

УДК 534.16

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-356-374

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОХОЖДЕНИЯ ВИБРАЦИЙ ЧЕРЕЗ ЗАКРЕПЛЕННЫЙ УЧАСТОК УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОСЕВОЙ СИЛЫ НА ТОРЦЕ*

© 2023 г.

Паймушин В.Н.^{1,2}, Шишкин В.М.³,
Газизуллин Р.К.^{1,2}, Нуриев А.Н.²

¹Казанский национальный исследовательский технический университет
им. А.Н. Туполева, Казань, Российская Федерация

²Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Казань, Российская Федерация

³Вятский государственный университет, Киров, Российская Федерация

vrajmushin@mail.ru

Поступила в редакцию 10.05.2023

С использованием инструментально-аппаратных средств фиксации амплитуд виброускорений разработана методика экспериментального исследования вынужденных изгибных колебаний консольно закрепленного тонкостенного элемента конструкции в виде стержня-полосы, возбуждающихся за счет прохождения вибраций через участок закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей при осевом нагружении гармонической силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка. Получена экспериментальная зависимость амплитудных значений виброускорений точки на конце консоли от частоты возбуждаемых изгибных колебаний торца стержня, свидетельствующая о прохождении вибраций через участок закрепления конечной длины. Указанные вибрации происходят за счет трансформации продольных колебаний в зоне нагружения в продольно-поперечно-сдвиговые колебания стержня-полосы в зоне закрепления с последующей их трансформацией в преимущественно изгибные колебания консольной части стержня. Для теоретического исследования описываемого явления построена трансформационная модель деформирования стержня-полосы, учитывающая деформируемость участка закрепления конечной длины на основе уточненной модели С.П. Тимошенко. Консольная часть стержня представлена классической моделью Кирхгофа – Лява с учетом геометрической нелинейности при определении осевых деформаций. Сформулированы кинематические условия сопряжения закрепленной и консольной частей стержня. На основе вариационного уравнения Гамильтона – Остроградского получены уравнения движения незакрепленной и закрепленной частей стержня, а также граничные условия к ним и силовое условие сопряжения отмеченных частей стержня. Проведены численные эксперименты для стержня-полосы, изготовленного из алюминиевого сплава Д16АТ, показывающие заметное прохождение вибраций через участок закрепления

*Выполнено за счет средств РНФ (проект №23-19-00021, разделы 2, 3; проект №22-79-10033, разделы 1, 4).

конечной длины в консольную часть стержня при снижении динамического модуля сдвига материала до определенного значения.

Ключевые слова: торцевое нагружение, стержень-полоса, прохождение вибраций, экспериментальное исследование, участок закрепления конечной длины, трансформационная модель деформирования.

Введение

Вибрации являются негативным фактором воздействия на оборудование, системы, аппаратуру и конструкцию изделий, снижая их работоспособность и ресурс [1–4]. Колебания элементов конструкций в звуковом диапазоне частот приводит к излучению ими акустических колебаний (шуму), что также нарушает нормальные условия жизнедеятельности человека [5, 6]. Особую значимость и актуальность эти проблемы имеют для изделий авиа- и судостроения, представляющих собой тонкостенные каркасированные оболочки, состоящие из элементов продольного и поперечного силового набора и тонкостенных элементов (обшивки, внутренних панелей, переборок и т.п.).

Вопросам вибрационного нагружения тонкостенных каркасированных конструкций уделяется значительное внимание в отечественной и зарубежной научной литературе [7–14]. Однако необходимо отметить, что при этом практически не уделяется должного внимания проблемам формулировки граничных условий при тех или иных вариантах соединения стержневых элементов каркаса с тонкостенными элементами конструкций или их закрепления на жестких опорных элементах. Так, например, при постановке и решении даже статических задач механики деформирования стержней (особенно выполненных из волокнистых композитных материалов) реальные условия закрепления их концевых участков конечной длины, как правило, заменяют или условиями шарнирного опирания, или защемления, что, безусловно, вносит погрешности в решения задач из-за неучета деформируемости отмеченных участков, а в случае вибрационного нагружения может привести к качественно неверным результатам.

Цель настоящей статьи состоит в экспериментальном и теоретическом исследовании прохождения вибраций в консольную часть тонкостенного элемента конструкции (стержня-полосы) через участок закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей при действии гармонической осевой силы на торце. Такой вид возбуждения колебаний может в перспективе использоваться для создания относительно бесшумных биомиметических колебательных движителей при разработке малоразмерных беспилотных летательных аппаратов, обеспечивающих существенное преимущество перед обычными пропульсивными системами.

1. Экспериментальное исследование и модальный анализ

В качестве объекта исследования рассматривается стержень-полоса l , неподвижно закрепленный с помощью клеевого слоя по части лицевой поверхности жесткого опорного элемента 2 (рис. 1). Стержень выполнен из алюминиевого сплава Д16АТ и имеет следующие размеры: $t = 2,9$ мм; $l = 50$ мм; $a = 200$ мм; $b = 20$ мм (ширина стержня). Колебания возбуждаются путем нагружения стержня гармонической осевой силой (на единицу ширины стержня) $P = \tilde{P} \exp(i\omega\tau)$ с амплитудой \tilde{P} и круговой частотой ω (i – мнимая единица, τ – время). Интенсивность возможных изгибных

колебаний консольной части стержня фиксируется цифровым акселерометром 3 на основе сенсора MPU-9250. Осевая нагрузка создается электромагнитным воздействием соленоида, возбуждение которого совершается генератором звуковых частот. Экспериментальное выявление резонансных частот изгибных колебаний консольной части стержня требует обеспечения тщательного частотного анализа. Поэтому стационарные значения ускорений \ddot{w} точки на конце консоли фиксировались через временной интервал $\Delta t = 60$ с для каждой генерируемой частоты, а частота осевого силового воздействия изменялась в диапазоне 50–500 Гц с шагом $\Delta f = 0,5$ Гц.

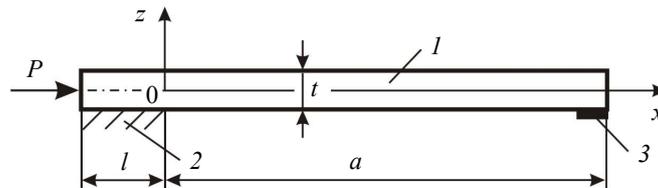


Рис. 1. Схема нагружения и закрепления стержня-полосы

На рис. 2 представлена зависимость амплитудных значений ускорений \ddot{w} точки на конце консоли от частоты f возбуждаемых изгибных колебаний, на которой имеются ярко выраженные пики значений \ddot{w} при экспериментальных частотах $f_1^* = 51,5$ Гц, $f_2^* = 110,5$ Гц, $f_3^* = 331$ Гц и $f_4^* = 416$ Гц, что убедительно свидетельствует о прохождении вибраций через участок закрепления конечной длины l , происходящих за счет трансформации продольных колебаний в зоне нагружения в продольно-поперечно-сдвиговые колебания стержня-полосы в зоне закрепления с последующей их трансформацией в преимущественно изгибные колебания консольной части стержня.

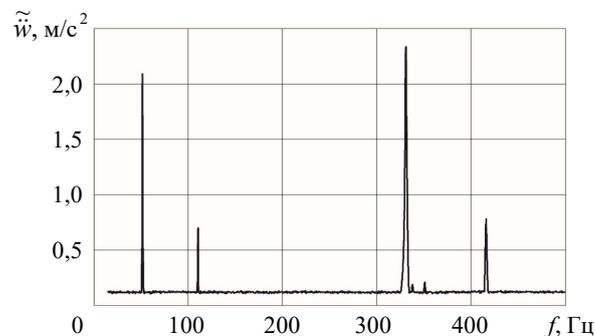


Рис. 2. Зависимость амплитуды ускорения \ddot{w} конца консоли от частоты f внешней осевой силы

С целью выявления и анализа собственных частот и соответствующих им форм колебаний рассматриваемого стержня-полосы проведены численные расчеты с использованием пакета прикладных программ ANSYS. Моделирование стержня-полосы осуществлялось трехмерными элементами SOLID185 с десятью элементами по толщине полосы t . Рассмотрены три расчетные модели с различной степенью детализации. В качестве первой модели рассматривалась полоса с жестким закреплением по поверхности $z = -t/2$ на участке длиной l , изготовленная из алюминиевого сплава Д16АТ при стандартных статических значениях его жесткостных характеристик ($E = 72$ ГПа, $G = 27,7$ ГПа) и плотности $\rho = 2800$ кг/м³. В качестве второй модели рассматривалась прежняя полоса, но при динамических значениях

модулей упругости $E = 55,4$ ГПа, $G = 21,3$ ГПа сплава Д16АТ [15]. Третья модель отличается от второй учетом деформируемости клеевого шва. В этой модели клеевой шов моделировался в виде отдельного слоя толщиной $t_k = 0,2$ мм со следующими значениями жесткостных и инерционных характеристик материала: $E = 2,5$ ГПа, $G = 0,96$ ГПа, $\rho = 2000$ кг/м³. Моделирование клеевого слоя также осуществлялось трехмерными элементами SOLID185 с одним элементом по его толщине t_k .

