

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-340-355

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ*

© 2023 г.

Ватульян А.О., Юров В.О.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

aovatulyan@sfnu.ru, vyurov@sfnu.ru

Поступила в редакцию 08.06.2023

Рассмотрена задача реконструкции переменных характеристик (пьезомодуля и упругой податливости) функционально-градиентного электроупругого стержня в установившихся колебаниях при задании некоторой дополнительной информации. Для формулировки операторных соотношений, связывающих искомые и измеряемые характеристики, исследованы два вида воздействия: путем подачи разности потенциалов на электроды и путем воздействия силой на торец стержня; в первом случае торцы стержня свободны от напряжений и осуществляется измерение тока, а во втором случае один из концов стержня жестко заземлен, отсутствуют электроды и измеряется амплитуда колебаний свободной части. В безразмерной форме даны постановки соответствующих краевых задач. Построены асимптотические (квадратичные по частотному параметру) формулы для амплитудно-частотных характеристик тока и перемещений в низкочастотном диапазоне. Обратная задача решается на основе данных об амплитудно-частотных характеристиках тока и перемещений в некотором частотном диапазоне. Решение обратной задачи начинается с процедуры выбора начального приближения, а затем строится итерационный процесс, причем на каждой итерации решается прямая задача с известными характеристиками и находятся поправки на основе решения системы интегральных уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами в рамках метода регуляризации А.Н. Тихонова. Для отыскания начального приближения использованы построенные асимптотические формулы, а также метод минимизации функционала невязки. Описаны условия, при которых возможна неединственность решения обратной задачи. Представлены результаты вычислительных экспериментов по одновременному восстановлению двух функций, проведен анализ выбора наиболее информативных частотных диапазонов, рассмотрены различные способы задания начального приближения. Для контроля сходимости итерационного процесса найдены зависимости невязки для амплитудно-частотных характеристик и погрешности реконструкции от номера итерации.

Ключевые слова: обратная задача, функционально-градиентный материал, электроупругость, стержень, колебания, амплитудно-частотные характеристики.

* Выполнено за счет гранта РФФИ №22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> в Южном федеральном университете.

Введение

Композиты на основе пьезоактивных материалов используются при изготовлении генераторов, датчиков, актюаторов и устройств по сбору энергии. Исследование эффективности сбора энергии балочной конструкцией с пьезоэлементом проведено в [1], применение таких конструкций в качестве датчиков ускорения описано в [2].

Решение задач по восстановлению упругих и пьезоэлектрических характеристик в неоднородных телах особенно актуально в связи с растущим применением функционально-градиентных материалов (ФГМ), в том числе обладающих пьезоэффектом. Различные методики осреднения по координатам позволяют производить расчет напряженно-деформированного состояния неоднородной конструкции, однако в динамических задачах возрастает влияние неоднородности свойств на амплитудно-частотные характеристики, и такой подход может привести к большой погрешности в оценке деформируемости и напряженного состояния.

В статьях [3–5] представлен обзор методов, используемых для моделирования ФГМ, проведено исследование их статических и динамических характеристик. Обзорная статья [3] посвящена изучению технологий производства, моделированию и методам обработки. Сформулированы новые направления исследований в этой области. В [4] основное внимание уделяется задачам о колебаниях и потере устойчивости ФГМ-пластины. Рассмотрены как аналитические, так и численные методы. В [5] сделан обзор по цилиндрическим ФГМ-структурам с акцентом на исследования в механике связанных взаимодействий.

За последние несколько лет неоднородность свойств учитывается авторами [6–10] в самых разных областях механики. В [6] рассмотрена задача о вдавливании индентора в изотропную функционально-градиентную среду с постоянным коэффициентом Пуассона и переменным по глубине модулем сдвига. Моделирование осуществляется без учета трения. Сформулирована и решена задача идентификации модуля сдвига для ФГМ-покрытия на однородной подложке. В [7] изучаются ФГМ, армированные нанотрубками, и аспекты применения таких материалов в космической отрасли. Разрабатывается нестандартный метод активного поглощения вибраций при помощи пьезоэлементов. В [8] получено теоретическое решение для волны, распространяющейся в вязкоупругой среде с градиентным изменением плотности. В [9] изучается статика и свободные колебания ФГМ-сэндвич-оболочек переменной кривизны. Лицевые листы сэндвич-оболочек состоят из функционально-градиентного материала, тогда как сердцевина состоит из изотропного однородного материала. При исследовании используются различные эквивалентные теории однослойных оболочек, учитывающие эффекты сдвига и инерции вращения. Для построения уравнений движения применен принцип Гамильтона–Остроградского. Получены численные результаты по расчету частот, перемещений и напряжений для различных типов оболочек.

В [10] изучается термомеханическое поведение полых ФГМ-цилиндров, подвергающихся механическому нагружению и термическим напряжениям. Распределение температуры, смещений и напряжений найдено в осесимметричной постановке. Для проверки точности аналитического решения были построены численные модели с использованием метода конечных элементов и метода конечных разностей. Сделан вывод о том, что функционально-градиентные (ФГ) свойства могут быть смоделированы для достижения самых низких уровней поля напряжений. Показано

также, что влияние температурных граничных условий является доминирующим по сравнению с силовыми граничными условиями.

Методы, используемые для производства материалов, обладающих пьезоэффектом, иногда приводят к значительной неоднородности как механических, так и пьезосвойств. Неоднородная поляризация может быть следствием реализации определенного технологического процесса или возникнуть вследствие воздействия неоднородных тепловых полей с амплитудой выше точки Кюри в процессе эксплуатации, из-за чего возможна как частичная, так и полная располяризация.

Отметим ряд публикаций по изучению деформирования неоднородных пьезоэлектрических устройств. В статье [11] при помощи вариационного принципа строится теория функционально-градиентной электроупругой оболочки из ФГМ с переменными свойствами по толщине. Дана оценка погрешности построенной теории в энергетической норме. Найдено аналитическое решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях пьезокерамической цилиндрической оболочки из ФГМ с поляризацией по толщине с полностью электродированными лицевыми поверхностями. Статья [12] посвящена исследованию моделей функционально-градиентных пьезоэлектрических балок в контексте изучения явлений на макро-, микро-, наноуровнях и приведены наиболее распространенные законы изменения материальных свойств в ФГМ. В статье [13] предложена альтернативная приближенная модель для расчета колебаний слоистых электроупругих балок, построенная на основе гипотезы ломаной нормали. Показано, что построенная приближенная теория, учитывающая сдвиговые деформации, обеспечивает высокую точность расчетов в сравнении с несвязанной теорией деформации сдвига первого порядка. Верификация проведена путем сравнения с конечно-элементным решением двумерной задачи. Выполнены расчеты собственных частот для балки при различных граничных условиях.

