

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-390-403

**ПРОДОЛЬНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ  
КОНЕЧНОГО МОМЕНТНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ\***© 2023 г. **Тарлаковский Д.В.<sup>1,2</sup>, Федотенков Г.В.<sup>2</sup>,  
Май Куок Чиен<sup>2</sup>**<sup>1</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*<sup>2</sup>*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация*

greghome@mail.ru

*Поступила в редакцию 27.04.2023*

Исследуются нестационарные продольные колебания моментного упругого стержня конечной длины. Для описания движения стержня используется система уравнений общей модели моментных упругих тонких тел без дополнительных гипотез. Уравнения этой модели учитывают продольные движения, изменения угла независимого микроповорота, а также поперечное обжатие стержня. Материал стержня полагается однородным и изотропным. Система уравнений движения дополняется физическими соотношениями, которые описывают связи перемещений, изменений углов и поперечного обжатия с усилиями. В отличие от классических моделей, в моментном стержне, кроме нормальных усилий, возникают дополнительные силовые факторы: дополнительные моменты, моментные перерезывающие усилия, моменты моментных напряжений. Соответственно, кроме упругих констант материала, учитываются дополнительные физические параметры среды, необходимые при учете моментных эффектов в материале. В качестве граничных условий на торцах стержня используются условия обобщенного шарнирного опирания. Начальные условия полагаются нулевыми.

Для построения решения используются разложения искомых функций и внешней нагрузки в тригонометрические ряды Фурье. Подстановка этих разложений в исходные соотношения приводит к системе уравнений относительно коэффициентов рядов, зависящих от времени. Для ее решения используется интегральное преобразование Лапласа по времени. В результате найдены выражения для искомых коэффициентов рядов разложений в пространстве изображений. Каждое из этих выражений представляет собой сумму трех произведений. Сомножителями в этих произведениях являются изображения по Лапласу коэффициентов разложений в ряд Фурье для нагрузки и для функций влияния. Функции влияния являются фундаментальными решениями (функциями Грина) исследуемой задачи. Оригиналы коэффициентов рядов для функций влияния находятся аналитически с помощью вычетов. Окончательные выражения для коэффициентов рядов разложения решений имеют вид сверток по времени. Ядрами этих интегральных представлений являются оригиналы коэффициентов рядов для функций влияния.

---

\*Выполнено при поддержке РНФ (грант №23-29-00389, <https://rscf.ru/project/23-29-00389/>).

В качестве примера рассмотрена реакция моментного упругого стержня на воздействие нестационарной осевой нагрузки. Полученные результаты проиллюстрированы графически. Проведена оценка практической сходимости рядов разложений.

*Ключевые слова:* среда Коссера, моментный упругий стержень, начальнo-краевая задача, ряды Фурье, интегральное преобразование Лапласа, функции Грина, функции влияния, нестационарные процессы.

## **Введение**

Развитие современной техники зачастую приводит к необходимости использования уточненных по сравнению с классической теорией упругости моделей, позволяющих учитывать микроструктуру вещества. Одной из таких моделей, в которой деформация описывается не только вектором перемещения, но также вектором поворота, является среда Коссера; за соответствующей теорией в литературе закрепились названия моментной, несимметричной, а также микроструктурной теории упругости. В этих моделях, в отличие от классической теории, напряженное состояние описывается несимметричным тензором напряжений, поэтому упругие тела в несимметричной теории характеризуются большим количеством упругих констант. Необходимость подобного усложнения оправдывается тем, что с помощью используемых в классической теории упругих (и пьезоэлектрических) констант невозможны трактовки, например, аномального пьезоэффекта в кварце, дисперсии упругих волн в сплошной среде, а также упругих свойств кварца, алмаза и других кристаллов.

Общая теория моментной упругости впервые была разработана братьями Коссера (E. Cosserat, F. Cosserat) в 1909 г. [1]. Они развили теорию с помощью вариационного принципа, который назвали «евклидовым действием» («L'Action Euclidienne»). Особенности волновых процессов в микрополярных средах посвящены статьи [2–9]. В статьях [10, 11] развиваются численные методы и алгоритмы решения статических и динамических краевых задач континуума Коссера.

В [12, 13] формулируются гипотезы, на основе которых строится прикладная модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью. Для изучения конкретных граничных задач, на основе применения законов перемещений и функционала полной потенциальной энергии системы разработаны соответствующие алгоритмы метода конечных элементов. В статьях [14, 15] построены основные соотношения одномерной микрополярной теории упругих стержней и решена задача Сен-Венана о растяжении естественно закрученного стержня силой, приложенной к свободному торцевому сечению. В статье [16] предложена модель криволинейных упругих стержней, построенная на основе трехмерной линеаризованной микрополярной теории упругости. Вывод основан на методе асимптотического разложения по толщине стержня. Метод используется без каких-либо априорных предположений о масштабировании неизвестных. При этом главное слагаемое, перемещение и микровращение, идентифицируется как единственное решение некоторой одномерной задачи. Исследована сходимость используемых разложений.

В настоящей статье на основе общей теории тонкостенных моментных упругих тел [17, 18] получены уравнения движения моментноупругих стержней. Рассмотрена задача о нестационарных колебаниях моментного стержня конечной длины, на торцах которого имеют место условия обобщенного шарнирного опирания [18]. Подход к решению основан на методе функций влияния. Для построения функций

влияния применяются разложения в ряды Фурье по пространственной координате и интегральное преобразование Лапласа по времени. С использованием принципа суперпозиции [19–24] получены разрешающие задачу интегральные соотношения. Приведены графические результаты решения. Следует отметить, что все представленные результаты получены аналитическими методами.

### Постановка задачи

При записи всех уравнений и соотношений, составляющих математическую модель моментного упругого стержня, используется система безразмерных величин (при одинаковом начертании величин они обозначены верхним символом звездочка, который в последующем изложении опускается):