Результаты расчетов в виде значений пяти низших собственных частот f_j для всех трех расчетных моделей приведены в таблице 1. При этом формы колебаний, соответствующие данным собственным частотам, во всех рассматриваемых расчетных моделях оказались идентичными (рис. 3). Анализ этих форм показывает, что первая, вторая и четвертая формы (рис. 3а, 3б, 3г) являются изгибными, третья форма (рис. 3в) – изгибно-крутильная (с небольшим поворотом концевого сечения стержня-полосы по часовой стрелке приблизительно на $3,6^\circ$), а пятая форма (рис. 3д) является чисто крутильной.

Таблица 1

Собственные частоты колебаний стержня-полосы

j	Численные значения собственных частот f_j , Гц		
	Первая расчетная модель	Вторая расчетная модель	Третья расчетная модель
1	59,06	51,90	51,19
2	369,71	324,30	320,50
3	396,90	348,15	336,34
4	1034,30	907,23	896,68
5	1096,04	961,39	955,86

Из таблицы 1 видно, что наиболее близкой к низшей экспериментальной частоте $f_1^* = 51,5$ Гц является частота $f_1 = 51,19$ Гц, соответствующая третьей расчетной модели.

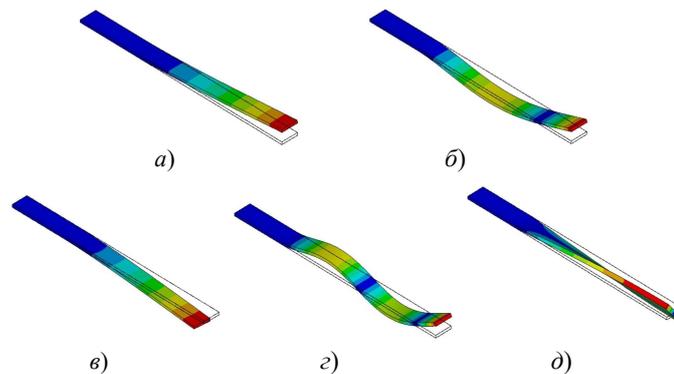


Рис. 3. Формы свободных колебаний стержня-полосы:

а – первая форма; б – вторая форма; в – третья форма; г – четвертая форма; д – пятая форма

2. Трансформационная нелинейная модель динамического деформирования при торцевом нагружении стержня-полосы

Рассмотрим стержень-полосу l , закрепленный на абсолютно жестком опорном элементе 2 по поверхности $z = -t/2$ и нагруженный торцевой осевой силой $P = P(\tau)$ (рис. 4).

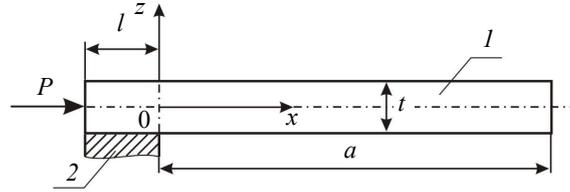


Рис. 4. Схема закрепления стержня-полосы и его внешнего нагружения

Процесс деформирования консольной части стержня длиной a будем описывать классической моделью Кирхгофа–Лява, в соответствии с которой перемещения U и W произвольной точки поперечного сечения примем в виде

$$U = u - zw_{,x}, \quad W = w, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (1)$$

где u, w – соответственно осевое перемещение и прогиб осевой линии Ox (нижний индекс x после запятой в (1) и далее означает дифференцирование по координате x). При среднем изгибе стержня выражениям (1) соответствуют в геометрически нелинейном квадратичном приближении осевые деформации

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 - zw_{,xx}, \quad 0 \leq x \leq a,$$

и вариация потенциальной энергии деформации (на единицу ширины стержня)

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_0^a [T_x(\delta u_{,x} + w_{,x}\delta w_{,x}) - M_x\delta w_{,xx}] dx = \\ &= [T_x\delta u - M_x\delta w_{,x} + (Q_z + T_x w_{,x})\delta w] \Big|_{x=0}^{x=a} - \int_0^a [T_{x,x}\delta u + (Q_z + T_x w_{,x})_{,x}\delta w] dx, \quad (2) \end{aligned}$$

где для линейно упругого материала стержня с модулем упругости E_1 в направлении оси Ox

$$T_x = B \left(u_{,x} + \frac{1}{2}w_{,x}^2 \right), \quad M_x = -Dw_{,xx}, \quad Q_z = M_{x,x} = -Dw_{,xxx}. \quad (3)$$

Здесь $B = E_1 t$, $D = E_1 t^3 / 12$ – жесткости стержня на растяжение-сжатие и изгиб.

Процесс деформирования стержня на закрепленном участке $-l \leq x \leq 0$ описать моделью (1) невозможно. Поэтому для перемещений U_0, W_0 точек этого участка примем простейшие представления, предложенные в [16, 17]:

$$U_0 = \left(1 + \frac{2z}{t} \right) u_0, \quad W_0 = 0. \quad (4)$$

Им в геометрически линейном приближении соответствуют деформации

$$\varepsilon_x^0 = \left(1 + \frac{2z}{t} \right) u_{0,x}, \quad \gamma_{xz}^0 = U_{0,z} + W_{0,x} = \frac{2}{t} u_0$$

и вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta\Pi_0 = \int_{-l}^0 (T_x^0 \delta u_{0,x} + T_{xz}^0 \delta u_0) dx = T_x^0 \delta u_0 \Big|_{x=-l}^{x=0} - \int_{-l}^0 (T_{x,x}^0 - T_{xz}^0) \delta u_0 dx, \quad (5)$$

где при использовании физических зависимостей

$$\sigma_x^0 = E_1 \varepsilon_x^0, \quad \sigma_{xz}^0 = G_{13} \gamma_{xz}^0$$

имеют место соотношения упругости

$$T_x^0 = \frac{4B}{3} u_{0,x}, \quad T_{xz}^0 = \frac{4G_{13}}{t} u_0. \quad (6)$$

Здесь G_{13} – модуль упругости материала при сдвиге в плоскости Oxz .

Подчинив представления (1) и (4) условиям непрерывности перемещений стержня в сечении $x = 0$, записываемым в виде

$$U_0|_{x=0} = U|_{x=0}, \quad W_0|_{x=0} = W|_{x=0},$$

путем приравнивания соответствующих коэффициентов при одинаковых степенях z получим кинематические условия сопряжения участков

$$u|_{x=0} = u_0|_{x=0}, \quad -w_{,x}|_{x=0} = \frac{2}{t} u_0|_{x=0}, \quad w|_{x=0} = 0. \quad (7)$$

При рассматриваемом виде нагружения вариация работы внешней осевой силы P , приложенной в сечении $x = -l$ закрепленной части стержня, определяется равенством

$$\delta A = P \delta u_0|_{x=-l}, \quad (8)$$

а для вариации работы инерционных сил (на единицу ширины стержня) соответствующие выражения запишем в приближении

$$\delta K_0 = - \int_{-l}^0 \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 \delta u_0 dx, \quad \delta K = - \int_0^a \rho t (\ddot{u} \delta u + \dot{w} \delta w) dx. \quad (9)$$

Внеся теперь составленные соотношения (2), (5), (8), (9) в вариационное уравнение Гамильтона – Остроградского

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} (\delta \Pi + \delta \Pi_0 - \delta K - \delta K_0 - \delta A) d\tau = 0,$$

при использовании условий сопряжения (7) получим

$$\begin{aligned} & (T_x \delta u - M_x \delta w_{,x})|_{x=a} + (Q_z + T_x w_{,x}) \delta w|_{x=0}^{x=a} - (P + T_x^0) \delta u_0|_{x=-l} + \\ & + \left(T_x^0 - T_x - \frac{2}{t} M_x \right) \Big|_{x=0} - \int_{-l}^0 \left(T_{x,x} - T_{xz}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 \right) \delta u_0 dx - \\ & - \int_0^a \{ (T_{x,x} - \rho t \ddot{u}) \delta u - [(Q_z + T_x w_{,x})_{,x} - \rho t \dot{w}] \delta w \} dx = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10) в силу произвольности вариаций δu_0 , δu и δw следуют уравнение движения закрепленного участка

$$T_{x,x}^0 - T_{xz}^0 - \frac{4\rho t}{3} \ddot{u}_0 = 0 \quad (11)$$

и соответствующее ему граничное условие в сечении $x = -l$

$$T_x^0|_{x=-l} = -P, \quad (12)$$

уравнения движения консольной части стержня

$$T_{x,x} - \rho t \ddot{u} = 0, \quad (Q_z + T_x w_{,x})_{,x} - \rho t \dot{w} = 0, \quad (13)$$

соответствующие им граничные условия на свободном крае $x = a$

$$T_x = 0, \quad M_x = 0, \quad Q_z + T_x w_{,x} = 0, \quad (14)$$

а также силовое условие сопряжения участков, формулируемое в сечении $x = 0$,

$$\left(T_x^0 - T_x - \frac{2}{t} M_x \right) \Big|_{x=0} = 0. \quad (15)$$

Заметим, что суммарный порядок составленных уравнений движения равен восьми, чему соответствуют четыре формулируемых граничных условия (12), (14) и четыре условия сопряжения участков (7) и (15).