Композиты из электроупругих и ФГ материалов наибольшее применение получили в области активного подавления колебаний [14–18]. В [14] исследованы колебания, возникающие при ударной нагрузке в ФГМ-пластине с пьезоэлектрическим приводом. Предполагается, что свойства материала изменяются в направлении толщины по экспоненциальному или степенному закону. Отмечается возможность подавления колебаний даже в случае тонкой пластины. В [15, 16] такие конструкции изучаются при сочетании электрического, теплового и механического нагружения. В [17] анализируются колебания ФГ пьезоэлектрической пластины, подвергнутой электрическому и механическому нагружению. Исследование проведено с учетом и без учета пористости. Закон сигмовидного типа использован для моделирования изменения свойств материала по толщине пластины. Пластина имела геометрическую нелинейность с деформациями Кармана и полем смещения, основанным на теории сдвиговой деформации первого порядка. В [18] моделируется пятислойный ФГМ, состоящий из двух слоев пьезоэлектрического материала, двух слоев металла и одного слоя керамики. Оцениваются собственные частоты. Изучен отклик под действием статической нагрузки и при различных граничных условиях.

Обратные задачи о колебаниях электроупругих стержней уже рассматривались ранее, способы реконструкции пьезомодуля в стержне в разных постановках представлены в публикациях [19–23]. В них обратные задачи заключались в восстановлении лишь одной переменной характеристики – пьезомодуля, поскольку изменимость модуля упругости в зависимости от координаты значительно меньше выражена. В [23] предложен подход к решению обратной задачи идентификации мате-

риальных характеристик ФГ термопьезоэлектрического тела. Получены уравнения с компактными операторами первого рода для решения задачи, сформулированной на основе итерационного процесса. В качестве примера исследуется обратная задача термоэлектроупругости для пьезоэлектрического стержня. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению характеристик стержня с различными законами неоднородности.

В настоящей статье разработан подход по восстановлению двух функций: упругой податливости и пьезомодуля. Соответствующая прямая задача рассмотрена ранее в [24], где были проанализированы амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), резонансы и антирезонансы функции тока при различных законах неоднородности, изучено влияние затухания на АЧХ. Информация об АЧХ может служить в качестве дополнительных данных при решении обратных задач. При этом для определения двух характеристик требуется два типа воздействия на стержень и, соответственно, данные о двух АЧХ, измеренных в некоторых наборах частот.

1. Постановка прямых задач

Задача 1. Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω электроупругого стержня длиной l , в котором пьезомодуль d_{33} и упругая податливость s_{33} зависят от продольной координаты x_3 (продольная поляризация). Будем считать, что торцы стержня электродированы: левый электрод ($x_3 = 0$) имеет нулевой потенциал, а на правый электрод подается осциллирующий во времени потенциал $Ve^{i\omega t}$, что и приводит к возбуждению колебаний. Считаем, что тензор напряжений имеет одну отличную от нуля компоненту $\sigma_{33} = \sigma_{33}(x_3, t)$ и определяющие соотношения представимы в форме [22]:

$$E = -\varphi_{,3}, \quad u_{3,3} = s_{33}(x_3)\sigma_{33} - d_{33}(x_3)\varphi_{,3}, \quad D_3 = d_{33}(x_3)\sigma_{33} - \varepsilon_{33}\varphi_{,3}. \quad (1)$$

Здесь $u_3(x_3, t)$ – смещение стержня вдоль оси x_3 ; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость (в дальнейших построениях считается постоянной); φ – электрический потенциал; E – напряженность электрического поля; D_3 – продольная компонента вектора электрической индукции. Уравнения движения электроупругой среды после отделения временного множителя принимают вид

$$\sigma_{33,3} = -\rho\omega^2 u_3, \quad D_{3,3} = 0. \quad (2)$$

Считаем, что торцы стержня свободны от усилий. Имеем краевую задачу относительно неизвестных σ_{33} и φ [24]. Полагая $x_3 = x$, $\sigma_{33}(x_3, t) = \sigma(x, t)$, $u_3(x_3, t) = u(x, t)$, $s_{33}(x_3) = s(x)$, $d_{33}(x_3) = d(x)$, получаем краевую задачу:

$$\begin{aligned} \sigma'' &= -\rho\omega^2 (s(x)\sigma - d(x)\varphi'), & (d(x)\sigma - \varepsilon_{33}\varphi)' &= 0, \\ \sigma(0) &= \sigma(l) = 0, & \varphi(0) &= 0, \quad \varphi(l) = V. \end{aligned} \quad (3)$$

Интегрируя второе уравнение (3), найдем $d(x)\sigma - \varepsilon'_{33}\varphi = D_{30} = \text{const}$, и исключая электрический потенциал, получим

$$\sigma'' = -\rho\omega^2 \left(s(x)\sigma - d(x) \frac{d(x)\sigma - D_{30}}{\varepsilon_{33}} \right). \quad (4)$$

Учитывая граничные условия на электродах, запишем интегральное соотношение

$$\int_0^l \frac{d(x)\sigma - D_{30}}{\varepsilon_{33}} dx = V. \quad (5)$$

Введем безразмерную координату y , безразмерные параметры и функции согласно равенствам:

$$x = ly, \quad d^* q(y) = d(y)l, \quad s^* f(y) = s(y)l, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 l^2 s^*, \quad k^2 = \frac{(d^*)^2}{\varepsilon_{33} s^*}, \quad S = \frac{\sigma s^* \varepsilon_{33}}{d^* D_{30}},$$

где d^* , s^* – характерные значения пьезоэлектрического модуля и податливости. В результате получим краевую задачу в виде:

$$S'' = -\kappa^2 [(f(y) - k^2 q^2(y))S + q(y)], \quad S(0) = S(1) = 0, \quad (6)$$

которая может быть сведена к канонической системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} U' = (f(y) - k^2 q^2(y))S + q(y), \\ S' = -\kappa^2 U, \end{cases} \quad (7)$$

$$S(0) = S(1) = 0.$$

Система (7) решается при помощи метода пристрелки, подробности реализации которого описаны в [24].