$$\begin{aligned}
 x_i^* &= \frac{x_i}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u_i^* = \frac{u_i}{L}, \quad \varphi^* = \varphi L, \quad r^* = \frac{r}{L}, \\
 q_1^* &= \frac{q_1 L}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad m^* = \frac{m L^2}{I(\lambda + 2\mu)}, \quad \tilde{m}_{2M2}^* = \frac{\nu L \tilde{m}_{2M2}}{I(\lambda + 2\mu)}, \\
 T_{kk}^* &= \frac{T_{kk}}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad N^* = \frac{N}{h(\lambda + 2\mu)}, \quad M_{kl}^* = \frac{M_{kl} L}{I(\lambda + 2\mu)}, \\
 R_{kl}^* &= \frac{R_{kl} L}{h(\gamma + \varepsilon)}, \quad S_{kl}^* = \frac{S_{kl} L^2}{I(\gamma + \varepsilon)} \quad (k, l = 1, 2, 3), \\
 \kappa &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha}{\lambda + 2\mu}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{J}}, \\
 \gamma_{\alpha\pm}^2 &= \frac{\gamma_1^2}{1 \pm \gamma_1^2 \alpha^*}, \quad \gamma_1^2 = \frac{c_1^2}{c_2^2}, \quad \eta = \frac{\gamma - \varepsilon}{\gamma + \varepsilon}, \quad \gamma_2^2 = \frac{c_1^2}{c_3^2}, \quad \nu = \frac{\rho L^2}{J}, \quad r^2 = \frac{I}{h}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $x$  – продольная координата;  $\tau$  и  $t$  – безразмерное и размерное время;  $u$  – продольное перемещение;  $\varphi = d\omega/dz$  ( $z = 0$ ), где  $z$  – поперечная координата (в направлении нормали к оси стержня), а  $\omega$  – угол микроповорота;  $q_1$  – продольная нагрузка;  $m$  – внешний поверхностный момент,  $\tilde{m}_{2M2}$  – момент второго порядка;  $L$  – длина стержня;  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\rho$  – упругие константы Ламе и плотность материала стержня;  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  – моментные модули упругости [2] ( $\alpha$  – моментная характеристика, входящая в соотношения связи напряжений с деформациями;  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  – константы, входящие в соотношения связи моментных напряжений с деформациями изгиба-кручения);  $J$  – массовая мера инерции среды при вращении;  $I = h^3/12$ ,  $h$  – характерный размер сечения стержня;  $T_{11}$ ,  $T_{22}$ ,  $N = T_{33}$  – нормальные усилия;  $M_{13}$ ,  $M_{31}$  – дополнительные моменты;  $R_{23}$ ,  $R_{32}$  – моментные перерезывающие усилия;  $S_{12}$ ,  $S_{21}$  – моменты моментных напряжений. Последние являются интегральными характеристиками. Их представление через компоненты тензоров напряжений и моментных напряжений приведено в [18].

Для исследования нестационарных колебаний моментного упругого стержня используем уравнения общей модели, учитывающие поперечное обжатие стержня [18]:

$$\begin{aligned}
 \ddot{u} &= u'' + \kappa \psi_3' + q_1, \quad \ddot{\psi}_3 = \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_3'' - r^{-2} (\kappa u' + \psi_3) + 2\alpha \varphi' + m, \\
 \ddot{\varphi} &= \gamma_2^{-2} \varphi'' - (\gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha \nu) \varphi - 2\alpha \nu \psi_3' + \tilde{m}_{2M2},
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\psi_3$  – поперечное обжатие стержня. Здесь и далее точка над функцией обозначает производную по безразмерному времени  $\tau$ , а штрих – производную по безразмерной координате  $x$ . Используем также соответствующие физические соотношения [18]:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= u' + \kappa \psi_3, & T_{22} &= \kappa(u' + \psi_3), & N &= \kappa u' + \psi_3, \\
M_{13} &= \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_3' + 2\alpha\varphi, & M_{31} &= \gamma_{\alpha-}^{-2} \psi_3' - 2\alpha\varphi, \\
R_{23} &= \eta\varphi, & R_{32} &= \varphi, & S_{12} &= \varphi', & S_{21} &= \eta\varphi'.
\end{aligned} \tag{3}$$

В качестве примера общего подхода к решению подобных задач рассмотрим стержень единичной длины, имеющий в сечениях с координатами  $x = 0$  и  $x = 1$  закрепления в виде обобщенного шарнирного опирания [18] (продольные перемещения  $u$ ,  $\varphi$  и момент  $M_{13}$  отсутствуют), которые определяют вытекающие из общей теории равенства:

$$u|_{x=0,1} = 0, \quad \varphi|_{x=0,1} = 0, \quad \psi_3|_{x=0,1} = 0. \tag{4}$$

Начальные условия полагаем нулевыми:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = 0, \quad \varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = 0, \quad \psi_3|_{\tau=0} = \dot{\psi}_3|_{\tau=0} = 0. \tag{5}$$

Длину стержня  $L$  принимаем равной 1 м. Полагаем, что стержень имеет квадратное поперечное сечение со стороной  $h = 0,05$  м. Тогда с использованием (1) получаем

$$r^2 = \frac{h^2}{12L^2} = 0,208 \cdot 10^{-3}. \tag{6}$$

### Метод решения

Для построения решения используем разложение искомых функций и внешней нагрузки в тригонометрические ряды Фурье:

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \varphi(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \pi n, \tag{7}$$

$$q_1(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{1n}(\tau) \sin \lambda_n x, \quad \tilde{m}_{2M2}(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{m}_{2M2n}(\tau) \sin \lambda_n x,$$

$$\psi_3(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{3n}(\tau) \cos \lambda_n x, \quad m(x, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(\tau) \cos \lambda_n x. \tag{8}$$

Очевидно, что при этом граничные условия(4) выполняются.

Подстановка рядов (7) и (8) в уравнения (2) приводит к следующим соотношениям для коэффициентов этих рядов:

– при  $n = 0$

$$\ddot{\psi}_{30} + r^{-2} \psi_{30} = m_0, \tag{9}$$

– при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_n + \lambda_n^2 u_n + \kappa \lambda_n \psi_{3n} &= q_{1n}, \\
\ddot{\varphi}_n + \lambda_n^2 \gamma_2^{-2} \varphi_n + (\gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha\nu) \varphi_n - 2\alpha\nu \psi_{3n} &= \tilde{m}_{2M2n}, \\
\ddot{\psi}_{3n} + \lambda_n^2 \gamma_{\alpha+}^{-2} \psi_{3n} + r^{-2} \psi_{3n} + r^{-2} \kappa \lambda_n u_n - 2\alpha \lambda_n \varphi_n &= m_n.
\end{aligned} \tag{10}$$

Для решения задач (9) и (10) с учетом (5) применяем преобразование Лапласа по времени ( $s$  – параметр преобразования Лапласа):

$$s^2 \psi_{30}^L + r^{-2} \psi_{30}^L = m_0^L, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
k_{0n}^2 u_n^L + \kappa \lambda_n \psi_{3n}^L &= q_{1n}^L, \quad (k_{2n}^2 + \gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha v) \varphi_n^L - 2\alpha v \lambda_n \psi_{3n}^L = \tilde{m}_{2M2n}^L, \\
(k_{1n}^2 + r^{-2} + \alpha \lambda_n^2) \psi_{3n}^L + r^{-2} \kappa \lambda_n u_n^L - 2\alpha \lambda_n \varphi_n^L &= m_n^L, \\
k_{0n}^2 &= \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{1n}^2 = \gamma_1^{-2} \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{2n}^2 = \gamma_2^{-2} \lambda_n^2 + s^2, \quad k_{1n+}^2 = \gamma_{\alpha+}^{-2} \lambda_n^2 + s^2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Решения уравнения (11) и системы алгебраических уравнений (12) записываются в виде:

$$\begin{aligned}
\psi_{30}^L &= G_{\psi_3 m_0}^L m_0^L, \\
u_n^L &= G_{uq_1n}^L q_{1n}^L + G_{u\tilde{m}_{2M2n}}^L \tilde{m}_{2M2n}^L + G_{umn}^L m_n^L, \\
\varphi_n^L &= G_{\varphi q_1n}^L q_{1n}^L + G_{\varphi\tilde{m}_{2M2n}}^L \tilde{m}_{2M2n}^L + G_{\varphi mn}^L m_n^L, \\
\psi_{3n}^L &= G_{\psi_3 q_1n}^L q_{1n}^L + G_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}^L \tilde{m}_{2M2n}^L + G_{\psi_3 mn}^L m_n^L.
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь  $G_{uq_1n}^L, G_{u\tilde{m}_{2M2n}}^L, G_{umn}^L, G_{\varphi q_1n}^L, G_{\varphi\tilde{m}_{2M2n}}^L, G_{\varphi mn}^L, G_{\psi_3 q_1n}^L, G_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}^L, G_{\psi_3 mn}^L$  – изображения по Лапласу коэффициентов разложений в ряд Фурье функций Грина задачи (2)–(5), которые имеют вид:

$$\begin{aligned}
G_{uq_1n}^L &= \frac{Q_{uq_1n}}{Q_n}, \quad G_{u\tilde{m}_{2M2n}}^L = -\frac{2\alpha \kappa Q_{u\tilde{m}_{2M2n}}}{Q_n}, \quad G_{umn}^L = \frac{-\kappa \lambda_n Q_{umn}}{Q_n}, \\
G_{\varphi q_1n}^L &= -\frac{2\alpha \kappa v r^{-2} Q_{\varphi q_1n}}{Q_n}, \quad G_{\varphi\tilde{m}_{2M2n}}^L = \frac{Q_{\varphi\tilde{m}_{2M2n}}}{Q_n}, \quad G_{\varphi mn}^L = \frac{2\alpha v \lambda_n Q_{\varphi mn}}{Q_n}, \\
G_{\psi_3 q_1n}^L &= -\frac{r^{-2} \kappa \lambda_n Q_{\psi_3 q_1n}}{Q_n}, \quad G_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}^L = \frac{2\alpha \lambda_n Q_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}}{Q_n}, \quad G_{\psi_3 m_0}^L = \frac{1}{s^2 + r^{-2}}, \quad G_{\psi_3 mn}^L = \frac{Q_{\psi_3 mn}}{Q_n},
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_n &= Q_{6n} + Q_{4n} + Q_{2n}, \quad Q_{6n} = k_{0n}^2 k_{2n}^2 k_{1n+}^2, \\
Q_{4n} &= r^{-2} k_{2n}^2 (k_{0n}^2 - \kappa^2 \lambda_n^2) + k_0^2 (\gamma_2^{-2} r^{-2} k_{1n+}^2 + k_{1n}^2 4\alpha v), \\
Q_{2n} &= r^{-2} (\gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha v) (k_{0n}^2 - \kappa^2 \lambda_n^2), \\
Q_{uq_1n} &= 2(k_{2n}^2 + \gamma_2^{-2} r^{-2})(k_{1n}^2 + r^{-2}) + \alpha [4v(k_{1n}^2 + r^{-2}) + \lambda_n^2 (k_{2n}^2 + \gamma_2^{-2} r^{-2})], \\
Q_{\varphi q_1n} &= Q_{u\tilde{m}_{2M2n}} = \lambda_n^2, \quad Q_{umn} = Q_{\psi_3 q_1n} = k_{2n}^2 + \gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha v, \\
Q_{\varphi\tilde{m}_{2M2n}} &= k_{0n}^2 (k_{1n+}^2 + r^{-2}) - \lambda_n^2 \kappa^2 r^{-2}, \\
Q_{\varphi mn} &= Q_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}} = k_{0n}^2, \quad Q_{\psi_3 mn} = k_{0n}^2 (k_{2n}^2 + \gamma_2^{-2} r^{-2} + 4\alpha v).
\end{aligned} \tag{15}$$

Отметим, что выражения (15) представляют собой многочлены аргумента  $s^2$ :

$$\begin{aligned}
Q_6 &= s^6 + q_{62} \lambda_n^2 s^4 + q_{61} \lambda_n^4 s^2 + q_{60} \lambda_n^6, \quad Q_4 = q_{42} s^4 + q_{41} \lambda_n^2 s^2 + q_{40} \lambda_n^4, \\
Q_2 &= q_{21} s^2 + q_{20} \lambda_n^2, \quad Q = s^6 + q_2 \lambda_n^2 s^4 + q_1 \lambda_n^4 s^2 + q_0 \lambda_n^6, \\
Q_{uq_1} &= s^4 + q_{uq_1} \lambda_n^2 s^2 + q_{uq_1 0} \lambda_n^4, \quad Q_{\varphi q_1} = Q_{u\tilde{m}_{2M2}} = \lambda_n^2, \\
Q_{\psi_3 q_1} &= Q_{um} = s^2 + q_{\psi_3 q_1 0} \lambda_n^2, \quad Q_{\varphi\tilde{m}_{2M2}} = s^4 + q_{\varphi\tilde{m}_{2M2} 1} \lambda_n^2 s^2 + q_{\varphi\tilde{m}_{2M2} 0} \lambda_n^4, \\
Q_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2}} &= Q_{\varphi m} = s^2 + \lambda_n^2, \quad Q_{\psi_3 m} = s^4 + q_{\psi_3 m 1} \lambda_n^2 s^2 + q_{\varphi\tilde{m}_{2M2} 0} \lambda_n^4,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
q_2 &= q_{62}\lambda_n^2 + q_{42}, & q_1 &= q_{61}\lambda_n^4 + q_{41}\lambda_n^2 + q_{21}, & q_0 &= (q_{60}\lambda_n^4 + q_{40}\lambda_n^2 + q_{20})\lambda_n^2, \\
q_{62} &= 1 + \gamma_{\alpha+}^{-2} + \gamma_2^{-2}, & q_{61} &= \gamma_2^{-2} + (1 + \gamma_2^{-2})\gamma_{\alpha+}^{-2} = q_{62} + q_{60} - 1, & q_{60} &= \gamma_2^{-2}\gamma_{\alpha+}^{-2}, \\
q_{42} &= (1 + \gamma_2^{-2})r^{-2} + 4\alpha\nu, & q_{41} &= r^{-2}[1 - \kappa^2 + (2 + \gamma_{\alpha+}^{-2})\gamma_2^{-2}] + 4\alpha\nu\gamma_{\alpha+}^{-2}, \\
q_{40} &= r^{-2}\gamma_2^{-2}(1 - \kappa^2 + \alpha) + (\gamma_2^{-2}r^{-2} + 4\alpha\nu)\gamma_1^{-2}, \\
q_{21} &= r^{-2}(\gamma_2^{-2}r^{-2} + 4\alpha\nu), & q_{20} &= q_{21}(1 - \kappa^2), \\
q_{uq_1} &= \gamma_2^{-2}(\lambda_n^2 + r^{-2}) + (\gamma_{\alpha+}^{-2}\lambda_n^2 + r^{-2} + 4\alpha\nu), \\
q_{uq_1 0} &= \gamma_2^{-2}(\lambda_n^2 + r^{-2})(\gamma_{\alpha+}^{-2}\lambda_n^2 + r^{-2}) + 4\alpha\nu(\gamma_1^{-2}\lambda_n^2 + r^{-2}), \\
q_{\psi_3 q_1 0} &= \gamma_2^{-2}(\lambda_n^2 + r^{-2}) + 4\alpha\nu, & q_{\varphi \tilde{m}_{2M21}} &= (1 + \gamma_{\alpha+}^{-2})\lambda_n^2 + r^{-2}, \\
q_{\varphi \tilde{m}_{2M20}} &= \lambda_n^2(\gamma_{\alpha+}^{-2}\lambda_n^2 + r^{-2}), & q_{\psi_3 m_1} &= \gamma_2^{-2}(\lambda_n^2 + r^{-2} + 1) + 4\alpha\nu, \\
q_{\psi_3 m_0} &= \lambda_n^2[\gamma_2^{-2}(\lambda_n^2 + r^{-2}) + 4\alpha\nu].
\end{aligned}$$

