

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-3-323-339

ПЛОСКАЯ ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИ СТАТИЧЕСКИХ И КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

© 2023 г.

**Киселев В.Г.¹, Сергеев О.А.¹,
Сергеева С.А.², Комарова Е.И.¹**

¹*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Нижегородский государственный технический университет им. П.Е. Алексеева, Нижний Новгород, Российская Федерация*

nnsosa@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.12.2022

Представлена топологическая оптимизация линейно упругих плоских конструкций при статических и кинематических воздействиях. В качестве целевой функции рассматривается податливость конструкции, равная работе заданных внешних сил и перемещений на вызываемых ими перемещениях и опорных реакциях. Управляемыми параметрами являются толщины плоских конечных элементов. Учитывается ограничение в виде равенства на заданный объем распределяемого материала внутри заданной области проектирования. Метод оптимизации основан на критериях оптимальности.

В примерах рассмотрена топологическая оптимизация шарнирно опертой балки и консольной балки при кинематическом и статическом воздействиях. Перемещение задавалось вместо сосредоточенной силы в середине шарнирно опертой балки или на свободном конце консольной балки. Шарнирно опертая балка разбивалась на 150 конечных элементов по длине и 50 конечных элементов по высоте, консольная балка – на 150 конечных элементов по длине и 100 конечных элементов по высоте. Отличия результатов оптимизации при кинематическом воздействии от результатов оптимизации при статическом воздействии незначительны. Для проведения эксперимента на двухосное растяжение рассматривался плоский образец, состоящий из квадратной испытательной части постоянной толщины и квадратной обеспечивающей части, которая передает внешнее воздействие на испытательную часть. Получено распределение толщин обеспечивающей части заданного объема, которое минимизирует ее податливость. При кинематическом воздействии испытательная машина создавала единичное перемещение, перпендикулярное обоим краям образца, и нулевое перемещение вдоль обоих краев обеспечивающей части. При статическом воздействии испытательная машина создавала по краю обеспечивающей части равномерную нагрузку в каждом узле. Показано, что анализ чувствительности и процесс оптимизации существенно зависят от вида внешнего воздействия – статического и кинематического.

*Выполнено при финансовой поддержке Государственного задания Минобрнауки России (проект № FSWR-2023-0036).

Ключевые слова: топологическая оптимизация, метод гомогенизации, плоские конструкции, силовое и кинематическое нагружение.

Введение

Топология – это способ взаимосвязи элементов в системе. Топологическая оптимизация в механике занимается поиском связей элементов в механической конструкции. В плоской конструкции предполагается плоское напряженное или деформированное состояние. Управление связями дает дополнительный ресурс и свободу для изменения структур в лучшую сторону наряду с управлением размерами и формой. Проблеме плоской топологической оптимизации посвящено много публикаций малого и большого формата (статей и книг). Первой по этой проблеме назовем книгу [1]. В ней используется основополагающая идея об осреднении структуры материала. Обсуждаются экстремальные энергетические функционалы, вводятся уровни микроструктуры материала, решаются задачи с фермами, пластинами и критериями оптимальности. В [2] развивается идея об осреднении и предлагается несколько альтернативных подходов. Подход с постепенным эволюционным удалением материала рассматривается в [3]. Базовая книга [4] вполне может быть использована как учебник по топологической оптимизации изотропных, анизотропных, ферменных конструкций. Для образовательных целей интересны статьи [5, 6]. Метод топологической оптимизации, основанный на критериях оптимальности, представлен в [7]. Обзор статей за период до 2009 года по теме приведен в статье [8]. В книге [9] дано развитие данного обзора, она содержит лекции, посвященные аналитическим решениям, задачам с собственными, вынужденными и звуковыми колебаниями, с жидкостным потоком, с несовершенствами. При поиске конфигураций ферм популярен подход опорной конструкции, которая включает в себя избыточные стержни и узлы [10, 11]. Вариации подхода штрафного материала можно найти в [12–15]. Два направления эволюционного подхода к топологической оптимизации проиллюстрированы на примерах в [16]. По топологической оптимизации защищаются диссертации с индустриальным приложением, например [17, 18]. В книге [19] для проектирования используется грамматика форм, в частности групповые элементы ферм, и развивается системный подход к построению конфигурации системы и микроструктуры материала. В [20] сформулировано и математически обосновано понятие топологической производной как линейной части изменения функционала при изменении домена области его определения. Связь оптимизации формы и топологии обсуждается в [15, 21]. В книге [22], которая, на первый взгляд, не относится к теории топологической оптимизации, даны способы и обоснования для поиска конфигурации архитектурных форм оболочек, в том числе оболочек сетчатых, оптимальных, с отверстиями. Обширная конференция по инженерной оптимизации [23] включала в себя отдельный семинар, посвященный топологической оптимизации. В [24] топология оптимизируется совместно на двух уровнях – на уровне конструкции и на уровне микроструктуры материала. Разработан эвристический метод, не требующий связи характеристик упругости и плотности среды с удалением малых порций материала в концентраторах напряжений. Книга [25] тоже использует два уровня топологии и посвящена аэрокосмическим конструкциям. Рассматриваются приемы штрафования материала, обращение с областями низкой плотности, динамические задачи, термоупругие задачи, задачи размещения и крепления компонентов. В [26] описаны эмпирические алгоритмы на основе природных явлений.