Для дальнейшего анализа введем безразмерную функцию спектрального параметра κ , пропорциональную току в цепи:

$$J = \left(k^2 \int_0^1 q(y)S(y, \kappa) dy - 1 \right)^{-1}. \quad (8)$$

Задача 2. Рассмотрим установившиеся колебания электроупругого стержня без электродов с жесткой заделкой левого конца $x_3 = 0$ и внешней нагрузкой $P e^{i\omega t}$ на правом торце $x_3 = l$, возбуждающей в стержне колебания с частотой ω . Считая, что $D_3 = 0$ на торцах стержня, на основе (1), (2) получаем краевую задачу для канонической системы:

$$\begin{cases} T' = -\kappa^2 U, \\ U' = (f(y) - k^2 q^2(y))T, \end{cases} \quad (9)$$

$$U(0) = 0, \quad T(1) = 1.$$

Здесь выполнено вышеописанное приведение к безразмерному виду и введено новое обозначение $T = s_0 \sigma_{33}$ для безразмерных напряжений. Для решения (9) также применен метод пристрелки. Далее будем использовать обозначение $F(\kappa) = U(1, \kappa)$ для амплитуды смещений стержня на торце.

Таким образом, для нахождения функций, характеризующих переменные свойства стержня, имеем две краевые задачи (7), (9) и дополнительные данные об АЧХ $J(\kappa)$, $F(\kappa)$. Отметим некоторые особенности структуры операторов, входящих в эти краевые задачи.

Заметим, что краевая задача (7) всегда имеет два решения при любом фиксированном значении κ : (S, U, f, q) и $(-S, -U, f, -q)$ для одной и той же функции $J(\kappa)$. Задаче (9) также при любом фиксированном значении κ соответствуют два решения:

(T, U, f, q) и $(T, U, f, -q)$ для одной и той же функции $F(\kappa)$. Так как дополнительная информация $J(\kappa)$, $F(\kappa)$ не позволяет различить эти два набора искомым функций (f, q) и $(f, -q)$, то возникает неединственность решения обратной задачи, устранить которую возможно, если подчинить искомым функции ограничению $q > 0$.

Задача (6) имеет однородные граничные условия, что приводит к возникновению еще одного нетривиального решения. Пусть уравнению $S(y) = S^*(y)$ отвечает решение $f(y) = f^*(y)$, $q(y) = q^*(y)$, тогда функции $J(\kappa)$ отвечает симметричное относительно середины стержня решение $S(y) = S^*(1 - y)$, $f(y) = f^*(1 - y)$, $q(y) = q^*(1 - y)$. Знание характеристики $F(\kappa)$ позволяет различить два этих случая в окрестности резонансов.

2. Асимптотический анализ

Для дальнейшего анализа обратных задач важным является построение асимптотик смещений и напряжений в низкочастотной области. Рассмотрим задачи (7) и (9) при малом значении спектрального параметра κ . Будем искать решение задачи (9) в виде разложения:

$$U = U_0 + \kappa^2 U_2 + \kappa^4 U_4 + \dots, \quad T = T_0 + \kappa^2 T_2 + \kappa^4 T_4 + \dots \quad (10)$$

Для краткости записи введем обозначение $p(y) = f(y) - k^2 q^2(y)$. Формулируя задачи при одинаковых значениях спектрального параметра, выпишем первые две задачи:

$$\begin{cases} T'_0 = 0, \\ U'_0 = p(y)T_0, \end{cases} \quad (11)$$

$$U_0(0) = 0, \quad T_0(1) = 1,$$

$$\begin{cases} T'_2 = -U_0, \\ U'_2 = p(y)T_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$U_2(0) = 0, \quad T_2(1) = 0.$$

Решение задачи (11) для любой функции $p(y)$ имеет вид

$$T_0 = 1, \quad U_0 = \int_0^y p(\xi) d\xi.$$

Решение задачи (12) выражается через решение (11) и имеет вид

$$T_2 = \int_0^1 (1 - \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^y (y - \xi) p(\xi) d\xi, \quad U_2 = \int_0^y p(s) T_2(s) ds.$$

На основе полученных решений выпишем разложение $F(\kappa)$ по спектральному параметру κ :

$$F(\kappa) = \int_0^1 p(y) dy + \kappa^2 \int_0^1 p(y) \left(\int_0^1 (1 - \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^y (y - \xi) p(\xi) d\xi \right) dy + O(\kappa^4). \quad (13)$$

Аналогично решение задачи (7) представим в виде разложения

$$U = U_0 + \kappa^2 U_2 + \kappa^4 U_4 + \dots, \quad S = S_0 + \kappa^2 S_2 + \kappa^4 S_4 + \dots$$

и сформулируем задачи при одинаковых степенях спектрального параметра:

$$\begin{cases} U_0' = p(y)S_0 + q(y), \\ S_0' = 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$S_0(0) = S_0(1) = 0;$$

$$\begin{cases} U_2' = p(y)S_2, \\ S_2' = -U_0, \end{cases} \quad (15)$$

$$S_2(0) = S_2(1) = 0.$$

Решение задач (14), (15) имеет вид:

$$S_0 = 0, \quad U_0 = \int_0^y q(\xi) d\xi - \int_0^1 (1-\xi)q(\xi) d\xi,$$

$$S_2 = y \int_0^1 (1-\xi)q(\xi) d\xi - \int_0^y (y-\xi)q(\xi) d\xi, \quad U_2 = \int_0^y p(\xi)S_2(\xi) d\xi + c_2,$$

где c_2 – константа, определяемая из задачи при следующей степени k . Таким образом, получим разложение

$$J(k) = -1 - k^2 k^2 \int_0^1 q(y) \left(y \int_0^1 (1-\xi)q(\xi) d\xi - \int_0^y (y-\xi)q(\xi) d\xi \right) dy + O(k^4). \quad (16)$$

Главные части разложений (13), (16) будем использовать в решении обратных задач при выборе начального приближения.

В качестве примера найдем коэффициенты разложения для пары функций $f(y) = 2(1+y)/3$, $q(y) = 2y^2$ в (13), (16), ограничиваясь в них квадратичными слагаемыми, и сравним результаты с АЧХ, полученными численно методом пристрелки. Сравнение зависимостей представлено на рис. 1, где точками обозначены точные значения $J(k)$, $F(k)$, а сплошными линиями их квадратичные аппроксимации.