Следовательно, входящие в числители и знаменатели в (14) многочлены имеют вид:

$$\begin{aligned}
Q_n &= s^6 + q_{2n}s^4 + q_{1n}s^2 + q_{0n}, \\
Q_{uq_1 n}(s^2) &= s^4 + q_{uq_1 1n}s^2 + q_{uq_1 0n}, & Q_{\varphi q_1 n}(s^2) &= Q_{u\tilde{m}_{2M2n}}(s^2) = \lambda_n^2, \\
Q_{\psi_3 q_1 n}(s^2) &= Q_{umn}(s^2) = s^2 + q_{\psi_3 q_1 0n}, & Q_{\varphi \tilde{m}_{2M2n}}(s^2) &= s^4 + q_{\varphi \tilde{m}_{2M21n}}s^2 + q_{\varphi \tilde{m}_{2M20n}}, \\
Q_{\psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}(s^2) &= Q_{\varphi mn}(s^2) = s^2 + \lambda_n^2, & Q_{\psi_3 mn}(s^2) &= s^4 + q_{\psi_3 m_1 n}s^2 + q_{\psi_3 m_0 n}, \\
q_{2n} &= q_2(\lambda_n^2), & q_{1n} &= q_1(\lambda_n^2), & q_{0n} &= q_0(\lambda_n^2), & q_{uq_1 1n} &= q_{uq_1}(\lambda_n^2), & q_{uq_1 0n} &= q_{uq_1 0}(\lambda_n^2), \\
q_{\psi_3 q_1 0n} &= q_{\psi_3 q_1 0}(\lambda_n^2), & q_{\varphi \tilde{m}_{2M21n}} &= q_{\varphi \tilde{m}_{2M21}}(\lambda_n^2), & q_{\varphi \tilde{m}_{2M20n}} &= q_{\varphi \tilde{m}_{2M20}}(\lambda_n^2), \\
q_{\psi_3 m_1 n} &= q_{\psi_3 m_1}(\lambda_n^2), & q_{\psi_3 m_0 n} &= q_{\psi_3 m_0}(\lambda_n^2).
\end{aligned}$$

Поскольку функции в (14) являются рациональными, их оригиналы достаточно просто вычисляются с помощью вычетов. Обозначая  $s_{nj}$  ( $j = \overline{1, 6}$ ) корни уравнения  $Q_n(s^2) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned}
G_{\zeta_n}(\tau) &= \sum_{j=1}^6 \operatorname{res}_{s=s_{nj}} G_{\zeta_n}^L \exp(s\tau) = \sum_{j=1}^6 \operatorname{res}_{s=s_{nj}} \frac{Q_{\zeta_n}(s^2)}{Q_n(s^2)} \exp(s\tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 \frac{Q_{\zeta_n}(s_{nj}^2)}{s_{nj} Q_n'(s_{nj}^2)} \exp(s_{nj}\tau) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^6 g_{\zeta_{nj}} \exp(s_{nj}\tau), & g_{\zeta_{nj}} &= \frac{Q_{\zeta_n}(s_{nj}^2)}{2s_{nj}(3s_{nj}^4 + 2q_{2n}s_{nj}^2 + q_{1n})}, \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\zeta = (uq_1, u\tilde{m}_{2M2}, um, \varphi q_1, \varphi \tilde{m}_{2M2}, \varphi m, \psi_3 q_1, \psi_3 \tilde{m}_{2M2}, \psi_3 m).$$

По теореме о свертке для преобразования Лапласа оригиналы равенств (13) записываются так:

$$\begin{aligned}
\Psi_{30}(\tau) &= G_{\psi_3 m_0}(\tau) * m_0(\tau), \\
u_n(\tau) &= G_{uq_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau) + G_{u\tilde{m}_{2M2n}}(\tau) * \tilde{m}_{2M2n}(\tau) + G_{umn}(\tau) * m_n(\tau), \\
\varphi_n(\tau) &= G_{\varphi q_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau) + G_{\varphi \tilde{m}_{2M2n}}(\tau) * \tilde{m}_{2M2n}(\tau) + G_{\varphi mn}(\tau) * m_n(\tau), \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\Psi_{3n}(\tau) = G_{\Psi_3 q_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau) + G_{\Psi_3 \tilde{m}_{2M2n}}(\tau) * \tilde{m}_{2M2n}(\tau) + G_{\Psi_3 m_n}(\tau) * m_n(\tau),$$

где знак звездочка означает операцию свертки по времени:

$$f(\tau) * g(\tau) = \int_0^{\tau} f(t)g(\tau-t)dt = \int_0^{\tau} f(\tau-t)g(t)dt.$$

### Примеры расчетов

В расчетах использованы механические характеристики для следующих материалов, проявляющих моментные свойства.

1. Композитный материала – алюминиевая дробь в эпоксидной смоле [2]. Размерные параметры:

$$\lambda = 7,59 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \mu = 1,89 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha = 7,45 \cdot 10^6 \text{ Па}, \\ \gamma + \varepsilon = 2,64 \cdot 10^3 \text{ Н}, \quad J = 0,429 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}, \quad \rho = 2,19 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Соответствующие безразмерные параметры:

$$\kappa = 0,668, \quad \alpha^* = 0,655 \cdot 10^{-3}, \quad \gamma_1 = 2,45, \quad \gamma_2 = 0,919, \quad \gamma_{\alpha+} = 2,45, \quad \nu = 5,1 \cdot 10^6.$$

2. Костная ткань [6]. Размерные параметры:

$$\lambda = 2,8 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad \mu = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \alpha = 4 \cdot 10^9 \text{ Па}, \\ \gamma + \varepsilon = 3,24 \cdot 10^9 \text{ Н}, \quad J = 1 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}, \quad \rho = 1,9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3.$$

Соответствующие безразмерные параметры:

$$\kappa = 0,778, \quad \alpha^* = 0,111, \quad \gamma_1 = 3, \quad \gamma_2 = 0,002, \quad \gamma_{\alpha+} = 3, \quad \nu = 1,9 \cdot 10^6.$$

Отметим, что многие реальные материалы с микроструктурными неоднородностями потенциально обладают моментными свойствами, например: композиты, поликристаллические материалы, суспензии, бетоны, горные породы, костная ткань, пенопласты на основе различных полимеров. Однако ввиду большой сложности экспериментального определения моментных констант материала в современной научной литературе имеется лишь ограниченный круг публикаций, в которых приведены значения моментных модулей. Наиболее полные данные, касающиеся значений моментных модулей, присутствуют в [2] и [6].

