha_1)=U_0^-(\alpha_1)+U_0^+(\alpha_1),$$
$$Q_0^-(\alpha_1)=\int_{-\infty}^{-A}q_{-A}^-(x_1)\mathrm{e}^{ix_1\alpha_1}\,dx_1,\quad Q_0^+(\alpha_1)=\int_{A}^{\infty}q_A^+(x_1)\mathrm{e}^{ix_1\alpha_1}\,dx_1, \tag{4}$$
$$U_0^-(\alpha_1)=\int_{-\infty}^{-A}u_{-A}(x_1)\mathrm{e}^{ix_1\alpha_1}\,dx_1,\quad U_0^+(\alpha_1)=\int_{A}^{\infty}u_A(x_1)\mathrm{e}^{ix_1\alpha_1}\,dx_1.$$

Здесь $W_0(\alpha_1)$ – преобразование Фурье функции перемещения $w_0(x_1)$ в свободной от напряжений зоне между штампами. В том случае, когда штампы сошлись торцами, имеем $W_0(\alpha_1)=0$ и уравнение принимает вид

$$H(\alpha_1)Q_0^-(\alpha_1)+H(\alpha_1)Q_0^+(\alpha_1)=U_0^-(\alpha_1)+U_0^+(\alpha_1). \tag{5}$$

Уравнения (4), (5) исследованы в [18], где показано, что они имеют сингулярную концентрацию контактных напряжений в зоне сближения штампов. Применим для исследования функционального уравнения (4) аппарат факторизации функций [1, 2], позволяющий свести его к отдельным интегральным уравнениям. С этой целью для четной функции $H(\alpha_1)$ осуществим деление всех членов функционального уравнения (4) на $H(\alpha_1)$. В результате получим соотношение

$$Q_0^-(\alpha_1)+H^{-1}(\alpha_1)W_0(\alpha_1)+Q_0^+(\alpha_1)=H^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1)+U_0^+(\alpha_1)]. \tag{6}$$

Осуществим переход от функционального уравнения (6) к интегральному уравнению, применив к (6) обращение Фурье:

$$\int_{-A}^{A} h_0(x_1-\xi_1)w_0(\xi_1)d\xi_1 = f_0(x_1),\ |x_1|\le A,\quad w_0(x_1)=w_0(x_1,\alpha_2),\ h_0(x_1)=h_0(x_1,\alpha_2),$$

$$w_0(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W_0(\alpha_1)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1,\quad h_0(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^{-1}(\alpha_1)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1, \tag{7}$$

$$H^{-1}(\alpha_1)=P^{-1}(\alpha_1)R(\alpha_1).$$

Здесь функция $f_0(x_1)$ имеет вид

$$f_0(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H^{-1}(\alpha_1)[U_0^-(\alpha_1)+U_0^+(\alpha_1)]\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1,\quad |x_1|\le A.$$

В связи со свойствами ядра интегрального уравнения функция $H^{-1}(\alpha_1)$ имеет на бесконечности асимптотическое поведение

$$H^{-1}(\alpha_1)=O(|\alpha_1|).$$

Это свидетельствует о том, что интегральное уравнение (7), представленное с помощью классических функций, является интегро-дифференциальным.

Не изменяя это уравнение, вынесем дифференциальный оператор, введем произвольный параметр $\tau>0$ и представим уравнение в виде:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\tau^2\right)\int_{-A}^{A} h_1(x_1-\xi_1)w_0(\xi_1)d\xi_1 = f_0(x_1),\quad H_1(\alpha_1)=(\alpha_1^2+\tau^2)^{-1}H^{-1}(\alpha_1),$$

$$h_1(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha_1^2+\tau^2)^{-1}H^{-1}(\alpha_1)\,\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_1}\,d\alpha_1,\quad H_1(\alpha_1)=O(\alpha_1^{-1}). \tag{8}$$

Рассматривая в (8) интеграл слева как неизвестную функцию, на которую действует дифференциальный оператор, обратим его, получив представление вида

$$\int_{-A}^{A} h_1(x_1-\xi_1)w_0(\xi_1)d\xi_1 = f(x_1),\quad f(x_1)=f_1(x_1)+c_1f_2(x_1)+c_2f_3(x_1),$$

$$f_1(x_1)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F_1(\eta)\,\mathrm{e}^{-i\eta x_1}\,d\eta,\quad |x_1|\le A,\quad f_2(x_1)=\mathrm{e}^{\tau x_1},\quad f_3(x_1)=\mathrm{e}^{-\tau x_1}, \tag{9}$$

$$F_1(\eta)=H^{-1}(\eta)(\eta^2+\tau^2)^{-1}[U_0^-(\eta)+U_0^+(\eta)].$$

Здесь постоянные обращения дифференциального оператора c_m, $m=1,2$, нуждаются в определении, что будет выполнено после построения решения интегрального уравнения (9).