Можно заметить, что общей чертой указанной литературы является принятие априори силового внешнего воздействия. В инженерной практике встречаются задачи с другим типом внешнего воздействия – кинематическим. Это, например, случаи, когда проектируемая конструкция находится в составе объемлющей и более жесткой системы: фюзеляжа летательного аппарата, строительной основы, экспериментального стенда и др. Здесь логичнее рассматривать внешнее воздействие не как силовое, а как кинематическое, когда задаются внешние перемещения.

Настоящая статья посвящена построению методики топологической оптимизации при совместном статическом и кинематическом воздействии. Рассматриваются плоские упругие изотропные конструкции. Ищется распределение толщин, которое минимизирует функцию податливости конструкции при ограничении на заданный объем материала.

1. Постановка задачи

Рассматривается двумерная пластина Ω переменной толщины, находящаяся в условиях плоского напряженного состояния (рис. 1). Материал пластины однородный, изотропный и линейно упругий. На границе Γ_τ пластины заданы статические воздействия F_0 . На другой границе Γ_u заданы кинематические воздействия U_0 . Толщина $x(\omega)$ ограничена нижним значением x^- и верхним значением x^+ . Для части Ω_0 пластины толщина x_0 известна, $x(\Omega_0) = x_0$.

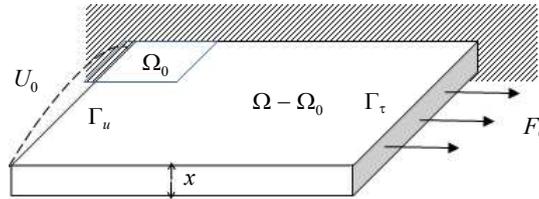


Рис. 1. Задача о пластине переменной толщины $x(\omega)$

Податливость пластины $l(x)$ определяется зависимостью:

$$l(x) = \int_{\Gamma_\tau} u^T t d\Gamma_\tau + \int_{\Gamma_u} u^T t d\Gamma_u \approx F_0^T U + F^T U_0, \quad (1)$$

где u – граничные перемещения; t – граничные усилия; $\int_{\Gamma_\tau} u^T t d\Gamma_\tau$ – интеграл по участку поверхности Γ_τ , где заданы статические усилия F_0 ; $\int_{\Gamma_u} u^T t d\Gamma_u$ – интеграл по участку поверхности Γ_u , где заданы кинематические воздействия U_0 ; U – неизвестные перемещения (свободные перемещения); F – неизвестные усилия; T – символ транспонирования.

Объем пластины V представляется в виде:

$$V = \int_{\Omega} x d\Omega \approx \sum_{e=1}^n x_e a_e = x^T a, \quad (2)$$

где n – число варьируемых элементов; a_e – площадь конечного элемента e ; x – вектор варьируемых толщин; a – вектор площадей элементов.

Толщина пластины $x(\omega)$ выбирается как управляемая функция. Целевой функцией является податливость пластины, которая равна работе внешних сил и переме-

щений на произведенных ими перемещениях и реакциях. По теореме Кастилиано она равна двум внутренним энергиям деформаций пластины.