3. Построение аналитических решений

При изгибных колебаниях стержня-полосы по первым низшим частотам во втором уравнении системы (13) и в третьем граничном условии (14) с большой степенью точности допустимо пренебречь подчеркнутыми слагаемыми (в силу их малости по сравнению с Q_z даже при $w \gg t$), что позволяет при использовании (3) второе уравнение в (13) и два последних условия в (14) записать в упрощенном виде

$$w_{,xxxx} + \frac{\rho t}{D} \ddot{w} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (16)$$

$$w_{,xx} \Big|_{x=a} = 0, \quad w_{,xxx} \Big|_{x=a} = 0, \quad (17)$$

а первое уравнение системы (13), линеаризованное в окрестности решения уравнения (16), записать в виде

$$u_{,xx} - \frac{\rho t}{B} \ddot{u} = -w_{,x} w_{,xx}, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (18)$$

Решение уравнения (16) будем искать в виде

$$w(x, \tau) = \tilde{w}^{(1)}(x) \exp(i\omega\tau) + \tilde{w}^{(2)}(x) \exp(2i\omega\tau). \quad (19)$$

С учетом (19) уравнение (16) приводится к уравнениям относительно амплитуд $\tilde{w}^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)}$:

$$\tilde{w}_{,xxxx}^{(1)} - k_w^{(1)4} \tilde{w}^{(1)} = 0, \quad \tilde{w}_{,xxxx}^{(2)} - k_w^{(2)4} \tilde{w}^{(2)} = 0, \quad (20)$$

где

$$k_w^{(1)4} = \frac{\rho t \omega^2}{D}, \quad k_w^{(2)4} = \frac{4\rho t \omega^2}{D}.$$

Решения уравнений (20) имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{w}^{(j)} = & c_1^{(j)} \sin(k_w^{(j)} x) + c_2^{(j)} \cos(k_w^{(j)} x) + c_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} x) + \\ & + c_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} x), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (21)$$

где $c_1^{(j)}, \dots, c_4^{(j)}$ – постоянные интегрирования. Для однозначного определения этих постоянных к условиям (17) и третьему условию в (7) необходимо добавить кинематическое ограничение

$$w_{,x}|_{x=0} = \varphi_0, \quad (22)$$

где φ_0 – пока неизвестный угол поворота консоли в сечении $x = 0$, который в дальнейшем будет участвовать в формировании кинематических условий сопряжения консоли с закрепленным участком стержня. Подчинив решения (21) третьему условию в (7) и условиям (22) и (17), получим системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} c_2^{(j)} + c_3^{(j)} + c_4^{(j)} = 0, \quad c_1^{(j)} + c_3^{(j)} - c_4^{(j)} = \tilde{\varphi}_0^{(j)}/k_w^{(j)}, \\ -c_1^{(j)} \sin(k_w^{(j)} a) - c_2^{(j)} \cos(k_w^{(j)} a) + c_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} a) + c_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} a) = 0, \quad (23) \\ -c_1^{(j)} \cos(k_w^{(j)} a) + c_2^{(j)} \sin(k_w^{(j)} a) + c_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} a) - c_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} a) = 0, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\varphi}_0^{(j)}$ – амплитуды угла φ_0 при изгибных колебаниях консоли с частотами ω и 2ω . В результате решения системы (23) устанавливаются зависимости

$$c_1^{(j)} = r_1^{(j)} \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad c_2^{(j)} = r_2^{(j)} \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad c_3^{(j)} = r_3^{(j)} \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad c_4^{(j)} = r_4^{(j)} \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} r_1^{(j)} &= 2 \frac{1 + \cos(k_w^{(j)} a) \operatorname{ch}(k_w^{(j)} a) + \sin(k_w^{(j)} a) \operatorname{sh}(k_w^{(j)} a)}{k_w^{(j)} \Delta^{(j)}}, \\ r_2^{(j)} &= 2 \frac{\cos(k_w^{(j)} a) \operatorname{sh}(k_w^{(j)} a) - \sin(k_w^{(j)} a) \operatorname{ch}(k_w^{(j)} a)}{k_w^{(j)} \Delta^{(j)}}, \\ r_3^{(j)} &= \frac{1 + [\sin(k_w^{(j)} a) + \cos(k_w^{(j)} a)] \exp(-k_w^{(j)} a)}{k_w^{(j)} \Delta^{(j)}}, \\ r_4^{(j)} &= \frac{-1 + [\sin(k_w^{(j)} a) - \cos(k_w^{(j)} a)] \exp(k_w^{(j)} a)}{k_w^{(j)} \Delta^{(j)}}, \\ \Delta^{(j)} &= 4[1 + \cos(k_w^{(j)} a) \operatorname{ch}(k_w^{(j)} a)], \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Подстановка зависимостей (24) в (21) приводит к решениям

$$\tilde{w}^{(j)} = F_0^{(j)}(x) \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

где

$$F_0^{(j)}(x) = r_1^{(j)} \sin(k_w^{(j)} x) + r_2^{(j)} \cos(k_w^{(j)} x) + r_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} x) + r_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} x).$$

Следовательно,

$$\tilde{w}_{,x}^{(j)} = k_w^{(j)} F_1^{(j)}(x) \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad \tilde{w}_{,xx}^{(j)} = k_w^{(j)2} F_2^{(j)}(x) \tilde{\varphi}_0^{(j)}, \quad j = 1, 2. \quad (26)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_1^{(j)}(x) &= r_1^{(j)} \cos(k_w^{(j)} x) - r_2^{(j)} \sin(k_w^{(j)} x) + r_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} x) - r_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} x), \\ F_2^{(j)}(x) &= -r_1^{(j)} \sin(k_w^{(j)} x) - r_2^{(j)} \cos(k_w^{(j)} x) + r_3^{(j)} \exp(k_w^{(j)} x) + r_4^{(j)} \exp(-k_w^{(j)} x). \end{aligned}$$

Изгибающий момент в консоли определяется зависимостью $M_x = -D_{w,xx}$, которая в соответствии с представлением (19) принимает вид

$$M_x = \tilde{M}_x^{(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{M}_x^{(2)} \exp(2i\omega\tau) = -D[\tilde{w}_{,xx}^{(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{w}_{,xx}^{(2)} \exp(2i\omega\tau)]. \quad (27)$$

Отсюда с учетом (26) следуют амплитуды изгибающих моментов

$$\tilde{M}_x^{(1)} = -Dk_w^{(1)2} F_2^{(1)}(x) \tilde{\varphi}_0^{(1)}, \quad \tilde{M}_x^{(2)} = -Dk_w^{(2)2} F_2^{(2)}(x) \tilde{\varphi}_0^{(2)}. \quad (28)$$

Согласно представлению (19), уравнение (18) получается таким:

$$u_{,xx} - \frac{\rho t \ddot{u}}{B} = -\tilde{w}_{,x}^{(1)} \tilde{w}_{,xx}^{(1)} \exp(2i\omega\tau) - (\tilde{w}_{,x}^{(1)} \tilde{w}_{,xx}^{(2)} + \tilde{w}_{,x}^{(2)} \tilde{w}_{,xx}^{(1)}) \exp(3i\omega\tau) - \tilde{w}_{,x}^{(2)} \tilde{w}_{,xx}^{(2)} \exp(4i\omega\tau). \quad (29)$$

Его решение необходимо искать в виде

$$u(x, \tau) = \tilde{u}^{(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{u}^{(2)} \exp(2i\omega\tau) + \tilde{u}^{(3)} \exp(3i\omega\tau) + \tilde{u}^{(4)} \exp(4i\omega\tau). \quad (30)$$

Подстановка (30) в (29) приводит к четырем уравнениям

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{,xx}^{(1)} + k_{(1)}^2 \tilde{u}^{(1)} &= 0, & \tilde{u}_{,xx}^{(2)} + k_{(2)}^2 \tilde{u}^{(2)} &= -\tilde{w}_{,x}^{(1)} \tilde{w}_{,xx}^{(1)}, \\ \tilde{u}_{,xx}^{(3)} + k_{(3)}^2 \tilde{u}^{(3)} &= -\tilde{w}_{,x}^{(1)} \tilde{w}_{,xx}^{(2)} - \tilde{w}_{,x}^{(2)} \tilde{w}_{,xx}^{(1)}, & \tilde{u}_{,xx}^{(4)} + k_{(4)}^2 \tilde{u}^{(4)} &= -\tilde{w}_{,x}^{(2)} \tilde{w}_{,xx}^{(2)} \end{aligned} \quad (31)$$

с коэффициентами $k_{(1)}^2 = \rho t \omega^2 / B$, $k_{(2)}^2 = 4k_{(1)}^2$, $k_{(3)}^2 = 9k_{(1)}^2$, $k_{(4)}^2 = 16k_{(1)}^2$.