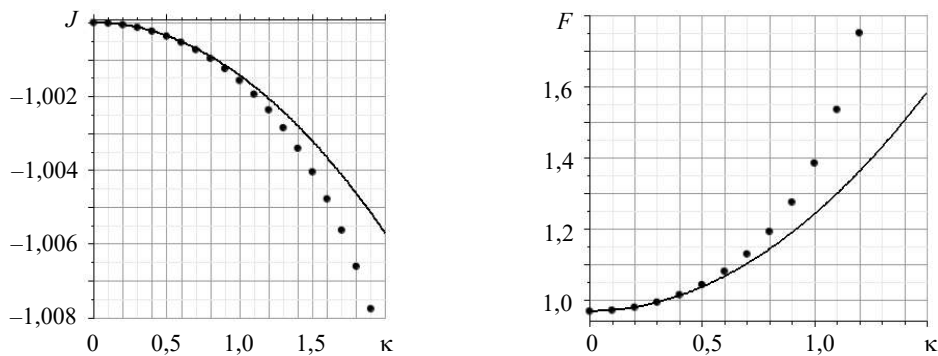


Рис. 1. АЧХ (точки) и их квадратичные асимптотики (сплошная линия)

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что квадратичные аппроксимации позволяют описать функции АЧХ с погрешностью менее 1% в области $k < 0,3$.

3. Постановка обратной задачи

Сформулируем обратную задачу о нахождении функций $f(y)$, $q(y)$ по измеренной на некотором интервале частот амплитудной функции тока $J(\kappa)$ и отклика $F(\kappa)$ в виде перемещения одного из торцов, найденного при решении задачи (9). Эта задача является существенно нелинейной, при ее решении будем использовать итерационную схему типа абстрактного процесса Ньютона [25]. Для формирования итерационного процесса сформулируем линеаризованные операторные уравнения для нахождения поправок на каждой итерации. При этом начальные приближения находятся в виде линейных функций.

Обратная задача 1. Пусть $f_0(y)$, $q_0(y)$ – некоторое начальное приближение, ему соответствует $S_0(y)$. Будем искать решение $S(y)$, отвечающее искомым $f(y)$, $q(y)$, в виде разложения по формальному малому параметру ε :

$$\begin{aligned} f &= f_0(y) + \varepsilon f_1(y) + \dots, \\ q &= q_0(y) + \varepsilon q_1(y) + \dots, \\ S &= S_0 + \varepsilon S_1 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя разложения (17) в (6), соберем слагаемые при одинаковых степенях параметра ε и сформулируем краевые задачи при ε^0 и ε^1 :

$$\begin{aligned} \text{для } \varepsilon^0: S_0'' &= -\kappa^2[(f_0(y) - k^2 q_0^2(y))S_0 + q_0(y)], \quad S_0(0) = S_0(1) = 0, \\ \text{для } \varepsilon^1: S_1'' &= -\kappa^2[(f_0(y) - k^2 q_0^2(y))S_1 + (f_1(y) - 2k^2 q_0(y)q_1(y))S_0 + q_1(y)], \\ S_1(0) &= S_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Дифференциальные операторы в полученных краевых задачах являются одинаковыми, однако второй оператор содержит искомые поправки. К сожалению, использовать метод пристрелки для второй задачи невозможно, поскольку правая часть оператора содержит неизвестные функции. Для их нахождения используем условие разрешимости. Умножим первое уравнение на S_1 , второе на S_0 и проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$ разность полученных выражений:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (S_0'' S_1 - S_1'' S_0) dy &= \int_0^1 \kappa^2 [f_0(y) S_1 S_0 + f_1(y) S_0^2 - k^2 q_0^2(y) S_1 S_0 - 2k^2 q_0(y) q_1(y) S_0^2 + \\ &+ q_1(y) S_0 - (f_0(y) - k^2 q_0^2(y)) S_0 S_1 - q_0(y) S_1] dy. \end{aligned} \quad (19)$$

Левая часть соотношения (19) обращается в нуль в силу граничных условий, вследствие чего равенство (19) приводится к виду

$$\int_0^1 f_1(y) S_0^2 dy + \int_0^1 2[1 - k^2 q_0(y) S_0] q_1(y) S_0 dy = \int_0^1 (q_0(y) S_1 + q_1(y) S_0) dy. \quad (20)$$

Считая, что $J = J_0 + \varepsilon J_1 + \dots$, запишем

$$J - J_0 = -k^2 \varepsilon (J_0 + \varepsilon J_1 + \dots) J_0 \int_0^1 (q_0(y) S_1 + q_1(y) S_0 + \dots) dy \quad (21)$$

и из (20) и (21) получим

$$J_1 = -k^2 J_0^2 \left(\int_0^1 f_1(y) K_1 dy + \int_0^1 q_1(y) K_2 dy \right), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \quad (22)$$

где введены следующие обозначения ядер:

$$K_1(y, \kappa) = S_0^2, \quad K_2(y, \kappa) = 2[1 - k^2 q_0(y) S_0] S_0.$$

Таким образом, установлено, что поправки $f_1(y)$, $q_1(y)$ должны удовлетворять интегральному уравнению Фредгольма (ИУФ) первого рода (22) с гладкими ядрами.

Обратная задача 2. Аналогично рассмотрим вторую задачу. Используя разложение по формальному малому параметру ε , получим условие разрешимости для поправок $f_1(y)$, $q_1(y)$ в виде второго ИУФ первого рода:

$$\int_0^1 f_1(y) K_3 dy + \int_0^1 q_1(y) K_4 dy = F - U_0(1), \quad \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4], \quad (23)$$

$$K_3 = T^2, \quad K_4 = -2k^2 q_0(y) T^2.$$

4. Вычислительные эксперименты и анализ алгоритма

Опишем итерационный процесс восстановления функций $f(y)$, $q(y)$. На первом этапе выполняется процедура отыскания начального приближения $f_0(y)$, $q_0(y)$ в некотором простом классе функций при помощи минимизации функционала невязки, а для получения начального приближения в классе констант $f_0(y) = f_0$, $q_0(y) = q_0$ задаются значения $J(\kappa_*)$, $F(0)$ и решается алгебраическая система уравнений относительно чисел f_0 , q_0^2 , которая получается из разложений (13), (16). Здесь κ_* – достаточно малое значение спектрального параметра (в расчетах принято $\kappa_* = 0,01$).

Затем выполняется последовательность шагов по уточнению решения. Пусть $f_n(y)$, $q_n(y)$ – решение задачи на n -й итерации. Тогда решение на следующей итерации можно представить в виде $f_{n+1}(y) = f_n(y) + \delta f_n(y)$, $q_{n+1}(y) = q_n(y) + \delta q_n(y)$, где $\delta f_n(y)$, $\delta q_n(y)$ – решение следующей системы ИУФ первого рода с гладкими ядрами:

$$\int_0^1 \delta f_n(y) K_1(\kappa, y) dy + \int_0^1 \delta q_n(y) K_2(\kappa, y) dy = -\frac{J - J_n}{k^2 J_n^2}, \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \quad (24)$$

$$\int_0^1 \delta f_n(y) K_3(\kappa, y) dy + \int_0^1 \delta q_n(y) K_4(\kappa, y) dy = F - U_n(1), \quad \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4],$$

$$K_1 = S_0^2, \quad K_2 = 2[1 - k^2 q_0(y) S_0] S_0, \quad K_3 = T^2, \quad K_4 = -2k^2 q_0(y) T^2.$$

Завершение итерационного процесса происходит, когда невязка по АЧХ достигнет заданного значения или будет выполнено заданное число итераций.