2. Точное решение интегрального уравнения

Метод построения точного решения интегрального уравнения (9) контактной задачи на многослойной среде изложен в статье [17]. Ради краткости, используя результаты этой статьи, введем в уравнении (9) новые обозначения, чтобы воспользоваться принятыми в [17] обозначениями:

$$h_1(x)=k(x),\quad w_0(\xi_1)=\varphi(\xi),\quad A=a. \tag{10}$$

В результате интегральное уравнение (9) приобретает принятый в [17] вид:

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\varphi(\xi)d\xi = f(x),\ |x|\le a, \quad k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\,\mathrm{e}^{iux}\,du,$$
$$K(u)=H^{-1}(u)=(u^2+\tau^2)^{-1}H^{-1}(u), \quad f(x_1)=f_1(x_1)+c_1f_2(x_1)+c_2f_3(x_1). \tag{11}$$

Это преобразование позволяет применять использованные там обозначения и полученные необходимые формулы. Поскольку многослойная среда имеет конечную толщину, то преобразование Фурье ядра интегрального уравнения, функция $K(u)$, является мероморфной в комплексной плоскости переменного u и обладает свойствами, принятыми в [17]:

$$K(u)=A|u|^{-1}[1+o(1)], \quad |u|>>1.$$

В изотропном случае она является четной и может быть представлена в виде $K(u) = P^{-1}(u)R(u)$. Здесь целые функции $R(u)$ и $P(u)$ имеют первый порядок и конечный тип, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей.

3. Точное решение для трещины нового типа

Решим уравнение (11), используя метод, разработанный в [17]. Построенное решение содержит произвольные постоянные c_1, c_2, входящие в $f(x)$ (9), которые необходимо определить. Для их определения возвратимся к функции $w_0(x_1)$ из (10). В силу линейности интегрального уравнения построенное решение имеет представление, в котором указанные постоянные явно выделены. С учетом наличия у решения $w_0(x_1)$ данного типа интегрального уравнения (11) особенности вида $(a^2 - x_1^2)^{-0,5}$ [17] запишем его в форме с выделенной особенностью и составляющими решения при постоянных c_n, $n = 1, 2$, то есть

$$w_0(x_1)=\frac{m_1(x_1)+c_1m_2(x_1)+c_2m_3(x_1)}{\sqrt{a^2-x_1^2}}. \tag{12}$$

Функции $m_n(x_1)$, $n=1, 2, 3$, являются решениями интегрального уравнения (11) для функций $f_n(x)$ в правой части.

В случае трещин нового типа постоянные c_n вычисляются из условия ограниченности функции $w_0(x_1)$ у краев штампов $\pm a$. Тем самым выполняется свойство кусочной гладкости ее границы [19]. Соответствующие уравнения имеют вид:

$$c_1m_2(a)+c_2m_3(a)+m_1(a)=0,$$
$$c_1m_2(-a)+c_2m_3(-a)+m_1(-a)=0.$$

Искомые постоянные принимают значения

$$c_1=\Delta^{-1}[m_1(-a)m_3(a)-m_1(a)m_3(-a)],$$
$$c_2=\Delta^{-1}[m_1(a)m_2(-a)-m_1(-a)m_2(a)],$$
$$\Delta=m_2(a)m_3(-a)-m_2(-a)m_3(a).$$