С учетом (26) уравнения (31) принимают вид

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{,xx}^{(1)} + k_{(1)}^2 \tilde{u}^{(1)} &= 0, & \tilde{u}_{,xx}^{(2)} + k_{(2)}^2 \tilde{u}^{(2)} &= -k_w^{(1)3} R_1(x) \tilde{\varphi}_0^{(1)2}, \\ \tilde{u}_{,xx}^{(3)} + k_{(3)}^2 \tilde{u}^{(3)} &= -k_w^{(1)} k_w^{(2)} [k_w^{(2)} R_2(x) + k_w^{(1)} R_3(x)] \tilde{\varphi}_0^{(1)} \tilde{\varphi}_0^{(2)}, \\ \tilde{u}_{,xx}^{(4)} + k_{(4)}^2 \tilde{u}^{(4)} &= -k_w^{(2)3} R_4(x) \tilde{\varphi}_0^{(2)2}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(x) &= F_1^{(1)}(x) F_2^{(1)}(x), & R_2(x) &= F_1^{(1)}(x) F_2^{(2)}(x), \\ R_3(x) &= F_1^{(2)}(x) F_2^{(1)}(x), & R_4(x) &= F_1^{(2)}(x) F_2^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Решения уравнений (32) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(1)}(x) &= d_1^{(1)} \sin(k_{(1)}x) + d_2^{(1)} \cos(k_{(1)}x), \\ \tilde{u}^{(2)}(x) &= d_1^{(2)} \sin(k_{(2)}x) + d_2^{(2)} \cos(k_{(2)}x) - k_w^{(1)3} f_1(x) \tilde{\varphi}_0^{(1)2}, \\ \tilde{u}^{(3)}(x) &= d_1^{(3)} \sin(k_{(3)}x) + d_2^{(3)} \cos(k_{(3)}x) - k_w^{(1)} k_w^{(2)} [k_w^{(2)} f_2(x) + k_w^{(1)} f_3(x)] \tilde{\varphi}_0^{(1)} \tilde{\varphi}_0^{(2)}, \\ \tilde{u}^{(4)}(x) &= d_1^{(4)} \sin(k_{(4)}x) + d_2^{(4)} \cos(k_{(4)}x) - k_w^{(2)3} f_4(x) \tilde{\varphi}_0^{(2)2}. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь $d_j^{(k)}$ ($j=1, 2, k=\overline{1, 4}$) – постоянные интегрирования, $f_q(x)$ ($q=\overline{1, 4}$) – частные решения неоднородных дифференциальных уравнений в (32) с соответствующими правыми частями $R_q(x)$, имеющие весьма громоздкий вид, для нахождения которых можно использовать любой подходящий пакет компьютерной математики, например MATLAB [18].

В соответствии с первой зависимостью в (3) и представлениями (19) и (30) усилие T_x в консоли будет определяться выражением

$$\begin{aligned} T_x &= B \left(u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right) = B \left[\tilde{u}_{,x}^{(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{u}_{,x}^{(2)} \exp(2i\omega\tau) + \tilde{u}_{,x}^{(3)} \exp(3i\omega\tau) + \right. \\ &+ \left. \tilde{u}_{,x}^{(4)} \exp(4i\omega\tau) \right] + \frac{B}{2} \left[\tilde{w}_{,x}^{(1)2} \exp(2i\omega\tau) + 2\tilde{w}_{,x}^{(1)} \tilde{w}_{,x}^{(2)} \exp(3i\omega\tau) + \tilde{w}_{,x}^{(2)2} \exp(4i\omega\tau) \right] = \\ &= \tilde{T}_x^{(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{(2)} \exp(2i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{(3)} \exp(3i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{(4)} \exp(4i\omega\tau), \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x^{(1)} &= B\tilde{u}_{,x}^{(1)}, \quad \tilde{T}_x^{(2)} = B\left(\tilde{u}_{,x}^{(2)} + \frac{1}{2}\tilde{w}_{,x}^{(1)2}\right), \\ \tilde{T}_x^{(3)} &= B\left(\tilde{u}_{,x}^{(3)} + \tilde{w}_{,x}^{(1)}\tilde{w}_{,x}^{(2)}\right), \quad \tilde{T}_x^{(4)} = B\left(\tilde{u}_{,x}^{(4)} + \frac{1}{2}\tilde{w}_{,x}^{(2)2}\right).\end{aligned}\quad (35)$$

С учетом полученных решений (33) и соотношений (26) зависимости (35) принимают вид

$$\begin{aligned}\tilde{T}_x^{(1)} &= Bk_{(1)}[d_1^{(1)}\cos(k_{(1)}x) - d_2^{(1)}\sin(k_{(1)}x)], \\ \tilde{T}_x^{(2)} &= Bk_{(2)}[d_1^{(2)}\cos(k_{(2)}x) - d_2^{(2)}\sin(k_{(2)}x)] + BQ_1(x)\tilde{\varphi}_0^{(1)2}, \\ \tilde{T}_x^{(3)} &= Bk_{(3)}[d_1^{(3)}\cos(k_{(3)}x) - d_2^{(3)}\sin(k_{(3)}x)] + BQ_2(x)\tilde{\varphi}_0^{(1)}\tilde{\varphi}_0^{(2)}, \\ \tilde{T}_x^{(4)} &= Bk_{(4)}[d_1^{(4)}\cos(k_{(4)}x) - d_2^{(4)}\sin(k_{(4)}x)] + BQ_3(x)\tilde{\varphi}_0^{(2)2}\end{aligned}\quad (36)$$

с обозначениями

$$\begin{aligned}Q_1(x) &= -k_w^{(1)3}f_{1,x} + \frac{1}{2}k_w^{(1)2}F_1^{(1)2}(x), \\ Q_2(x) &= k_w^{(1)}k_w^{(2)}[-k_w^{(2)}f_{2,x} - k_w^{(1)}f_{3,x}F_1^{(1)}(x)F_1^{(2)}(x)], \\ Q_3(x) &= -k_w^{(2)3}f_{4,x} + \frac{1}{2}k_w^{(2)2}F_1^{(2)2}(x).\end{aligned}$$

В сечении $x = a$ должны быть выполнены граничные условия:

$$\tilde{T}_x^{(1)}\Big|_{x=a} = 0, \quad \tilde{T}_x^{(2)}\Big|_{x=a} = 0, \quad \tilde{T}_x^{(3)}\Big|_{x=a} = 0, \quad \tilde{T}_x^{(4)}\Big|_{x=a} = 0. \quad (37)$$

Подстановка в (37) зависимостей (36) при $x = a$ дает четыре алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned}d_1^{(1)}\cos(k_{(1)}a) - d_2^{(1)}\sin(k_{(1)}a) &= 0, \\ k_{(2)}[d_1^{(2)}\cos(k_{(2)}a) - d_2^{(2)}\sin(k_{(2)}a)] + Q_1(a)\tilde{\varphi}_0^{(1)2} &= 0, \\ k_{(3)}[d_1^{(3)}\cos(k_{(3)}a) - d_2^{(3)}\sin(k_{(3)}a)] + Q_2(a)\tilde{\varphi}_0^{(1)}\tilde{\varphi}_0^{(2)} &= 0, \\ k_{(4)}[d_1^{(4)}\cos(k_{(4)}a) - d_2^{(4)}\sin(k_{(4)}a)] + Q_3(a)\tilde{\varphi}_0^{(2)2} &= 0.\end{aligned}\quad (38)$$

Уравнение (11) для закрепленной части стержня при использовании соотношений (6) запишется в виде

$$u_{0,xx} - k_0^2u_0 - \frac{\rho}{E_1}\ddot{u}_0 = 0, \quad k_0^2 = \frac{3G_{13}}{E_1t^2}. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) по аналогии с (30) будем искать в виде

$$u_0(x, \tau) = \tilde{u}_0^{(1)}\exp(i\omega\tau) + \tilde{u}_0^{(2)}\exp(2i\omega\tau) + \tilde{u}_0^{(3)}\exp(3i\omega\tau) + \tilde{u}_0^{(4)}\exp(4i\omega\tau), \quad (40)$$

что приводит к уравнениям

$$\tilde{u}_{0,xx}^{(k)} - \chi_{(k)}^2\tilde{u}_0^{(k)} = 0, \quad k = \overline{1, 4}, \quad (41)$$

в которых

$$\chi_{(1)}^2 = k_0^2 - \frac{\rho\omega^2}{E_1}, \quad \chi_{(2)}^2 = k_0^2 - \frac{4\rho\omega^2}{E_1}, \quad \chi_{(3)}^2 = k_0^2 - \frac{9\rho\omega^2}{E_1}, \quad \chi_{(4)}^2 = k_0^2 - \frac{16\rho\omega^2}{E_1}.$$

Вычисления показали, что величины $\chi_{(k)}^2$ при любых разумных значениях E_1 , ω и ρ всегда получаются положительными. В этом случае решения уравнений (41) имеют вид

$$\tilde{u}_0^{(k)} = g_1^{(k)} \exp(\chi_{(k)} x) + g_2^{(k)} \exp(-\chi_{(k)} x), \quad k = \overline{1, 4}, \quad (42)$$

где $g_1^{(k)}$, $g_2^{(k)}$ – постоянные интегрирования.