На рис. 1 приведены зависимости от времени оригиналов коэффициентов  $G_{uq_1 n}(\tau)$ , рис. 1а соответствует материалу 1, а рис. 1б – материалу 2.

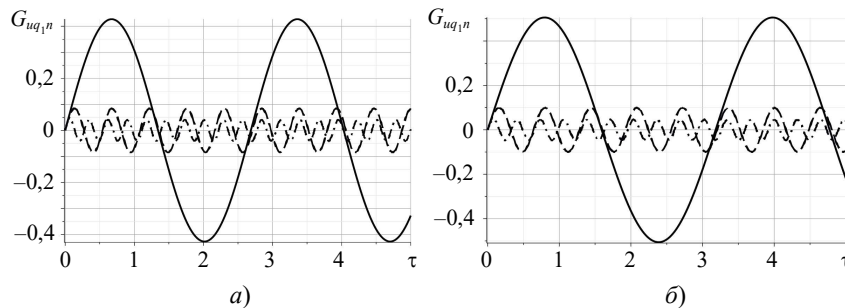


Рис. 1. Зависимости  $G_{uq_1 n}(\tau)$

Сплошными кривыми на рисунках отображены зависимости для  $G_{uq_1}(\tau)$ , штриховыми – для  $G_{uq_1,5}(\tau)$ , штрихпунктирными – для  $G_{uq_1,10}(\tau)$ . Видно, что с увеличением номера  $n$  максимальные по модулю значения этих функций уменьшаются.

Аналогичные графики построены для коэффициентов  $G_{\tilde{u}\tilde{m}_2 M_2 n}(\tau)$  (рис. 2) и для  $G_{um_n}(\tau)$  (рис. 3). Здесь сплошные кривые соответствуют  $n = 50$ , штриховые –  $n = 100$ , штрихпунктирные –  $n = 150$ .

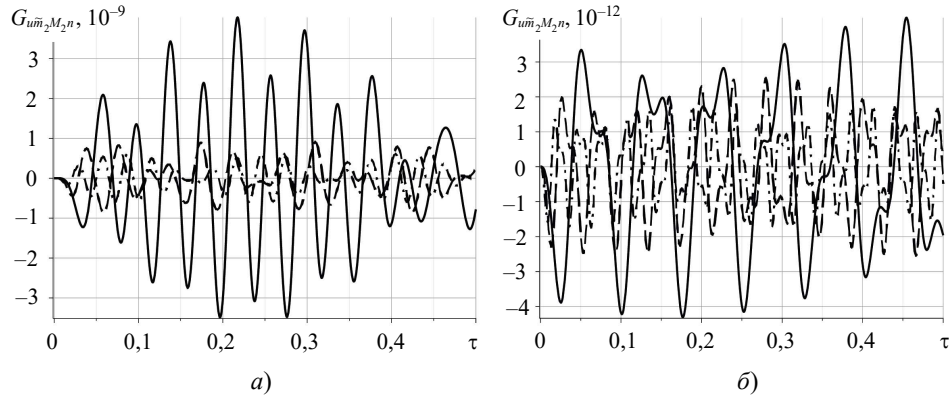


Рис. 2. Зависимости  $G_{\tilde{u}\tilde{m}_2 M_2 n}(\tau)$

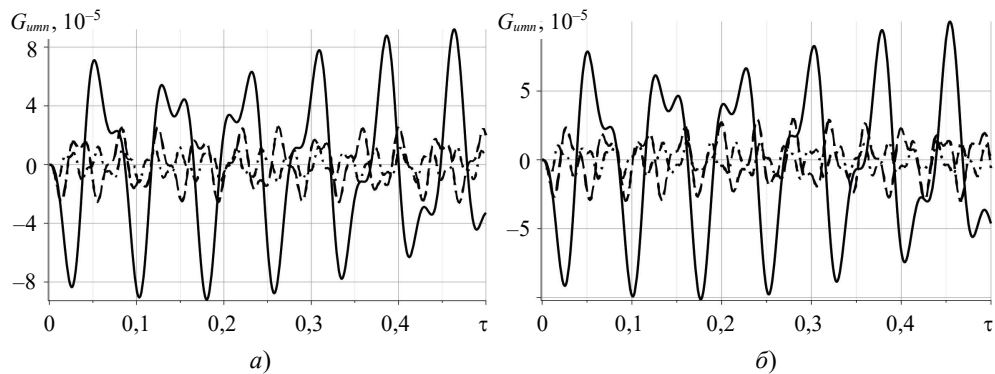


Рис. 3. Зависимости  $G_{um_n}(\tau)$

Рассмотрим воздействие на моментно упругий стержень осевой нагрузки вида

$$q_1(x, \tau) = \tau \exp(-5\tau) x \sin \pi x, \quad m = \tilde{m}_{2M_2} = 0 \quad (0 < x_0 < 1).$$

Коэффициенты разложения этой нагрузки в ряд Фурье определяются так:

$$q_{1n}(\tau) = 2\tau \exp(-5\tau) \int_0^1 x \sin \pi x \sin \lambda_n x dx = -4\tau \exp(-5\tau) \frac{n[(-1)^n + 1]}{\pi^2(n^2 - 1)^2}. \quad (18)$$

При этом в правых частях равенств (17) остаются только первые слагаемые:

$$\begin{aligned} u_n(\tau) &= G_{uq_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau), & \varphi_n(\tau) &= G_{\varphi q_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau), \\ \psi_{3n}(\tau) &= G_{\psi_3 q_1 n}(\tau) * q_{1n}(\tau). \end{aligned} \quad (19)$$

Отметим, что все интегралы в (19) вычисляются аналитически.



На рис. 4 приведены распределения продольных перемещений  $u$  по координате  $x$  в различные моменты времени. Сплошные кривые соответствуют материалу 1, штриховые – материалу 2. Здесь и далее в расчетах учтены первые 4 члена рядов разложений (7), (8).