На основании полученного результата определяются остальные параметры трещины нового типа, у которой у дна находится многослойная среда, а боковые берега формируются деформируемыми штампами. Для нахождения контактных напряжений под штампом подставим вычисленные параметры c_n, $n = 1, 2$, в решение интегрального уравнения (12) и затем внесем это найденное решение в функциональное уравнение (6). Применив к функциональному уравнению метод Винера–Хопфа и возвратившись к обратным формулам сокращений (7), получим представления решений в преобразованиях Фурье в виде

$$Q_0^-(\alpha_1,\alpha_2)=\{K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)[U_0^-(\alpha_1,\alpha_2)+U_0^+(\alpha_1,\alpha_2)]\}^- - \{K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)W_0(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$Q_0^+(\alpha_1,\alpha_2)=\{K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)[U_0^-(\alpha_1,\alpha_2)+U_0^+(\alpha_1,\alpha_2)]\}^+ - \{K^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)W_0(\alpha_1,\alpha_2)\}^+.$$

Воспользовавшись обозначениями (2) и перейдя к первоначальным функциям, содержащим параметр α_2, значения контактных напряжений можно представить в виде

$$\begin{gathered} q_{-A}(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q_0^-(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathrm{e}^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,d\alpha_1 d\alpha_2, \quad |x_1|\le A,\ |x_2|<\infty, \\ q_A(x_1,x_2)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}Q_0^+(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathrm{e}^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,d\alpha_1 d\alpha_2. \end{gathered} \tag{13}$$

4. Точное решение для трещины Гриффитса

Как и в случае трещины нового типа, для трещин Гриффитса постоянные c_1, c_2, входящие в $f(x)$ (9), необходимо определить таким образом, чтобы выполнить требование гладкости границы [19]. Имеющиеся в представлении границ полостей (12) произвольные постоянные c_n, $n = 1, 2$, позволяют описать трещины Гриффитса. Для их определения возвратимся к функции $w_0(x_1)$ (12).

Потребуем, чтобы граница трещины была гладкой. Это приводит к требованию выполнения для функции $w_0(x_1)$ условий

$$w_0(-a)=w_0(a), \quad w_0'(a)=0,$$

которые приводят к соотношениям

$$\begin{gathered} c_1[m_2(-a)-m_2(a)]+c_2[m_3(-a)-m_3(a)]+[m_1(-a)-m_1(a)]=0, \\ c_1m_2'(a)+c_2m_3'(a)+m_1'(a)=0. \end{gathered}$$

Решая эти уравнения, получаем выражения искомых неизвестных:

$$\begin{gathered} c_1=\Delta^{-1}\langle m_1'(a)[m_3(-a)-m_3(a)]-[m_1(-a)-m_1(a)]m_3'(a)\rangle, \\ c_2=\Delta^{-1}\langle [m_1(-a)-m_1(a)]m_2'(a)-[m_2(-a)-m_2(a)]m_1'(a)\rangle, \\ \Delta=[m_2(-a)-m_2(a)]m_3'(a)-[m_3(-a)-m_3(a)]m_2'(a). \end{gathered}$$

Повторяя решение уравнения (7), как и в предыдущем случае, получим контактные напряжения в случае трещины Гриффитса в виде (13), но с новыми постоянными c_1, c_2.

Переход к материалам деформируемых штампов более сложной реологии может быть осуществлен применением подхода, изложенного в [20].

Заключение

Впервые строго математически построены модели трещин Гриффитса и трещин нового типа, которые позволяют в зависимости от свойств материала анализировать состояние среды. Трещины Гриффитса разрушают среду, разрывая напряжениями $\theta_n |x_1|^{-0,5}$ гладкую границу трещины, θ_n – коэффициент интенсивности напряжений [21]. Трещины нового типа разрушают среду сингулярными концентрациями напряжений σx^{-1}, где σ – приведенный коэффициент внешних воздействий [18]. Для разрушения среды необходимы условия присутствия при особенностях отличных от нуля перечисленных коэффициентов.

Полученные результаты найдут применение в проблеме нанотехнологий при описании слипания наночастиц в более крупные фрагменты [22].

Список литературы

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности.* 2022. Т. 84. №1. С. 25–34. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34.

2. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости.* М.: Наука, 1974. 456 с.

3. Галин Л.А. *Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости.* М.: Наука, 1980. 303 с.

4. Штаерман И.Я. *Контактная задача теории упругости*. М.: Гостехиздат, 1949. 272 с.

5. Горячева И.Г., Добычин М.Н. *Контактные задачи в трибологии*. М.: Машиностроение, 1988. 253 с.

6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coeficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society*. 2015. Vol. 471 (2180). P. 1–13. https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271.

7. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory. II-Examples. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. Iss. 18. P. 2349–2362. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6.

8. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift fü r angewandte Mathematik und Physik*. 2013. Vol. 64. P. 145–166. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0.

9. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006.

10. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2007. Vol. 26. Iss. 1. P. 171–188. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007.

11. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribology International*. 2007. Vol. 40. Iss. 4. P. 574–579. https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008.

12. Almqvist A. A LCP *Solution of the Linear Elastic Contact Mechanics Problem*. 2013. DOI: 10.13140/RG.2.1.3960.7200.

13. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Applied Mathematics and Optimization*. 2000. Vol. 42. Iss. 2. P. 169–202. https://doi.org/10.1007/s002450010009.

14. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2015. Vol. 22. P. 508–519. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2014.08.012.

15. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis*. 2000. Vol. 34. No 5. P. 981–1001. https://doi.org/10.1051/m2an:2000112.

16. Kikuchi N., Oden J. Contact Problems in Elasticity: A *Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Philadelphia, USA: SIAM, 1988. 510 p.

17. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С., Зарецкая М.В. Точное решение контактных задач в полосе конечной ширины на многослойной среде. *Проблемы прочности и пластичности*. 2023. Т. 85. №1. С. 36–44. https://doi.org/10.32326/1814-9146-2023-85-1-36-44.

18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mechanic*a. 2018. Vol. 229. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0.

19. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одном новом типе трещин, дополняющих трещины Гриффитса – Ирвина. *Доклады Академии наук*. 2019. Т. 485. №2. С. 162–165. https://doi.org/10.31857/S0869-56524852162-165.

20. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Доклады Российской Академии наук. Физика, технические науки*. 2021. Т. 499. №1. С. 30–35. DOI: 10.31857/S2686740021040039.

21. Морозов Н.Ф. *Математические вопросы теории трещин*. М.: Наука, 1984. 256 с.

22. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Евдокимов В.С. О механической концепции самосборки наноматериалов. *Изв. РАН. МТТ.* 2023. №5. С. 111–119. DOI: 10.31857/S057232992360007X.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O kontaktnykh zadachakh s deformiruemym shtampom [On contact problems with deformable stamp]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2022. Vol. 84. No 1. P. 25–34 (In Russian).

2. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [*Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory*]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 456 p. (In Russian).

3. Galin L.A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vyazkouprugosti* [*Contact Problems of the Theory of Elasticity and Viscoelasticity*]. Moscow. Nauka Publ. 1980. 303 p. (In Russian).

4. Shtaerman I.Ya. *Kontaktnaya zadacha teorii uprugosti* [*Contact Problem of Elasticity Theory*]. Moscow. Gostekhizdat Publ. 1949. 272 p. (In Russian).

5. Goryacheva I.G., Dobychin M.N. *Kontaktnye zadachi v tribologii* [*Contact Problems in Tribology*]. 1988. Moscow. Mashinostroenie Publ. 253 p. (In Russian).

6. Papangelo A., Ciavarella M., Barber J.R. Fracture mechanics implications for apparent static friction coeficient in contact problems involving slip-weakening laws. *Proceedings of the Royal Society*. 2015. Vol. 471 (2180). P. 1–13. https://doi.org/10.1098/rspa.2015.0271.

7. Ciavarella M. The generalized Cattaneo partial slip plane contact problem. I-Theory. II-Examples. *Int. J. Solids and Struct.* 1998. Vol. 35. Iss. 18. P. 2349–2362. https://doi.org/10.1016/S0020-7683(97)00154-6.

8. Zhou S., Gao X.L. Solutions of half-space and half-plane contact problems based on surface elasticity. *Zeitschrift fü r angewandte Mathematik und Physik*. 2013. Vol. 64. P. 145–166. https://doi.org/10.1007/s00033-012-0205-0.

9. Guler M.A., Erdogan F. The frictional sliding contact problems of rigid parabolic and cylindrical stamps on graded coatings. *Int. J. Mech. Sci.* 2007. Vol. 49. Iss. 2. P. 161–182. https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2006.08.006

10. Ke L.-L., Wang Y.-S. Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials. *Eur. J. Mech. A Solids.* 2007. Vol. 26. Iss. 1. P. 171–188. https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2006.05.007.