В соответствии с (40) усилие $T_x^0(x, \tau)$ в закрепленной части стержня представляется выражением

$$T_x^0(x, \tau) = \tilde{T}_x^{0(1)} \exp(i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{0(2)} \exp(2i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{0(3)} \exp(3i\omega\tau) + \tilde{T}_x^{0(4)} \exp(4i\omega\tau), \quad (43)$$

где

$$\tilde{T}_x^{0(k)} = \frac{4B}{3} \tilde{u}_{0,x}^{(k)} = \frac{4B}{3} \chi_{(k)} [g_1^{(k)} \exp(\chi_{(k)} x) - g_2^{(k)} \exp(-\chi_{(k)} x)], \quad k = \overline{1, 4}. \quad (44)$$

Предположим, что в сечении $x = -l$ стержня приложена гармоническая осевая сила

$$P = \tilde{P} \exp(i\omega\tau). \quad (45)$$

Подчиняя (43) граничному условию $T_x^0|_{x=-l} = -P$ и учитывая зависимости (44), (45), получаем в дополнение к (38) еще четыре алгебраических уравнения:

$$\begin{aligned} g_1^{(1)} \exp(-\chi_{(1)} l) - g_2^{(1)} \exp(\chi_{(1)} l) + \frac{3\tilde{P}}{4B\chi_{(1)}} &= 0, \\ g_1^{(2)} \exp(-\chi_{(2)} l) - g_2^{(2)} \exp(\chi_{(2)} l) &= 0, \\ g_1^{(3)} \exp(-\chi_{(3)} l) - g_2^{(3)} \exp(\chi_{(3)} l) &= 0, \\ g_1^{(4)} \exp(-\chi_{(4)} l) - g_2^{(4)} \exp(\chi_{(4)} l) &= 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Заметим, что в соответствии с представлениями (19), (27), (30), (34), (40) и (43) для удовлетворения кинематическим условиям сопряжения участков (7), а также силового условия сопряжения (15) требуется выполнение равенств

$$\begin{aligned} (\tilde{u}^{(1)} - \tilde{u}_0^{(1)})|_{x=0} &= 0, \quad (\tilde{u}^{(2)} - \tilde{u}_0^{(2)})|_{x=0} = 0, \quad (\tilde{u}^{(3)} - \tilde{u}_0^{(3)})|_{x=0} = 0, \\ (\tilde{u}^{(4)} - \tilde{u}_0^{(4)})|_{x=0} &= 0, \quad \left(\frac{2}{t} \tilde{u}_0^{(1)} + \tilde{\varphi}_0^{(1)}\right)|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{2}{t} \tilde{u}_0^{(2)} + \tilde{\varphi}_0^{(2)}\right)|_{x=0} = 0, \\ \left(\tilde{T}_x^{0(1)} - \tilde{T}_x^{(1)} - \frac{2}{t} \tilde{M}_x^{(1)}\right)|_{x=0} &= 0, \quad \left(\tilde{T}_x^{0(2)} - \tilde{T}_x^{(2)} - \frac{2}{t} \tilde{M}_x^{(2)}\right)|_{x=0} = 0, \\ (\tilde{T}_x^{0(3)} - \tilde{T}_x^{(3)})|_{x=0} &= 0, \quad (\tilde{T}_x^{0(4)} - \tilde{T}_x^{(4)})|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

которые с учетом (28), (33), (36), (42) и (44) в дополнение к уравнениям (38) и (46) добавляют еще десять алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} d_2^{(1)} - g_1^{(1)} - g_2^{(1)} &= 0, \quad d_2^{(2)} - g_1^{(2)} - g_2^{(2)} - k_w^{(1)3} f_1(0) \tilde{\varphi}_0^{(1)2} = 0, \\ d_2^{(3)} - g_1^{(3)} - g_2^{(3)} - k_w^{(1)} k_w^{(2)} [k_w^{(2)} f_2(0) + k_w^{(1)} f_3(0)] \tilde{\varphi}_0^{(1)} \tilde{\varphi}_0^{(2)} &= 0, \\ d_2^{(4)} - g_1^{(4)} - g_2^{(4)} - k_w^{(2)3} f_4(0) \tilde{\varphi}_0^{(2)2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{t}(g_1^{(1)} + g_2^{(1)}) + \tilde{\varphi}_0^{(1)} &= 0, & \frac{2}{t}(g_1^{(2)} + g_2^{(2)}) + \tilde{\varphi}_0^{(2)} &= 0, \\
\frac{4}{3}\chi_{(1)}(g_1^{(1)} - g_2^{(1)}) - k_{(1)}d_1^{(1)} + \frac{t}{6}k_w^{(1)2}F_2^{(1)}(0)\tilde{\varphi}_0^{(1)} &= 0, \\
\frac{4}{3}\chi_{(2)}(g_1^{(2)} - g_2^{(2)}) - k_{(2)}d_1^{(2)} - Q_1(0)\tilde{\varphi}_0^{(1)2} + \frac{t}{6}k_w^{(2)2}F_2^{(2)}(0)\tilde{\varphi}_0^{(2)} &= 0, \\
\frac{4}{3}\chi_{(3)}(g_1^{(3)} - g_2^{(3)}) - k_{(3)}d_1^{(3)} - Q_2(0)\tilde{\varphi}_0^{(1)}\tilde{\varphi}_0^{(2)} &= 0, \\
\frac{4}{3}\chi_{(4)}(g_1^{(4)} - g_2^{(4)}) - k_{(4)}d_1^{(4)} - Q_3(0)\tilde{\varphi}_0^{(2)2} &= 0.
\end{aligned} \tag{47}$$

Таким образом, для определения шестнадцати постоянных интегрирования $d_1^{(k)}$, $d_2^{(k)}$, $g_1^{(k)}$, $g_2^{(k)}$ ($k = \overline{1, 4}$) и амплитуд углов $\tilde{\varphi}_0^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_0^{(2)}$ получаем систему восемнадцати алгебраических уравнений (38), (46), (47), которая является нелинейной относительно $\tilde{\varphi}_0^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_0^{(2)}$. Для ее решения используем итерационный метод Ньютона [19]. С этой целью введем обозначения $L_1(x_1, x_2, \dots, x_{18})$, $L_2(x_1, x_2, \dots, x_{18})$, ..., $L_{18}(x_1, x_2, \dots, x_{18})$, в которых L_1, L_2, \dots, L_{18} – левые части отмеченных уравнений, зависящие от постоянных интегрирования

$$\begin{aligned}
x_1 = d_1^{(1)}, \quad x_2 = d_2^{(1)}, \quad x_3 = g_1^{(1)}, \quad x_4 = g_2^{(1)}, \quad x_5 = d_1^{(2)}, \quad x_6 = d_2^{(2)}, \quad x_7 = g_1^{(2)}, \\
x_8 = g_2^{(2)}, \quad x_9 = d_1^{(3)}, \quad x_{10} = d_2^{(3)}, \quad x_{11} = g_1^{(3)}, \quad x_{12} = g_2^{(3)}, \quad x_{13} = d_1^{(4)}, \\
x_{14} = d_2^{(4)}, \quad x_{15} = g_1^{(4)}, \quad x_{16} = g_2^{(4)}, \quad x_{17} = \tilde{\varphi}_0^{(1)}, \quad x_{18} = \tilde{\varphi}_0^{(2)}.
\end{aligned}$$

Алгоритм метода Ньютона имеет вид

$$\{X^{(n)}\} = \{X^{(n-1)}\} - [G\{X^{(n-1)}\}]^{-1}\{L^{(n-1)}\}, \tag{48}$$

$\{X^{(n)}\}$ – n -е приближение вектора $\{X\}$, элементами которого являются значения x_k ($k = \overline{1, 18}$); $\{L^{(n-1)}\}$ – вектор, содержащий левые части уравнений на итерации $n-1$; $[G\{X^{(n-1)}\}]$ – матрица Якоби, состоящая из элементов $G_{ik} = \partial L_i / \partial x_k$ ($i, k = \overline{1, 18}$).

Алгоритм (48) удобно записать в виде, не требующем обращения матрицы $[G\{X^{(n-1)}\}]$:

$$[G\{X^{(n-1)}\}]\{\Delta X^{(n)}\} = -\{L^{(n-1)}\}. \tag{49}$$

Здесь $\{\Delta X^{(n)}\} = \{X^{(n)}\} - \{X^{(n-1)}\}$ – приращение вектора $\{X\}$ на текущей итерации n . Для решения системы (49) относительно вектора $\{\Delta X^{(n)}\}$ можно использовать стандартный метод Гаусса. Процедура (49) стартует со значения $n = 1$. В качестве начального вектора $\{\Delta X^{(0)}\}$ можно взять решение системы линейных алгебраических уравнений

$$[A]\{X^{(0)}\} = \{B\}, \tag{50}$$

содержащих в левой части постоянные интегрирования $d_1^{(k)}$, $d_2^{(k)}$, $g_1^{(k)}$, $g_2^{(k)}$ ($k = \overline{1, 4}$) и первые степени амплитуд углов $\tilde{\varphi}_0^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_0^{(2)}$. Нелинейные слагаемые, содержащие величины $\tilde{\varphi}_0^{(1)2}$, $\tilde{\varphi}_0^{(1)}\tilde{\varphi}_0^{(2)}$, $\tilde{\varphi}_0^{(2)2}$ и свободные члены системы уравнений (50), записываются в векторе $\{B\}$. В качестве начальных $\tilde{\varphi}_0^{(1)}$, $\tilde{\varphi}_0^{(2)}$ можно взять значения, получаемые из (25) при заданных начальных амплитудах прогибов $\tilde{w}_0^{(1)}|_{x=a}$ и $\tilde{w}_0^{(2)}|_{x=a}$:

$$\tilde{\varphi}_0^{(1)} = \frac{\tilde{w}_0^{(1)}}{F_0^{(1)}} \Big|_{x=a}, \quad \tilde{\varphi}_0^{(2)} = \frac{\tilde{w}_0^{(2)}}{F_0^{(2)}} \Big|_{x=a}.$$

Итерации завершаются при выполнении условия

$$\left\| \{\Delta X^{(n)}\} \right\|_2^2 / \left\| \{X^{(n)}\} \right\|_2^2 \leq \psi, \quad (51)$$

где $\left\| \{\Delta X^{(n)}\} \right\|_2^2, \left\| \{X^{(n)}\} \right\|_2^2$ – квадраты вторых норм соответствующих векторов, ψ – заданная точность.