Для системы ИУФ (24) установлены следующие факты: ядра K_1 , K_3 , K_4 являются знакоопределенными, ядро K_2 является таковым лишь в низкочастотном диапазоне; ядра K_1 , K_2 обращаются в нуль на концах интервала (концы стержня). Это приводит к тому, что максимальная ошибка реконструкции наблюдается именно на концах.

Для контроля итерационного процесса введем в рассмотрение метрики и относительные погрешности:

$$\Delta_{1s} = \left(\sum_j (Y(\kappa_j) - Y_s(\kappa_j))^2 \right)^{1/2}, \quad (Y = J, \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]) \text{ или } (Y = F, \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4]), \quad (25)$$

$$\Delta_{2s} = \max |Y(\kappa) - Y_s(\kappa)|, \quad (Y = J, \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]) \text{ или } (Y = F, \kappa \in [\kappa_3, \kappa_4]), \quad (26)$$

$$\Delta_{3n} = \frac{\max_y |g(y) - g_n(y)|}{\max_y g(y)}, \quad (27)$$

$$\Delta_{4n} = \frac{\left(\int_0^1 (g(y) - g_n(y))^2 dy \right)^{1/2}}{\left(\int_0^1 g(y)^2 dy \right)^{1/2}}, \quad (28)$$

где $g(y) = q(y)$ или $g(y) = f(y)$; $J(\kappa)$ – измеренная функция тока; $F(\kappa)$ – измеренная функция перемещения свободного торца; $J_s(\kappa)$, $F_s(\kappa)$ – функции тока и перемещений, отвечающие текущему приближению $q(y) = q_s(y)$, $f(y) = f_s(y)$. Так, например, Δ_{10} или Δ_{20} могут быть использованы для нахождения начального приближения $q_0(y)$, $f_0(y)$.

Так как задача 1 и задача 2 отличаются типом нагружения и условиями закрепления, то резонансные частоты также существенно отличаются. Поэтому при выполнении реконструкции с использованием ИУФ (24) будем использовать различные частотные диапазоны $[\kappa_1, \kappa_2]$, $[\kappa_3, \kappa_4]$, которые не содержат в себе резонансных точек, но при этом достаточно широкие, чтобы обеспечить точность реконструкции.

Приведем результаты вычислительных экспериментов по реконструкции наборов функций:

$$\text{№1: } q(y) = (1 + y^2)/2, \quad f(y) = 2(1 + y)/3,$$

$$\text{№2: } q(y) = 2(2 - y^2)/5, \quad f(y) = 2(2 + y)/3,$$

$$\text{№3: } q(y) = \{0, 0 \leq y < 0,3; 0,5(1 + \sin(2,5\pi(y - 0,5))), 0,3 \leq y < 0,7; 1, y \geq 0,7\}, \\ f(y) = 0,75(1 + y^2).$$

Всюду далее будем использовать набор безразмерных параметров: $k = 0,2$; $\kappa_1 = 3,5$; $\kappa_2 = 5,5$; $\kappa_3 = 0,6$, $\kappa_4 = 1,4$. АЧХ измеряется в частотных диапазонах $[\kappa_1, \kappa_2]$, $[\kappa_3, \kappa_4]$ в восьми и в четырех равноудаленных точках соответственно. Диапазон $[\kappa_1, \kappa_2]$ расположен между первым и вторым резонансами тока, а $[\kappa_3, \kappa_4]$ находится в диапазоне до первого механического резонанса. Такой выбор для съема входной информации оказался оптимальным. При решении систем ИУФ первого рода методом регуляризации А.Н. Тихонова [26] выполняется их дискретизация и сведение к линейной системе на основе использования квадратурных формул средних прямоугольников, причем интервал $y \in [0, 1]$ разбивается на 25 одинаковых отрезков.

На рис. 2 и 3 для наборов 1 и 2 сплошными линиями изображены графики искомым функций, точками – результат восстановления q_9, f_9 , штриховыми линиями – начальные приближения q_0, f_0 . Кроме наборов 1 и 2 при фиксированной функции $f(y) = 2(1 + y)/3$ были исследованы другие варианты для $q(y)$. Серия вычислительных экспериментов показала, что убывающие и выпуклые вверх ($q''(y) < 0$) функции восстанавливаются лучше остальных. Выбор начального приближения кардинально влияет на сходимость итерационного процесса. Так, выбор линейного начального приближения для функции $q(y)$ позволяет единственным образом решить обратную задачу.

Осуществим восстановление набора 3. Непрерывная функция $q(y)$ здесь имеет участок с нулевыми значениями. В качестве начального приближения выбираются функции $q_0(y) = y$, $f_0(y) = 0,75(1 + y)$, значения на концах интервала совпадают с точными.