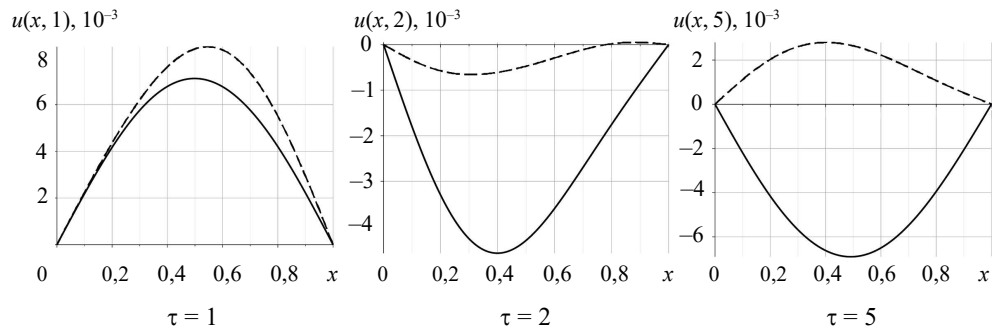


Рис. 4. Распределение продольных перемещений по координате  $x$  в различные моменты времени

Аналогичные графики представлены на рис. 5 и 6 для изменения угла микроповорота  $\varphi$  и поперечного обжатия  $\psi_3$ . Отметим, что значения обжатия в стержне, выполненном из материала 1 (оно обозначено как  $\psi_{3,1}$ ), на три порядка превосходят значения обжатия в стержне, выполненном из материала 2 (оно обозначено как  $\psi_{3,2}$ ). Это объясняется существенным различием моментного модуля  $\alpha$  для этих материалов.

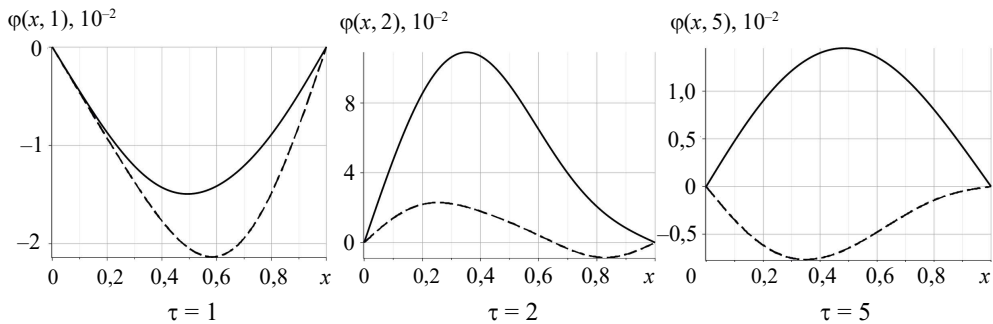


Рис. 5. Распределение изменений углов микроповорота по координате  $x$  в различные моменты времени

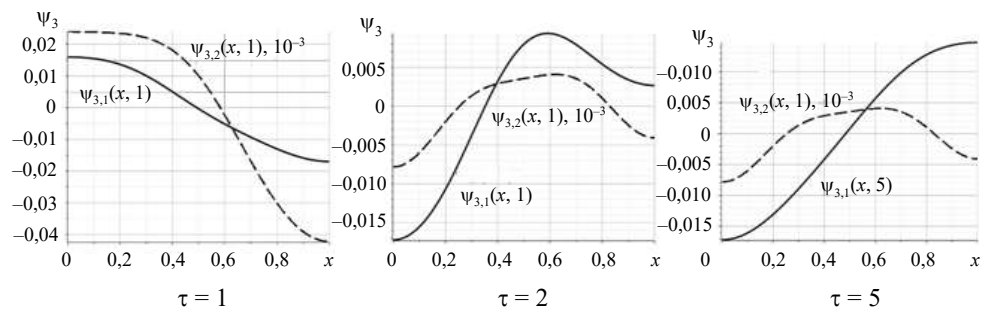


Рис. 6. Распределение поперечного обжатия по координате  $x$  в различные моменты времени

На рис. 7–9 представлено сравнение результатов, полученных при учете четырех членов рядов (сплошные кривые) и двух членов рядов (штриховые кривые). Здесь

представлены зависимости перемещений, углов поворота и обжатий от времени в средней точке стержня  $x = 0,5$ . Видно, что отличие в результатах незначительное, сплошные линии и штриховые линии практически совпадают.

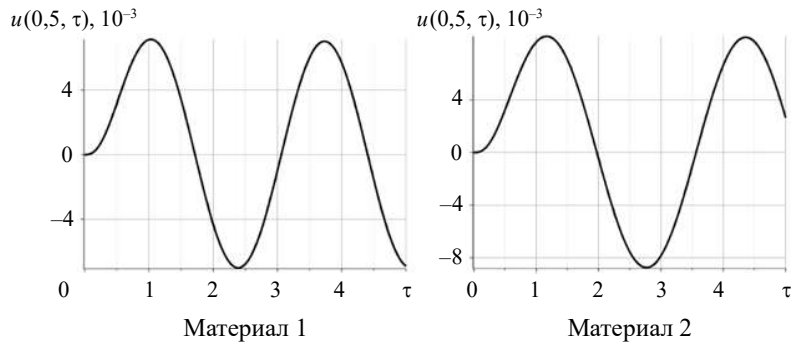


Рис. 7. Зависимость продольных перемещений в точке  $x = 0,5$  от времени

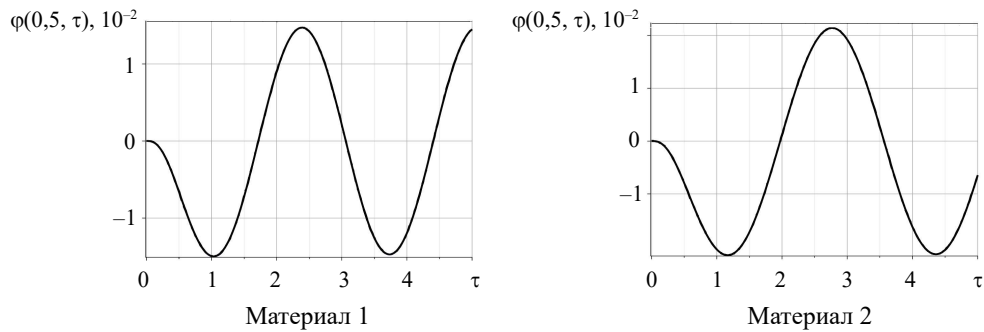


Рис. 8. Зависимость изменений углов микроповорота в точке  $x = 0,5$  от времени

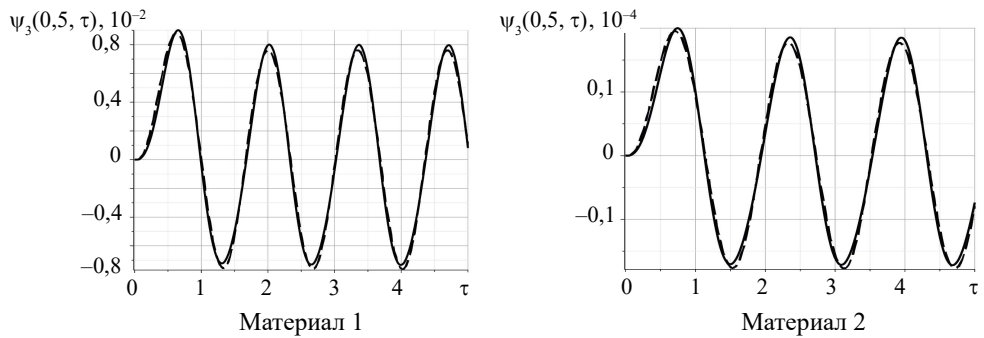


Рис. 9. Зависимость поперечного обжатия в точке  $x = 0,5$  от времени

### Заключение

Приведена математическая постановка и построено решение задачи о нестационарных колебаниях моментного упругого стержня с учетом поперечного обжатия. Аналитическими методами найдены функции Грина для моментно упругого стержня. Получены и представлены графически зависимости перемещений, изменений углов микроповорота и поперечного обжатия моментного упругого стержня при воздействии нестационарной распределенной осевой нагрузки.