4. Численные эксперименты и анализ полученных результатов

Рассматривается стержень-полоса (см. рис. 4) с размерами и материалом, выбранными при проведении физического эксперимента (см. раздел 1): $t = 2,9$ мм, $l = 50$ мм, $a = 200$ мм, $b = 20$ мм (ширина стержня); материал – алюминиевый сплав Д16АТ с динамическими модулями упругости $E_1 = 55,4$ ГПа, $G_{13} = 21,3$ ГПа и плотностью $\rho = 2800$ кг/м³. Демпфирующие свойства материала при растяжении-сжатии и поперечном сдвиге учитывались заменой динамических модулей упругости E_1 и G_{13} их комплексными аналогами

$$E_1^* = E_1 + i \frac{E_1 \delta_1}{\pi}, \quad G_{13}^* = G_{13} + i \frac{G_{13} \delta_{13}}{\pi}$$

с логарифмическими декрементами колебаний $\delta_1 = 0,005$ и $\delta_{13} = 0,002$.

Торец стержня нагружен осевой силой $P = \tilde{P} \exp(i\omega t)$ с амплитудой $\tilde{P} = 180$ Н/м (на единицу ширины стержня). Исследовались резонансные колебания стержня на низших частотах $\omega_1 = 2\pi f_1$ и $\omega_2 = 2\pi f_2$ ($f_1 = 51,737$ Гц, $f_2 = 323,974$ Гц), найденных методом итераций в подпространстве [20] при моделировании стержня одномерными конечными элементами [21], работающими в рамках модели С.П. Тимошенко.

Необходимо заметить, что сила $P = \tilde{P} \exp(i\omega t)$ на торце стержня (см. рис. 1) возбуждалась в физическом эксперименте электромагнитным воздействием соленоида и определить экспериментальное значение \tilde{P} при таком возбуждении не представляется возможным. Поэтому указанное расчетное значение \tilde{P} взято произвольным (но в пределах разумных значений).

Система уравнений (38), (46), (47) для нахождения постоянных интегрирования $d_1^{(k)}, d_2^{(k)}, g_1^{(k)}, g_2^{(k)}$ ($k = \overline{1, 4}$) и амплитуд углов $\tilde{\varphi}_0^{(1)}, \tilde{\varphi}_0^{(2)}$ решалась итерационным методом Ньютона до выполнения условия (51) при точности $\psi = 10^{-15}$. Для достижения заданной точности потребовалось четыре итерации.

Проведенные численные эксперименты показали, что вибрации через участок закрепления в консольную часть стержня при заданном значении $\tilde{P} = 180$ Н/м (и даже при намного больших значениях) при резонансных колебаниях на частотах f_1 и f_2 не проходят. Это обусловлено, по-видимому, тем, что для стержней из металлических конструкционных материалов модель (4) при больших значениях безразмерного параметра $k^2 = 3G_{13}l^2/(E_1t^2)$ является чрезмерно «жесткой». Она не позволяет описать с приемлемой степенью точности трансформацию продольных колебаний в зоне нагружения в продольно-поперечно-сдвиговые колебания стержня-полосы в зоне закрепления с последующей их трансформацией в преимущественно изгибные колебания консольной части стержня.

Для «смягчения» этой модели необходимо уменьшить параметр k^2 до приемлемых значений, что при заданных l, t и E_1 возможно только искусственным снижением модуля поперечного сдвига G_{13} . Это позволяет интегрально учесть различные факторы, снижающие жесткость участка закрепления конечной длины l (податливость клевого слоя, малые деформации опорного элемента и прочее).

Заметим, что, согласно представлению (20), частоте ω_1 должны соответствовать амплитуды колебаний $\tilde{w}^{(1)}$ и $\tilde{w}^{(2)}$ с частотами ω_1 и $2\omega_1$. Однако проведенные численные эксперименты показали, что амплитуды колебаний $\tilde{w}^{(2)}$ при исходных и значительно сниженных значениях модуля упругости G_{13} получаются примерно на 10–12 порядков ниже амплитуд $\tilde{w}^{(1)}$. Поэтому амплитуды $\tilde{w}^{(2)}$ и все параметры напряженно-деформированного состояния стержня, соответствующие частоте $2\omega_1$, в дальнейших расчетах не учитывались и считалось, что амплитуды изгибных колебаний $\tilde{w} = \tilde{w}^{(1)}$.

Следует признать, что отмеченный факт не согласуется с результатами, наблюдаемыми в физическом эксперименте (см. рис. 2), где частоте $f_2^* \approx 2f_1^*$ соответствует ускорение \tilde{w} , составляющее приблизительно 30% от ускорения на частоте f_1^* . Из этого можно сделать вывод о том, что отобразить наблюдаемое в эксперименте явление прохождения вибраций на частоте f_2^* в рамках разработанной в разделе 2 расчетной модели для получения стационарного решения задачи не представляется возможным (отмеченное явление требует проведения дополнительных теоретических исследований, выходящих за пределы настоящей статьи).

В таблице 2 приведены собственные частоты колебаний f_1 и f_2 стержня и соответствующие им амплитуды изгибных колебаний \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 , а также амплитуды ускорений \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 конца консоли при различных значениях G_{13}/E_1 (отношение $G_{13}/E_1 = 0,384$ соответствует исходному значению $G_{13} = 21,3$ ГПа).

Таблица 2

Собственные частоты колебаний стержня и соответствующие им амплитуды изгибных колебаний и ускорений конца консоли

G_{13}/E_1	f_1 , Гц	f_2 , Гц	\tilde{w}_1 , мм	\tilde{w}_2 , мм	\tilde{w}_1 , м/с ²	\tilde{w}_2 , м/с ²
0,384	51,737	323,974	$4,02 \cdot 10^{-9}$	$3,93 \cdot 10^{-10}$	$4,25 \cdot 10^{-7}$	$1,63 \cdot 10^{-6}$
0,20	51,605	323,171	$9,64 \cdot 10^{-7}$	$9,45 \cdot 10^{-8}$	$1,01 \cdot 10^{-4}$	$3,90 \cdot 10^{-4}$
0,08	51,332	321,531	$2,08 \cdot 10^{-4}$	$2,03 \cdot 10^{-5}$	0,022	0,083
0,06	51,218	320,856	$7,44 \cdot 10^{-4}$	$7,27 \cdot 10^{-5}$	0,077	0,296
0,04	51,028	319,744	0,0035	$3,41 \cdot 10^{-4}$	0,360	1,376
0,03	50,870	318,825	0,0090	$8,76 \cdot 10^{-4}$	0,920	3,515
0,02	50,608	317,320	0,0286	$27,70 \cdot 10^{-4}$	2,889	10,997

Из таблицы 2 видно, что по мере уменьшения отношения G_{13}/E_1 частоты f_1 и f_2 незначительно убывают, а соответствующие амплитуды изгибных колебаний \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 и амплитуды ускорений \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 конца консоли заметно возрастают. Отмеченный факт, очевидно, объясняется увеличением податливости закрепленной части стержня при уменьшении значений G_{13}/E_1 . Однако полученные амплитуды колебаний \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 конца консоли при всех испытываемых значениях G_{13}/E_1 при резонансе на частотах f_1 и f_2 настолько малы, что они не могут быть надежно отслежены какими-либо инструментально-аппаратными средствами фиксации перемещений при проведении физического эксперимента. Более определенную информацию о прохождении вибраций в консольную часть стержня по мере уменьшения отношения G_{13}/E_1 дают амплитуды ускорений \tilde{w}_1, \tilde{w}_2 конца консоли, которые при $G_{13}/E_1 \leq 0,04$ представляют собой величины одного порядка по сравнению с ускорениями, наблюдаемыми при проведении физического эксперимента (см. рис. 2). При этом более интенсивное прохождение вибраций (если судить по амплитудам ускорений \tilde{w}_1, \tilde{w}_2) имеет место при резонансе на частоте f_2 .