11. Almqvist A., Sahlin F., Larsson R., Glavatskih S. On the dry elasto-plastic contact of nominally flat surfaces. *Tribol. Int.* 2007. Vol. 40. Iss. 4. P. 574–579. https://doi.org/10.1016/j.triboint.2005.11.008.

12. Almqvist A. A *LCP Solution of the Linear Elastic Contact Mechanics Problem*. 2013. DOI: 10.13140/RG.2.1.3960.7200.

13. Andersson L.E. Existence results for quasistatic contact problems with Coulomb friction. *Appl. Math. Optim*. 2000. Vol. 42. Iss. 2. P. 169–202. https://doi.org/10.1007/s002450010009.

14. Cocou M. A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity. *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2015. Vol. 22. P. 508–519. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa. 2014.08.012.

15. Cocou M., Rocca R. Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* 2000. Vol. 34. No 5. P. 981–1001. https://doi.org/10.1051/m2an:2000112.

16. Kikuchi N., Oden J. *Contact Problems in Elasticity: A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods*. Philadelphia, USA. SIAM. 1988. 510 p.

17. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S., Zaretskaya M.V. Tochnoe reshenie kontaktnykh zadach v polose konechnoy shiriny na mnogosloynoy srede [Exact solution of contact problems in a finite-width band on a multilayer medium]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2023. Vol. 85. No 1. P. 36–44 (In Russian).

18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. On the possibility of predicting some types of earthquake by a mechanical approach. *Acta Mech.* 2018. Vol. 229. P. 2163–2175. https://doi.org/10.1007/s00707-017-2092-0.

19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob odnom novom tipe treshchin, dopolnyayushchikh treshchiny Griffitsa – Irvina [A new type of cracks adding to Griffith–Irwin cracks]. *Doklady Akademii nauk.* 2019. Vol. 485. No 2. P. 162–165 (In Russian).

20. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics*. 2021. Vol. 66. No 8. P. 218–222. DOI: 10.1134/S1028335821080012.

21. Morozov N.F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin* [*Mathematical Issues in the Theory of Cracks*]. Moscow. Nauka Publ. 1984. 256 p. (In Russian).

22. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Evdokimov V.S. O mekhanicheskoy kontseptsii samosborki nanomaterialov [On the mechanical concept of self-assembly of nanomaterials]. *Izvestiya Rossiyskoy Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*. 2023. No 5. P. 111–119 (In Russian).

MATHEMATICAL AND MECHANICAL RELATIONSHIP OF CRACKS GRIFFITH AND A NEW TYPE IN SOME NANOTECHNOLOGIY*

Babeshko V.A.[1], Evdokimova O.V.[2], Babeshko O.M.[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2023/06/26

In this paper, for the first time, mathematically strictly, models of Griffiths cracks and cracks of a new type are constructed simultaneously. Accurate models are constructed as a result of the convergence of the ends of two semi-infinite deformable stamps located on a deformable multilayer base. The mechanism of destruction of the medium by cracks of a new type is radically different from the mechanism of destruction of the medium by Griffiths cracks, and has so far been poorly studied. Griffiths formed his cracks with a smooth border as a result of compression from the sides of an elliptical cavity in the plate. Cracks of a new type have a piecewise smooth border, resulting from the replacement of an ellipse with a rectangle compressed from the sides. The construction of models in the work is based precisely on these descriptions of the origin of cracks formed by the ends of approaching deformable stamps. When creating models, the results of previously performed

*Completed with the financial support of the RNF (project 22-29-00213).

studies on the construction of exact solutions to a number of integral equations of contact problems, published in this journal, are used. The paper found that the destruction of the medium, in the case of cracks of a new type, occurs earlier than in the case of Griffith cracks, which, according to the authors, explains the reason for the destruction of Griffith cracks in the experiment earlier than the theory predicts. Griffiths explained this by the presence of microcracks on the border of the main crack. The authors tend to believe that the cause is the transformation of one type of crack into another, under certain conditions. The results obtained make it possible to compare and quantify the behavior of the medium in the presence of both one and another type of cracks. It is applicable both for the study of mutual transitions of Griffith cracks and cracks of a new type, and for the construction of models of adhesion of wetted nanoparticles.

Keywords: Griffith cracks, new type cracks, mathematical models, integral equations, factorization.