Задача оптимизации такова: найти векторы варьируемых толщин x , перемещений U , усилий F , для которых податливость конструкции минимальна

$$l_{\min} = \min_{F, U, x} (F_0^T U + F^T U_0) \quad (3)$$

и удовлетворяются:

– уравнения равновесия

$$K(x) \begin{Bmatrix} U \\ U_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где $K(x)$ – глобальная матрица жесткости конструкции, F_0 – вектор заданных статических усилий, U_0 – вектор заданных перемещений;

– условие заданного объема

$$\frac{V(x)}{V_D} = \frac{x^T a}{V_D} = \alpha, \quad (5)$$

где $V(x)$ – объем материала; V_D – заданный объем; α – разрешенная или заданная доля объема от максимально возможного, $0 < \alpha \leq 1$;

– условие для границ толщины

$$x^- \leq x_e \leq x^+, \quad e = 1, 2, \dots, n + n_0. \quad (6)$$

Здесь n_0 – число элементов для неварьируемой части. Матрица жесткости конструкции делится на четыре составляющие:

$$K = \begin{bmatrix} K_{UU} & K_{UF} \\ K_{FU} & K_{FF} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Уравнение равновесия (4) распадается на два уравнения:

$$K_{UU}U + K_{UF}U_0 = F_0, \quad (8)$$

$$K_{FU}U + K_{FF}U_0 = F. \quad (9)$$

Уравнение (8) позволяет определить свободные перемещения U . Уравнение (9) определяет внешние усилия F , эквивалентные заданным перемещениям U_0 .

Из симметрии матрицы K следует, что

$$K_{UU}^T = K_{UU}, \quad K_{FF}^T = K_{FF}, \quad K_{UF}^T = K_{FU}. \quad (10)$$

Свойства транспонирования матриц определяются равенствами:

$$(A + B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T, \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}. \quad (11)$$

2. Решение задачи 2D-топологической оптимизации

Дискретизация. Конструкция разбивается одинаковыми плоскими конечными элементами (КЭ) Ω_e , $e = 1, 2, \dots, n + n_0$, например, 4-узловыми в виде квадрата (рис. 2).

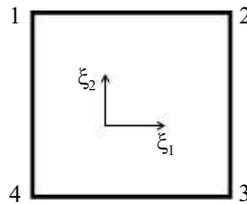


Рис. 2. Четырехузловой КЭ

Закон Гука в осях ξ_1, ξ_2 для изотропного материала:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E_e}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}.$$

Используя билинейную интерполяцию для поля перемещений в КЭ и полагая x_e и E_e постоянными в пределах элемента, матрицу жесткости элемента в нумерации узлов и перемещений u_1, u_2 запишем в виде:

$$k_e = \frac{E_e x_e}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_5 & k_6 & k_7 & k_8 \\ k_2 & k_1 & k_8 & k_7 & k_6 & k_5 & k_4 & k_3 \\ k_3 & k_8 & k_1 & k_6 & k_7 & k_4 & k_5 & k_2 \\ k_4 & k_7 & k_6 & k_1 & k_8 & k_3 & k_2 & k_5 \\ k_5 & k_6 & k_7 & k_8 & k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ k_6 & k_5 & k_4 & k_3 & k_2 & k_1 & k_8 & k_7 \\ k_7 & k_4 & k_5 & k_2 & k_3 & k_8 & k_1 & k_6 \\ k_8 & k_3 & k_2 & k_5 & k_4 & k_7 & k_6 & k_1 \end{bmatrix} = \frac{E_e x_e}{1-\nu^2} k_e^0, \quad (12)$$

где

$$k_1 = \frac{1}{2} - \frac{\nu}{6}, \quad k_2 = -\frac{1}{8} - \frac{\nu}{8}, \quad k_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\nu}{12}, \quad k_4 = \frac{1}{8} - \frac{3\nu}{8}, \quad k_5 = -\frac{1}{4} + \frac{\nu}{12}, \\ k_6 = \frac{1}{8} + \frac{\nu}{8}, \quad k_7 = \frac{\nu}{6}, \quad k_8 = -\frac{1}{8} + \frac{3\nu}{8},$$

x_e, E_e – толщина и модуль упругости в элементе, ν – коэффициент Пуассона.