На рис. 5, 6 приведены соответственно амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0$ (пунктирные линии) и $\tilde{\sigma}_x$ (сплошные линии) на поверхности $z = t/2$ стержня и амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0$ (пунктирные линии) и $\tilde{\sigma}_{xz}$ (сплошные линии) при резонансных колебаниях на частотах f_1 (рис. 5а, 6а) и f_2 (рис. 5б, 6б), полученные при $G_{13}/E_1 = 0,02$.

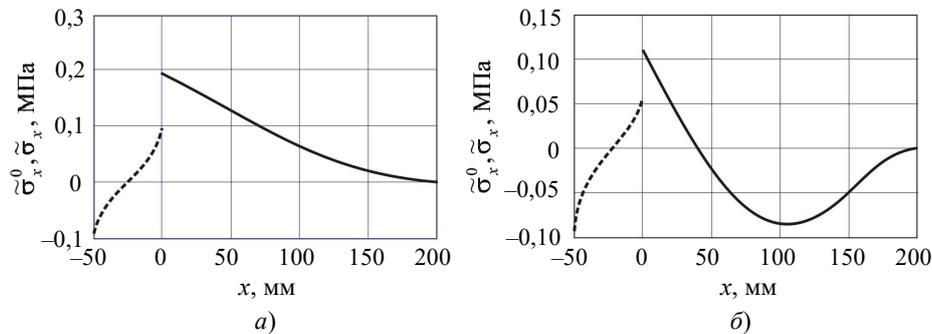


Рис. 5. Амплитуды нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_x^0$ и $\tilde{\sigma}_x$ при резонансных колебаниях стержня

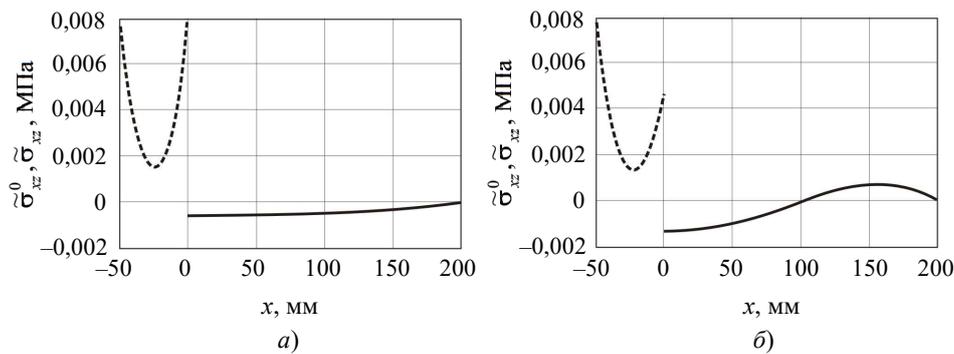


Рис. 6. Амплитуды касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{xz}^0$ и $\tilde{\sigma}_{xz}$ при резонансных колебаниях стержня

Из рис. 5 и 6 видно, что при переходе через границу от консольной части стержня к участку закрепления конечной длины l наблюдается существенная трансформация нормальных и касательных напряжений с локализацией их вблизи сечений $x = 0$ и $x = -l$ закрепленной части стержня.

Заключение

Разработана методика экспериментального исследования вынужденных изгибных колебаний консольно закрепленного стержня-полосы, возбуждающихся за счет прохождения вибраций через участок закрепления конечной длины на одной из лицевых поверхностей при осевом нагружении гармонической силой, приложенной к торцевому сечению закрепленного участка. Явление прохождения вибраций в физическом эксперименте через участок закрепления стержня-полосы обусловлено трансформацией продольных колебаний в зоне нагружения в продольно-поперечно-сдвиговые колебания на участки закрепления в преимущественно изгибные колебания консольной части стержня-полосы.

Для теоретического исследования описываемого явления построена трансформационная модель деформирования стержня-полосы, учитывающая податливость

участка закрепления конечной длины на основе уточненной модели С.П. Тимошенко и геометрическую нелинейность при определении осевых деформаций в консольной части стержня, представляемой классической моделью Кирхгофа – Лява. Сформулированы кинематические условия сопряжения закрепленного и незакрепленного участков стержня. Получены уравнения движения незакрепленной и закрепленной частей стержня, а также граничные условия к ним на основе вариационного уравнения Гамильтона – Остроградского. Найдены точные аналитические решения полученных уравнений при действии осевой вынуждающей силы, приложенной в торцевом сечении закрепленной части стержня.

Проведены численные эксперименты по исследованию прохождения вибраций в консольную часть стержня, изготовленного из алюминиевого сплава Д16АТ, при резонансных колебаниях по двум низшим собственным формам. Показано, что при заданном материале и заданных размерах стержня заметное прохождение вибраций через участок закрепления конечной длины наблюдается только при искусственном снижении жесткости на сдвиг отмеченного участка стержня за счет снижения динамического модуля сдвига материала до значений $G_{13} \leq 0,04E_1$. Это позволяет интегрально учесть различные факторы, снижающие жесткость участка закрепления конечной длины l (податливость клеевого слоя, малые деформации опорного элемента и прочее).

Результаты, связанные с исследованием процесса деформирования стержня-полосы, имеющего участок закрепления конечной длины и находящегося в условиях вибрационного нагружения, следует рассматривать как методологию постановки соответствующих задач механики с учетом податливости закрепленного участка стержня. В рамках использования классической модели Кирхгофа – Лява на закрепленном участке возможна формулировка только общепринятых граничных условий в сечении перехода от незакрепленного участка к закрепленному, а при использовании известной уточненной сдвиговой модели С.П. Тимошенко имеется возможность учета закрепления стержня с абсолютно жестким опорным элементом только на одной из лицевых поверхностей.

Главным итогом работы авторы считают построение трансформационной модели деформирования стержня и выявленную в ходе численных экспериментов трансформацию параметров нагружено-деформированного состояния стержня при переходе от консольной части к участку закрепления конечной длины.

Список литературы

1. Шнайдер А.Д., Кузина А.В., Калашников В.С. Влияние внешних вибрационных воздействий на конструкцию РЭС. *Современные информационные технологии*. 2018. №28. С. 52–56.
2. Рыбаков И.М., Гришко А.К., Кочегаров И.И. Выбор и обоснование способов защиты сложных изделий РЭА от виброперегрузок. *Современные информационные технологии*. 2018. № 28. С. 56–60.
3. Лысенко Ю.С., Юрков Н.К. Способ снижения амплитуды внешних вибрационных нагрузок РЭС на резонансных частотах. *Современные информационные технологии*. 2015. № 22. С. 28–31.
4. Futin V.A., Evgen'ev S.S. Calculation of the resonant operating modes of centrifugal compressor impellers. *Russian Aeronautics*. 2020. Vol. 63. No 1. P. 131–136. DOI: 10.3103/S1068799820010195.
5. ГОСТ 12.1.012-2004. Система стандартов безопасности труда. Вибрационная безопасность. Общие требования. М.: Стандартинформ, 2004. 16 с.

6. Колосов Ю.В., Барановский В.В. *Защита от вибраций и шума на производстве*. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2011. 38 с.
7. Вербицкий А.Б., Родионов Г.Л., Сидоренко А.С. Математическое моделирование вибродинамического состояния конструкций авиационных изделий в условиях их применения. *Вестник МАИ*. 2012. Т. 19. №1. С. 35–42.
8. Чухлебов Р.В., Лошкарев А.Н., Сидоренко А.С., Дмитриев В.Г. Экспериментальное исследование вибрации конструкции авиационного изделия при действии полетных нагрузок. *Вестник МАИ*. 2017. Т. 24. №3. С. 51–59.
9. Бабаев Н.Н., Лентяков В.Г. *Некоторые вопросы общей вибрации судов*. Л.: Судпромгиз, 1961, 308 с.
10. Александров А.В., Крыжевич Г.Б., Норьков Е.С., Шапошников В.М. Применение современных программных комплексов численной гидродинамики при решении задач прочности и вибрации конструкции корабля. *Судостроение*. 2012. №2(801). С. 23–27.
11. Jones R.T., Pretlove A.J. Vibration absorbers and bridges. *Journal of the Institution of Highway Engineers*. 1979. Vol. 25. No 1. P. 2–9. <http://worldcat.org/issn/03066452>.
12. Nair P.S., Rao M.S. On vibration of plates with varying stiffener length. *Journal of Sound and Vibration*. 1984. Vol. 95. No 1. P. 19–29. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90255-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90255-4).
13. Brad D., Murray T.M. Slender monumental stair vibration serviceability. *Journal of Architectural Engineering*. 2009. Vol. 15. No 4. P. 111–121. DOI: 10.1061/(ASCE)1076-0431(2009)15:4(111).
14. Ellis B.R. Serviceability evaluation of floor vibration induced by walking loads. *Structural Engineer*. 2001. Vol. 79. Iss. 21. P. 30–36.
15. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of duralumin in deformation problems. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2017. Vol. 58. Iss. 3. P. 517–528. DOI: 10.1134/S0021894417030178.
16. Паймушин В.Н., Фирсов В.А., Шишкин В.М. Математическое моделирование распространения вибраций в тонкостенных каркасированных конструкциях. 1. Основные соотношения и решение характерных задач. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №2. С. 207–224. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-207-224.
17. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. Transforming deformation model of flat beams with finite length fastening areas located on one of the front-face surfaces. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Springer, 2023. P. 185–200. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_13.
18. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. *MATLAB 7: программирование, численные методы*. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 752 с.
19. Шуп Т. *Решение инженерных задач на ЭВМ*. М.: Мир, 1982. 238 с.
20. Бате К., Вильсон Е. *Численные методы анализа и метод конечных элементов*. М.: Стройиздат, 1982. 447 с.
21. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2023. Vol. 64. No 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.