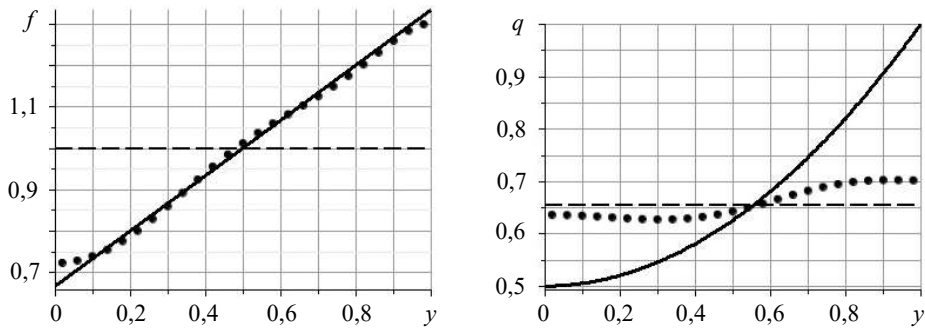


Рис. 2. Результаты реконструкции набора 1

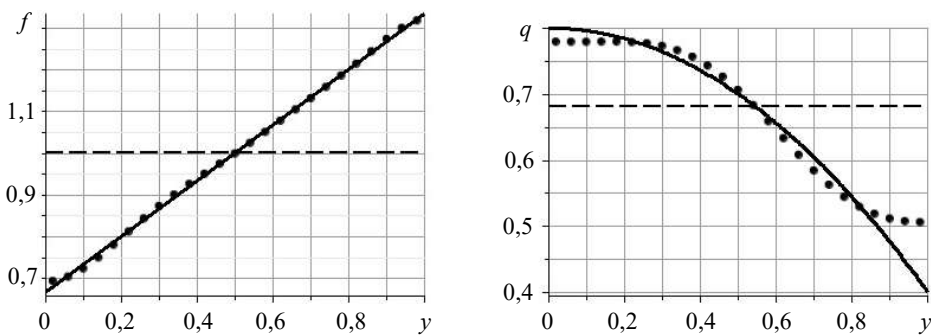


Рис. 3. Результаты реконструкции набора 2

Контроль за итерационным процессом осуществляется по невязке в АЧХ (25), (26) и по относительной погрешности восстанавливаемых функций (27), (28). Расчеты останавливались, когда невязки (25), (26) переставали уменьшаться. Заметим, что погрешности восстановления в терминах (27), (28) достигали минимума. На рис. 4 представлены величины невязок в задачах 1 и 2 в зависимости от номера итераций. Точки соответствуют расчету невязок Δ_{1s} по формуле (25), квадратики – расчету Δ_{2s} по формуле (26). На рис. 5 показаны относительные погрешности восстановления функций $f(y)$ и $q(y)$ в зависимости от номера итераций. Точки соответствуют вычислению погрешности Δ_{3n} по формуле (27), квадратики – Δ_{4n} по формуле (28).

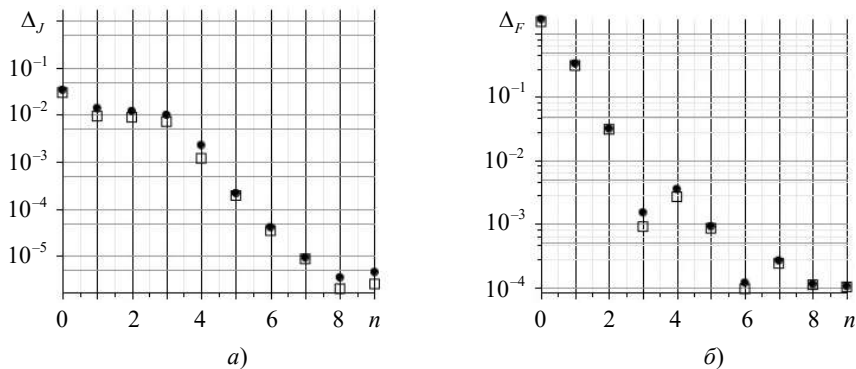


Рис. 4. Невязки в АЧХ задачи 1 (а) и задачи 2 (б)

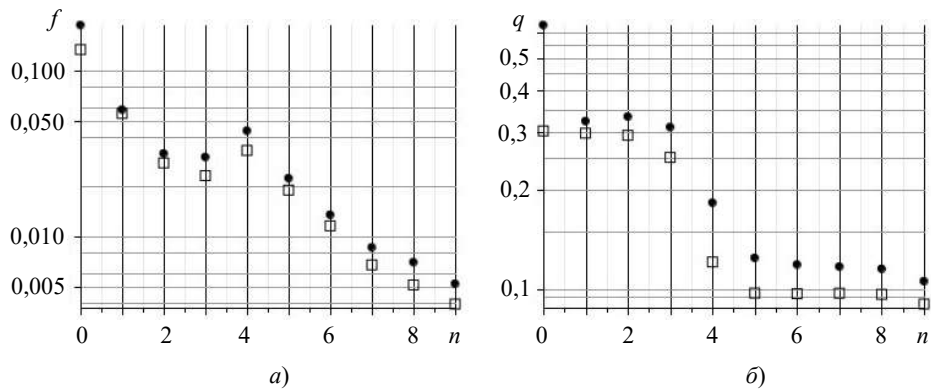


Рис. 5. Относительная погрешность восстановления функций $f(y)$ (а) и $q(y)$ (б)

На рис. 6 для набора 3 представлены графики искомых функций $f(y)$, $q(y)$ (сплошные линии), начальные приближения $f_0(y)$, $q_0(y)$ (штриховые линии) и результат восстановления на 9-й итерации (точки). Заметим, что погрешность восстановления стабилизируется, начиная с 5-й итерации, и в терминах (28) составляет 10%, а функция $f(y)$ на этой же итерации восстановлена с погрешностью, не превышающей 2%.

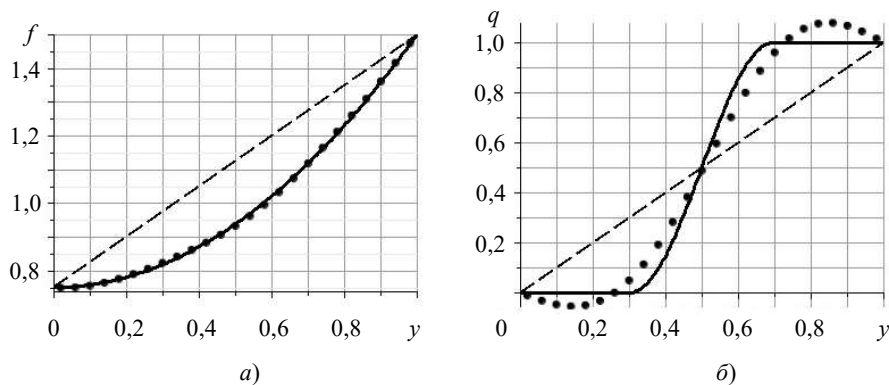


Рис. 6. Точная функция, начальное приближение и лучший результат восстановления функций $f(y)$ (а) и $q(y)$ (б)

Результаты проведенных расчетов показали отсутствие принципиальной разницы в оценках (25), (26) и (27), (28).

Существенно увеличить общую точность реконструкции удастся, задавая значения искомых функций на концах стержня (в большей степени для пьезомодуля и в меньшей для упругой податливости); так, при восстановлении набора 3 в качестве начального приближения использованы линейные функции, удовлетворяющие дополнительным граничным условиям.

Заключение

Исследовано решение обратной задачи по восстановлению пьезомодуля и упругой податливости в пьезоэлектрическом стержне как функций осевой координаты при использовании в качестве дополнительной информации АЧХ тока при электрическом возбуждении и АЧХ смещения торца при механическом возбуждении. Выявлены опре-

деленные формы неединственности в решении обратной задачи. Сформулирован итерационный процесс на основе метода линеаризации. Восстановлены две функции, даны рекомендации по выбору частотных областей для снятия дополнительной информации. Приведены и обсуждены результаты вычислительных экспериментов.