### Список литературы

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris: A. Hermann et fils, 1909. 226 p. (Reprint 2009).
2. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
3. Кулеш М.А., Грекова Е.Ф., Шардаков И.Н. Задача о распространении поверхностной волны в редуцированной среде Коссера. *Акустический журнал*. 2009. Т. 55. №2. С. 216–225.
4. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Улитин М.В., Шардаков И.Н. Анализ волнового решения уравнений эластокинетики среды Коссера в случае плоских объемных волн. *ПМТФ*. 2008. Т. 49. №2. С. 196–203.
5. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. Дисперсия и поляризация поверхностных волн Рэлея для среды Коссера. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. №4. С. 100–113.
6. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера. *Акустический журнал*. 2006. Т. 52. №2. С. 227–235.
7. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных кинематических возмущений от сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2011. Т. 17. №2. С. 184–195.
8. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных осесимметричных возмущений от поверхности шара, заполненного псевдоупругой средой Коссера. *Электронный журнал Труды МАИ*. 2012. Вып. 53. С. 1–20.
9. Лай Т.Т., Тарлаковский Д.В. Дифракция нестационарных волн на сферической полости в псевдоконтинууме Коссера. *Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии*. 2013. Т. 5. №1. С. 119–125.
10. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Макромеханическое моделирование упругой и вязкоупругой сред Коссера. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. №2. С. 40–47.
11. Садовский В.М., Садовская О.В., Варьгина М.П. Численное моделирование пространственных волновых движений в моментных средах. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2009. Т. 2. №4. С. 111–121.
12. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Математическая модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью и метод конечных элементов. *Актуальные проблемы прочности: 60 Международ. науч. конф.* Витебск, 14–18 мая 2018 г. Витебск: Витебский государственный технологический университет, 2018. С. 198–200.
13. Саркисян С.О., Хачатрян М.В. Построение модели изгиба микрополярных упругих тонких стержней с круговой осью и ее реализация методом конечных элементов. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2020. Т. 13. №3. С. 256–268. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2020.13.3.20>.
14. Илюхин А.А., Тимошенко Д.В. Построение основных соотношений одномерной микрополярной теории упругих стержней. *Изв. Сарат. ун-та. Новая серия. Сер.: Математика. Механика. Информатика*. 2008. Т. 8. Вып. 4. С. 52–61. DOI: 10.18500/1816-9791-2008-8-4-52-61.
15. Илюхин А.А., Попов А.К. Растяжение микрополярного естественно закрученного стержня. *Научно-технический вестник Поволжья*. 2011. №6. С. 37–42.
16. Aganović I., Tambaca J., Tutek Z. Derivation of the model of elastic curved rods from three-dimensional micropolar elasticity. *Annali Dell' Universita di Ferrara*. 2007. Vol. 53. Iss. 2. P. 109–133. <https://doi.org/10.1007/s11565-007-0017-x>.
17. Михайлова Е.Ю., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Обобщенная линейная модель динамики тонких упругих оболочек. *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2018. Т. 160. Кн. 3. С. 561–577.
18. Mai Q.C., Ryazantseva M.Y., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Cham, Switzerland: Springer, 2023. P. 159–172. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11).
19. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Spatial non-stationary contact

problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 3. P. 366–376.

20. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. Vol. 18. Iss. 4. P. 687–692. DOI: 10.5937/jaes0-28073.

21. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40. Iss. 4. P. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.

22. Fedotenkov G.V., Gritskov A.V., Levitskiy D.Y., Vahterova Y.A., Sun Y. Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations. *INCAS Bulletin*. 2021. Vol. 13. Special Issue. P. 41–56. DOI: 10.13111/2066-8201.2021.13.S.5.

23. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Transient deformation of an anisotropic cylindrical shell with structural features. *Journal of the Institution of Engineers (India): Series C*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. P. 455–466. <https://doi.org/10.1007/s40032-023-00915-2>.

24. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff–Love shell. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. Vol. 18. No 4. P. 737–744. DOI: 10.5937/jaes0-28205.

#### References

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. Paris. A. Hermann et fils. 1909. 226 p. (Reprint 2009).

2. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy* [Wave Processes in Solids with Microstructure]. Moscow. MGU Publ. 1999. 328 p. (In Russian).

3. Kulesh M.A., Shardakov I.N., Grekova E.F. The problem of surface wave propagation in a reduced Cosserat medium. *Acoustical Physics*. 2009. Vol. 55. No 2. P. 218–226. DOI: 10.1134/S1063771009020110.

4. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Ulitin M.V., Shardakov I.N. Analysis of the wave solution of the elastokinetic equations of a Cosserat continuum for the case of bulk plane waves. *J. Appl. Mech. Tech. Phys*. 2008. Vol. 49. No 2. P. 323–329. DOI: 10.1007/s10808-008-0044-0.

5. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Dispersion and polarization of surface Rayleigh waves for the Cosserat continuum. *Mechanics of Solids*. 2007. Vol. 42. No 4. P. 583–594. DOI: 10.3103/S0025654407040115.

6. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Propagation of surface elastic waves in the Cosserat medium. *Acoustical Physics*. 2006. Vol. 52. No 2. P. 186–193. DOI: 10.1134/S1063771006020114.

7. Lay T.T., Tarlakovskiy D.V. Rasprostranenie nestatsionarnykh kinematicheskikh vozmushcheniy ot sfericheskoy polosti v psevdokontinuume Kossera [The kinematics of perturbation in a spherical cavity in Cosserat continuum model]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktivnykh* [Journal on Composite Mechanics and Design]. 2011. Vol. 17. No 2. P. 184–195 (In Russian).

8. Lay T.T., Tarlakovskiy D.V. Rasprostranenie nestatsionarnykh osesimmetrichnykh vozmushcheniy ot poverkhnosti shara, zapolnennogo psevdouprugoy sredoy Kossera [Propagation of nonstationary axisymmetric perturbations from the surface of a sphere filled with a pseudoelastic Cosserat medium]. *Elektronnyy zhurnal Trudy MAI*. 2012. Iss. 53. P. 1–20 (In Russian).