References

1. Shnyder A.D., Kuzina A.V., Kalashnikov V.S. Vliyanie vneshnikh vibratsionnykh vozdeystviy na konstruktsiyu radioelektronnykh sredstv [The impact of external vibration effects on the radioelectronic means design]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii [Modern Information Technologies]*. 2018. No 28 P. 52–56 (In Russian).
2. Rybakov I.M., Grishko A.K., Kochegarov I.I. Vybor i obosnovanie sposobov zashchity slozhnykh iz-deliy REA ot vibroperegruzok [Selection and justification of ways to protect complex products of electronic equipment from vibration overloads]. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii [Modern Information Technologies]*. 2018. No 28. P. 56–60 (In Russian).
3. Lysenko Yu.S., Yurkov N.K. Sposob snizheniya amplitudy vneshnikh vibratsionnykh nagruzok RES na rezonansnykh chastotakh [A method for reducing the amplitude of external vibration loads on the radioelectronic means design at resonant frequencies]. *Sovremennye*

informatsionnye tekhnologii [Modern Information Technologies]. 2015. No 22. P. 28–31 (In Russian).

4. Futin V.A., Evgen'ev S.S. Calculation of the resonant operating modes of centrifugal compressor impellers. *Russian Aeronautics*. 2020. Vol. 63. No 1. P. 131–136. DOI: 10.3103/S1068799820010195.

5. GOST 12.1.012-2004. *Sistema standartov bezopasnosti truda. Vibratsionnaya bezopasnost. Obshchie trebovaniya [State Basis Standart 12.1.012-2004. Occupational Safety Standards System. Vibration Safety. General Requirements]*. Moscow. Standartinform Publ. 2004. 16 p. (In Russian).

6. Kolosov Yu.V., Baranovskiy V.V. *Zashchita ot vibratsiy i shuma na proizvodstve [Protection against Vibrations and Noise in Production]*. Saint Petersburg. SPbGU ITMO Publ. 2011. 38 p. (In Russian).

7. Verbickij A.B., Rodionov G.L., Sidorenko A.S. Matematicheskoe modelirovanie vibrodinamicheskogo sostoyaniya konstruksiy aviatsionnykh izdeliy v usloviyakh ikh primeneniya [Mathematical simulation vibration and dynamic states of an aircraft equipment structure in the conditions of their application]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Aerospace MAI Journal]*. 2012. Vol. 19. No 1. P. 35–42 (In Russian).

8. Chukhlebov R.V., Loshkarev A.N., Sidorenko A.S., Dmitriev V.G. Eksperimentalnoe issledovanie vibratsii konstruksii aviatsionnogo izdeliya pri deystvii poletnykh nagruzok [Experimental study of vibration of an aircraft product structure under the action of flight loads]. *Vestnik Moskovskogo aviatsionnogo instituta [Aerospace MAI Journal]*. 2017. Vol. 24. No 3. P. 51–59 (In Russian).

9. Babaev N.N., Lent'yakov V.G. *Nekotorye voprosy obshchey vibratsii sudov [Some Issues of General Vibration of Ships]*. Leningrad. Sudpromgiz Publ. 1961. 308 p. (In Russian).

10. Aleksandrov A.V., Kryzhevich G.B., Norkov E.S., Shaposhnikov V.M. Primenenie sovremennykh programmnykh kompleksov chislennoy gidrodinamiki pri reshenii zadach prochnosti i vibratsii konstruksii korablya [Application of modern computational fluid dynamics programmed complexes when estimating structural strength and vibrations of the ship]. *Sudostroenie [Shipbuilding]*. 2012. No 2(801). P. 23–27 (In Russian).

11. Jones R.T., Pretlove A.J. Vibration absorbers and bridges. *Journal of the Institution of Highway Engineers*. 1979. Vol. 25. No 1. P. 2–9. <http://worldcat.org/issn/03066452>.

12. Nair P.S., Rao M.S. On vibration of plates with varying stiffener length. *J. Sound Vib.* 1984. Vol. 95. No 1. P. 19–29. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90255-4](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90255-4).

13. Brad D., Murray T.M. Slender monumental stair vibration serviceability. *J. Archit. Eng.* 2009. Vol. 15. No 4. P. 111–121. DOI: 10.1061/(ASCE)1076-0431(2009)15:4(111).

14. Ellis B.R. Serviceability evaluation of floor vibration induced by walking loads. *Struct. Eng.* 2001. Vol. 79. Iss. 21. P. 30–36.

15. Paimushin V.N., Firsov V.A., Gynal I., Shishkin V.M. Accounting for the frequency-dependent dynamic elastic modulus of duralumin in deformation problems. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2017. Vol. 58. Iss. 3. P. 517–528. DOI: 10.1134/S0021894417030178.

16. Paimushin V.N., Firsov V.A., Shishkin V.M. Matematicheskoe modelirovanie rasprostraneniya vibratsiy v tonkostennykh karkasirovannykh konstruksiyakh. 1. Osnovnye sootnosheniya i reshenie kharakternykh zadach [Mathematical modeling of the vibrations propagation in thin-wall framework structures. 1. Basic relations and analytical solutions of typical problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 2. P. 207–224 (In Russian).

17. Paimushin V.N., Shishkin V.M., Firsov V.A., Gazizullin R.K. Transforming deformation model of flat beams with finite length fastening areas located on one of the front-face surfaces. In: *Deformation and Destruction of Materials and Structures Under Quasi-static and Impulse Loading*. Springer. 2023. P. 185–200. https://doi.org/10.1007/978-3-031-22093-7_13.

18. Ketkov Yu.L., Ketkov A.Yu., Shults M.M. *MATLAB 7: programmirovaniye, chislennyye metody [MATLAB 7: Programming, Numerical Methods]*. Saint Petersburg. BKhV-Peterburg Publ. 2005. 752 p. (In Russian).

19. Shoup T.E. *A Practical Guide to Computer Methods for Engineers*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall Inc. 1979. 255 p.

20. Bathe K.-J., Wilson E.L. *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood Cliffs, New Jersey, USA: Prentice-Hall Inc. 1976. 528 p.

21. Paimushin V.N., Shishkin V.M. Deformation of thin-walled structural elements having fixed areas of finite dimensions on the boundary front surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023. Vol. 64. No 2. P. 308–324. DOI: 10.1134/S0021894423020153.

**INVESTIGATION OF THE PASSAGE OF VIBRATIONS THROUGH
A FIXED SECTION OF AN ELONGATED PLATE CAUSED
BY THE ACTION OF THE AXIAL FORCE AT THE END***

Paimushin V.N.^{1,2}, Shishkin V.M.³, Gazizullin V.A.^{1,2}, Nuriev A.N.²

¹*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
Kazan, Russian Federation*

²*Kazan (Volga region) Federal University, Kazan, Russian Federation*

³*Vyatka State University, Kirov, Russian Federation*

vpajmushin@mail.ru

Received by the Editor 2023/05/10

A method has been developed for the experimental study of forced elastic vibrations of a cantilevered thin-walled structural element in the form of a rod-strip, excited due to the passage of vibrations through the section of a finite length fixed along one of the surfaces caused by axial loading by a harmonic force applied to the end of the fixed section. The experimental dependence of the amplitude values of the vibration accelerations of the point at the end of the console on the frequency of the excited bending vibrations of the end of the rod is obtained, indicating the passage of vibrations through the fixing section of the finite length, which occurs due to the transformation of longitudinal vibrations in the loading zone into longitudinal-transverse-shear vibrations of the rod-strip in the fixing zone, followed by their transformation into predominantly bending vibrations of the cantilever part of the rod. For the theoretical study of the described phenomenon, a transformational model of deformation of the rod-strip is constructed, taking into account the deformability of the fastening section of finite length on the basis of the refined model of S. Timoshenko. The cantilever part of the rod is represented by the classical Kirchhoff-Love model, taking into account geometric nonlinearity in determining axial deformations. The kinematic conditions of coupling of the fixed and cantilever parts of the rod are formulated. On the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational equation, the equations of motion of the non-fixed and fixed parts of the rod, as well as the boundary conditions for them and the force condition of conjugation of the marked parts of the rod are obtained. Numerical experiments have been carried out for a rod-strip made of aluminum alloy D16AT, showing a noticeable passage of vibrations through the fixing section of the final length into the cantilever part of the rod with a decrease in the dynamic shear modulus of the material to a certain value.

Keywords: end loading, rod-strip, passage of vibrations, experimental study, fixing section of finite length, transformation model of deformation.

*This paper has been supported by the Russian Science Foundation (project No 23-19-00021, sections 2, 3; project No 22-79-10033, sections 1, 4).