Список литературы

1. Aravindan M., Ali S.F. Exploring 1:3 internal resonance for broadband piezoelectric energy harvesting. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 153. Article No 107493. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107493.
2. De Oliveira F.-C., De Lima Monteiro D.W., Colombo D.M. Design, modeling, characterization and analysis of a low frequency micro-fabricated piezoelectric cantilever for vibration sensing and energy harvesting applications. *Sensors and Actuators A: Physical*. 2021. Vol. 326. Article No 112709. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112709>.
3. Zhang C., Chen F., Huang Z. et al. Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Materials Science and Engineering: A*. 2019. Vol. 764. Article No 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>.
4. Swaminathan K., Naveenkumar D., Zenkour A., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 2015. Vol. 120. P. 10–31. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.
5. Dai H.-L., Rao Y.-N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures*. 2016. Vol. 152. P. 199–225. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>.
6. Argatov I.I., Sabina F.J. Recovery of information on the depth-dependent profile of elastic FGMs from indentation experiments. *International Journal of Engineering Science*. 2022. Vol. 176. Article No 103659. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103659>.
7. Dhiman N.K., Susheel C., Sharma A., Salodkar S.M. An investigation into vibrational behaviour of the functionally graded carbon nanotube reinforced shell structure. *Materials Today: Proceedings*. 2022. Vol. 62. Pt. 14. P. 7428–7437. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.03.207>.
8. Yuan L., Miao C., Xu S. Stress-wave propagation in multilayered and density-graded viscoelastic medium. *International Journal of Impact Engineering*. 2023. Vol. 173. Article No 104415. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2022.104415>.
9. Sayyad A.S., Ghugal Y.M., Kant T. Higher-order static and free vibration analysis of doubly-curved FGM sandwich shallow shells. *Forces in Mechanics*. 2023. Vol. 11. Article No 100194. <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100194>.
10. Das P., Islam M.A., Somadder S., Hasib M.A. Analytical and numerical analysis of functionally graded (FGM) axisymmetric cylinders under thermo-mechanical loadings. *Materials Today Communications*. 2022. Vol. 33. Article No 104405. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.104405>.
11. Le K.C. An asymptotically exact theory of functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Engineering Science*. 2017. Vol. 112. P. 42–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.12.001>.
12. Sharma P. Vibration analysis of FGPM beam: A review. *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 44. P. 1384–1390. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.621>.
13. Kapuria S., Ahmed A., Dumir P.C. An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping. *Journal of Sound and Vibration*. 2005. Vol. 279. Iss. 1-2. P. 345–371. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.018>.
14. Ashida F., Morimoto T., Ozaki H. Active cancellation of unsteady stress oscillation in a functionally graded piezoelectric thin plate subjected to impact loading. *European Journal of Mechanics – A/Solids*. 2018. Vol. 67. P. 84–91. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.08.016>.
15. Liew K.M., Yang J., Kitipornchai S. Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2003. Vol. 40. Iss. 15. P. 3869–3892. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00096-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00096-9).
16. Duc N.D., Quan T.Q., Luat V.D. Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable piezoelectric FGM double curved shallow shells under damping-thermo-electro-

mechanical loads. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 29–40. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.041>.

17. Kumar P., Harsha S.P. Dynamic analysis of porosity dependent functionally graded sigmoid piezoelectric (FGSP) plate. *Structures*. 2022. Vol. 46. P. 1737–1752. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.11.021>.

18. Ladvanjari D., Mahajan A., Dhanjode A., Patil R.K. Static and modal analysis of functionally graded piezoelectric plate for sensor responses. *Materials Today: Proceedings*. 2023. Vol. 72. Pt. 3. P. 1678–1684. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.09.468>.

19. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. К определению неоднородной поляризации для электроупругого стержня. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион*. 2002. №4. С. 7–9.

20. Ватульян А.О., Домброва О.Б., Жиров В.Е. Обратные задачи для неоднородно поляризованных пьезоэлектрических стержней. *ПММ*. 2007. Т. 71. №1. С. 93–101.

21. Ватульян А.О., Половодова А.А. Определение неоднородной поляризации пьезокерамического стержня по данным акустического зондирования. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки*. 2013. №4. С. 26–30.

22. Ватульян А.О., Соловьев А.Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2008. 175 с.

23. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019. Vol. 128. P. 1157–1167. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.084>.

24. Ватульян А.О., Юров В.О. О колебаниях функционально-градиентных электроупругих стержней. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №3. С. 351–363. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2022-84-3-351-363>.

25. Ватульян А.О. *Коэффициентные обратные задачи механики*. М.: Физматлит, 2019. 272 с.

26. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. 1979. М.: Наука, 288 с.

References

1. Aravindan M., Ali S.F. Exploring 1:3 internal resonance for broadband piezoelectric energy harvesting. *Mech. Syst. Signal Proces.* 2021. Vol. 153. Article No 107493. DOI: 10.1016/j.ymssp.2020.107493.

2. De Oliveira F.-C., De Lima Monteiro D.W., Colombo D.M. Design, modeling, characterization and analysis of a low frequency micro-fabricated piezoelectric cantilever for vibration sensing and energy harvesting applications. *Sens. Actuators A Phys.* 2021. Vol. 326. Article No 112709. <https://doi.org/10.1016/j.sna.2021.112709>.

3. Zhang C., Chen F., Huang Z. et al. Additive manufacturing of functionally graded materials: A review. *Mater. Sci. Eng. A*. 2019. Vol. 764. Article No 138209. <https://doi.org/10.1016/j.msea.2019.138209>

4. Swaminathan K., Naveenkumar D., Zenkour A., Carrera E. Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates – A state-of-the-art review. *Composite Structures*. 2015. Vol. 120. P. 10–31. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.09.070>.

5. Dai H.-L., Rao Y.-N., Dai T. A review of recent researches on FGM cylindrical structures under coupled physical interactions, 2000–2015. *Composite Structures*. 2016. Vol. 152. P. 199–225. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.05.042>.

6. Argatov I.I., Sabina F.J. Recovery of information on the depth-dependent profile of elastic FGMs from indentation experiments. *Int. J. Eng. Sci.* 2022. Vol. 176. Article No 103659. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2022.103659>.

7. Dhiman N.K., Susheel C., Sharma A., Salodkar S.M. An investigation into vibrational behaviour of the functionally graded carbon nanotube reinforced shell structure. *Materials Today: Proceedings*. 2022. Vol. 62. Pt. 14. P. 7428–7437. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.03.207>.

8. Yuan L., Miao C., Xu S. Stress-wave propagation in multilayered and density-graded viscoelastic medium. *Int. J. Impact Eng.* 2023. Vol. 173. Article No 104415. <https://doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2022.104415>.