9. Lay T.T., Tarlakovskiy D.V. Difraktsiya nestatsionarnykh voln na sfericheskoy polosti v psevdokontinuume Kossera [Diffraction of nonstationary waves by a spherical cavity in the Cosserat pseudocontinuum]. *Radioelektronika. Nanosistemy. Informatsionnye tekhnologii*. 2013. Vol. 5. No 1. P. 119–125 (In Russian).

10. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. Makromekhanicheskoe modelirovanie uprugoy i vyazkoupругoy sred Kossera [Macromechanical modelling of Cosserat elastic and visco-elastic media]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2009. Vol. 2. No 2. P. 40–47 (In Russian).

11. Sadovskiy V.M., Sadovskaya O.V., Varygina M.P. Chislennoe modelirovanie prostanstvennykh volnovykh dvizheniy v momentnykh sredakh [Numerical modeling of three-

dimensional wave motions in couple-stress media]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2009. Vol. 2. No 4. P. 111–121 (In Russian).

12. Sarkisyan S.O., Khachatryan M.V. Matematicheskaya model staticheskoy deformatsii mikropolyarnogo uprugogo sterzhnya s krugovoy osyu i metod konechnykh elementov [Mathematical model of static deformation of a micropolar elastic rod with a circular axis and the finite element method]. *Aktualnye problemy prochnosti: 60 Mezhdunarod. nauch. konf.* Vitebsk. 14–18 May 2018. Vitebsk. Vitebsk State Technological University Publ. 2018. P. 198–200 (In Russian).

13. Sargsyan S.O., Khachatryan M.V. Postroenie modeli izgiba mikropolyarnykh uprugikh tonkikh sterzhney s krugovoy osyu i ee realizatsiya metodom konechnykh elementov [Construction of the bending model of micropolar elastic thin beams with a circular axis and its implementation using finite element method]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational Continuum Mechanics]. 2020. Vol. 13. No 3. P. 256–268 (In Russian).

14. Ilyukhin A.A., Timoshenko D.V. Postroenie osnovnykh sootnosheniy odnomernoy mikropolyarnoy teorii uprugikh sterzhney [The one-dimensional micropolar theory of elastic rods basic parities construction]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika* [Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics]. 2008. Vol. 8. Iss. 4. P. 52–61 (In Russian).

15. Ilyukhin A.A., Popov A.K. Rastyazhenie mikropolyarnogo estestvenno zakruchennogo sterzhnya [Stretching of the micropolar naturally twirled core]. *Nauchno-tehnicheskiy vestnik Povolzhya* [Scientific and Technical Volga Region Bulletin]. 2011. No 6. P. 37–42 (In Russian).

16. Aganović I., Tambaca J., Tutek Z. Derivation of the model of elastic curved rods from three-dimensional micropolar elasticity. *Annali Dell' Universita di Ferrara*. 2007. Vol. 53. Iss. 2. P. 109–133. <https://doi.org/10.1007/s11565-007-0017-x>.

17. Mikhaylova E. Yu., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Obobshchennaya lineynaya model dinamiki tonkikh uprugikh obolochek [A generalized linear model of dynamics of thin elastic shells]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series]. 2018. Vol. 160. Book 3. P. 561–577 (In Russian).

18. Mai Q.C., Ryazantseva M.Y., Tarlakovskii D.V. Generalized linear model of dynamics of elastic moment shells. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Cham, Switzerland. Springer. 2023. P. 159–172. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7\\_11](https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_11).

19. Okonechnikov A.S., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Spatial non-stationary contact problem for a cylindrical shell and absolutely rigid body. *Mechanics of Solids*. 2020. Vol. 55. Iss. 3. P. 366–376.

20. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. Vol. 18. Iss. 4. P. 687–692. DOI: 10.5937/jaes0-28073.

21. Fedotenkov G.V., Tarlakovskiy D.V., Vahterova Y.A. Identification of non-stationary load upon Timoshenko beam. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40. Iss. 4. P. 439–447. <https://doi.org/10.1134/S1995080219040061>.

22. Fedotenkov G.V., Gritskov A.V., Levitskiy D.Y., Vahterova Y.A., Sun Y. Timoshenko beam and plate non-stationary vibrations. *INCAS Bulletin*. 2021. Vol. 13. Special Issue. P. 41–56. DOI: 10.13111/2066-8201.2021.13.S.5.

23. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Transient deformation of an anisotropic cylindrical shell with structural features. *Journal of the Institution of Engineers (India): Series C*. 2023. Vol. 104. Iss. 2. P. 455–466. <https://doi.org/10.1007/s40032-023-00915-2>.

24. Lokteva N.A., Serdyuk D.O., Skopintsev P.D. Non-stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff–Love shell. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. Vol. 18. No 4. P.737–744. DOI: 10.5937/jaes0-28205.

## LONGITUDINAL TRANSIENT VIBRATIONS OF A FINITE MOMENT ELASTIC ROD\*

Tarlakovskii D.V.<sup>1,2</sup>, Fedotenkov G.V.<sup>2</sup>, Mai Quoc Chien<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

greghome@mail.ru

*Received by the Editor 2023/04/27*

Non-stationary longitudinal vibrations of a moment elastic rod of finite length are investigated. To describe the motion of the rod, the system of equations of the general model of moment elastic thin bodies is used without additional hypotheses. The equations of this model take into account longitudinal movements, changes in the angle of independent microrotation, as well as transverse compression of the rod. The rod material is assumed to be homogeneous and isotropic. The system of equations of motion is supplemented by physical relations that describe the relationship of displacements, changes in angles and transverse compression with forces. In contrast to classical models, in addition to normal forces, additional force factors arise in a moment rod. They are: additional moments, moment cutting forces, moments of moment stresses. Accordingly, in addition to the elastic constants of the material, additional physical parameters of the medium are taken into account, which are necessary when taking into account moment effects in the material. The conditions of generalized hinged support are used as boundary conditions at the ends of the rod. The initial conditions are assumed to be zero.

To construct the solution, expansions of the desired functions and the external load into trigonometric Fourier series are used. Substituting these expansions into the original relations leads to a system of equations for the coefficients of time-dependent series. To solve it, the integral Laplace transform in time is used. As a result, expressions for the required coefficients of expansion series in the image space are found. Each of these expressions is the sum of three products. The factors in these products are the Laplace images of the coefficients of the Fourier expansions for the load and for the influence functions. Influence functions are fundamental solutions (Green's functions) of the problem under study. The original coefficients of the series for the influence functions are found analytically using residues. The final expressions for the coefficients of the expansion series of solutions have the form of convolutions in time. The cores of these integral representations are the original coefficients of the series for the influence functions.

As an example, the response of a moment elastic rod to the action of a non-stationary axial load is considered. The results obtained are illustrated graphically. The practical convergence of expansion series is estimated.

*Keywords:* Cosserat medium, moment elastic rod, initial boundary value problem, Fourier series, Laplace integral transform, Green's functions, transient functions, wave processes.

---

\* This study was supported by the Russian Science Foundation (grant №23-29-00389, <https://rscf.ru/project/23-29-00389>).