9. Sayyad A.S., Ghugal Y.M., Kant T. Higher-order static and free vibration analysis of doubly-curved FGM sandwich shallow shells. *Forces in Mechanics*. 2023. Vol. 11. Article No 100194. <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2023.100194>.
10. Das P., Islam M.A., Somadder S., Hasib M.A. Analytical and numerical analysis of functionally graded (FGM) axisymmetric cylinders under thermo-mechanical loadings. *Materials Today Communications*. 2022. Vol. 33. Article No 104405. <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2022.104405>.
11. Le K.C. An asymptotically exact theory of functionally graded piezoelectric shells. *Int. J. Eng. Sci.* 2017. Vol. 112. P. 42–62. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.12.001>.
12. Sharma P. Vibration analysis of FGPM beam: A review. *Materials Today: Proceedings*. 2021. Vol. 44. P. 1384–1390. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.11.621>.
13. Kapuria S., Ahmed A., Dumir P.C. An efficient coupled zigzag theory for dynamic analysis of piezoelectric composite and sandwich beams with damping. *J. Sound Vib.* 2005. Vol. 279. Iss. 1-2. P. 345–371. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.11.018>.
14. Ashida F., Morimoto T., Ozaki H. Active cancellation of unsteady stress oscillation in a functionally graded piezoelectric thin plate subjected to impact loading. *Eur. J. Mech. A Solids*. 2018. Vol. 67. P. 84–91. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.08.016>.
15. Liew K.M., Yang J., Kitipornchai S. Postbuckling of piezoelectric FGM plates subject to thermo-electro-mechanical loading. *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40. Iss. 15. P. 3869–3892. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00096-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00096-9).
16. Duc N.D., Quan T.Q., Luat V.D. Nonlinear dynamic analysis and vibration of shear deformable piezoelectric FGM double curved shallow shells under damping-thermo-electro-mechanical loads. *Composite Structures*. 2015. Vol. 125. P. 29–40. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.041>.
17. Kumar P., Harsha S.P. Dynamic analysis of porosity dependent functionally graded sigmoid piezoelectric (FGSP) plate. *Structures*. 2022. Vol. 46. P. 1737–1752. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.11.021>.
18. Ladvanjari D., Mahajan A., Dhanjode A., Patil R.K. Static and modal analysis of functionally graded piezoelectric plate for sensor responses. *Materials Today: Proceedings*. 2023. Vol. 72. Pt. 3. P. 1678–1684. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.09.468>.
19. Vatulyan A.O., Dombrova O.B., Zhiron V.E. K opredeleniyu neodnorodnoy polarizatsii dlya elektropругogo sterzhnya [On the definition of inhomogeneous polarization for an electroelastic rod]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region [News of Higher Educational Institutions. North Caucasian Region]*. 2002. No 4. P. 7–9 (In Russian).
20. Vatulyan A.O., Dombrova O.B., Zhiron V.Y. Inverse problems for non-uniformly polarized piezoelectric rods. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2007. Vol. 71. No 1. P. 85–92.
21. Vatulyan A.O., Polovodova A.A. Opredelenie neodnorodnoy polarizatsii pyezokeramicheskogo sterzhnya po dannym akusticheskogo zondirovaniya [Determination of inhomogeneous polarization of a piezoceramic rod according to acoustic sounding data]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki [News of Higher Educational Institutions. North Caucasian Region. Natural Sciences]*. 2013. No 4. P. 26–30 (In Russian).
22. Vatulyan A.O., Solovyev A.N. *Pryamye i obratnye zadachi dlya odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektropругikh tel [Direct and Inverse Problems for Homogeneous and Inhomogeneous Elastic and Electroelastic Bodies]*. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2008. 175 p. (In Russian).
23. Vatulyan A., Nesterov S., Nedin R. Some features of solving an inverse problem on identification of material properties of functionally graded pyroelectrics. *Int. J. Heat Mass Trans.* 2019. Vol. 128. P. 1157–1167. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2018.09.084>.
24. Vatulyan A.O., Yurov V.O. O kolebaniyakh funktsionalno-gradientnykh elektropругikh sterzhney [On the vibrations of functionally graded electroelastic rods]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2022. Vol. 84. No 3. P. 351–363 (In Russian).
25. Vatulyan A.O. *Koeffitsientnye obratnye zadachi mekhaniki [Coefficient Inverse Problems of Mechanics]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 272 p. (In Russian).
26. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for Solving Ill-posed Problems]*. 1979. Moscow. Nauka Publ. 288 p. (In Russian).

RECONSTRUCTION OF THE VARIABLE PROPERTIES OF A PIEZOELECTRIC ROD*

Vatulyan A.O., Yurov V.O.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation

aovatulyan@sfedu.ru, vyurov@sfedu.ru

Received by the Editor 2023/06/08

The problem of reconstruction of variable characteristics (piezoelectric modulus and elastic compliance) of a functionally graded electroelastic rod with steady oscillations is considered when some additional information is given. To formulate the operator relations connecting the desired and measured characteristics, two types of influence are considered: a) by applying a potential difference to the electrodes, b) by applying a force to the end of the rod. Moreover, in the first case, the ends of the rod are free from stress and the current is measured, and in the second case, one of the ends of the rod is rigidly clamped, there are no electrodes, and the oscillation amplitude of the free end is measured. Statements of the corresponding boundary value problems are given in dimensionless form. Asymptotic formulas (quadratic in the frequency parameter) are constructed for the amplitude-frequency characteristics of the current and displacements in the low-frequency range. The inverse problem is solved on the basis of data on the amplitude-frequency characteristics of the current and displacements in a certain frequency range. The solution of the inverse problem is begun with the procedure for choosing the initial approximation, and then it is constructed in an iterative manner. At each iteration, the direct problem with known characteristics is solved and corrections are found based on the solution of the system of Fredholm integral equations of the first kind with smooth kernels using the regularization method of A.N. Tikhonov. To find the initial approximation, the constructed asymptotic formulas are used, as well as the method of minimizing the residual functional. The conditions are described under which the non-uniqueness of the solution of the inverse problem is possible. The results of computational experiments on the simultaneous restoration of two functions are presented. The choice of the most informative frequency ranges is discussed. The various methods for choosing the initial approximation are considered. To control the iterative process, the plots of the residual in the frequency response and plots of the reconstruction error depending on the iteration number are given.

Keywords: inverse problem, functionally graded material, electroelasticity, rod, vibrations, amplitude-frequency characteristics.

*The study was supported by the Russian Science Foundation grant No 22-11-00265, <https://rscf.ru/project/22-11-00265/> in Southern Federal University.