Приведенная матрица k_e^0 не зависит от толщины x_e и модуля E_e , безразмерна и одинакова для всех квадратных изотропных элементов.

Будем считать, что местные системы координат ξ_1, ξ_2 всех КЭ совпадают с общей системой координат.

Матрица расширения T_e дает соответствие локальных и глобальных перемещений и учитывает разделение перемещений и нагрузок (7) на заданные и свободные. Приведенная матрица элемента k_e^0 расширяется до числа степеней свободы всей конструкции

$$K_e^0 = T_e^T k_e^0 T_e. \quad (13)$$

Глобальная матрица жесткости конструкции складывается из матриц жесткости КЭ

$$K(x) = \frac{1}{1-\nu^2} \sum_{e=1}^{n+n_0} x_e E_e K_e^0. \quad (14)$$

Если предположить материал конструкции состоящим из твердой и пористой фаз, то жесткость плоского конечного элемента может быть представлена с помощью простой интерполяции, которая вводится как гипотеза:

$$E_e = E_e(\bar{x}_e) = \bar{x}_e^p E, \quad (15)$$

где E – максимальный модуль упругости материала конструкции; $\bar{x}_e = x_e/x^+$ – интенсивность материала или количество материала, приходящееся на единицу толщины

плоского конечного элемента, $0 < \bar{x}_e \leq 1$; p – показатель степени штрафа. Такое штрафование в теории изотропного материала, когда модуль упругости конечного элемента зависит от \bar{x}_e и штрафуются, позволяет искусственно уменьшить жесткость конечных элементов малой толщины x_e и ведет к концентрации жесткости в отдельных областях конструкции (рис. 3).

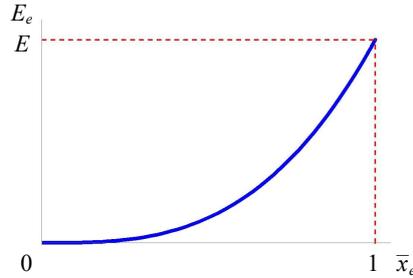


Рис. 3. Интерполяция жесткости плоского конечного элемента при степени штрафа $p = 3$

Критерии оптимальности. Для решения задачи минимизации будем использовать метод критериев оптимальности.

Критерии оптимальности – это уравнения, полученные из необходимых условий Куна – Такера для рассматриваемой задачи и эквивалентные им.

Лагранжиан без учета ограничений $0 \leq x \leq x^+$ имеет вид:

$$\Lambda = l(x) + \lambda(V(x) - V_d). \quad (16)$$

Множитель Лагранжа $\lambda \geq 0$ соответствует задачам нахождения $\min_{V \leq V_d} l$ и $\max_{V \geq V_d} l$, множитель $\lambda \leq 0$ соответствует задачам нахождения $\min_{V \geq V_d} l$ и $\max_{V \leq V_d} l$.

Необходимые условия минимума Куна – Такера таковы:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_e} = \frac{\partial l(x)}{\partial x_e} + \lambda \frac{\partial V(x)}{\partial x_e} = 0, \quad e = \overline{1, n}. \quad (17)$$

Производная объема запишется в виде:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} a_e, & i = e, \\ 0, & i \neq e. \end{cases} \quad (18)$$

Из необходимых условий (17) следует:

$$B_e = -\frac{\partial l(x)/\partial x_e}{\lambda a_e} = 1, \quad e = \overline{1, n}. \quad (19)$$

Условия (19) выражают собой критерии оптимальности для каждого варьируемого КЭ и должны выполняться в точке минимума податливости, если ограничения $0 \leq x \leq x^+$ не активны.

Критерий оптимальности (19) дает рекуррентную формулу

$$x_e^{\text{новое}} = x_e B_e^{\eta}. \quad (20)$$

Коэффициенты B_e должны быть положительными.

Попытка учета возможности предельных значений $x_e = 0$, $x_e = x^+$ позволяет обобщить (20) и предложить формулу расчета квазиоптимальных толщин следующего шага:

$$x_e^{\text{новое}} = \begin{cases} \max(0, x_e - m), & \text{если } x_e B_e^n \leq \max(0, x_e - m), \\ \min(x^+, x_e + m), & \text{если } x_e B_e^n \geq \min(x^+, x_e + m), \\ x_e B_e^n & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Рекомендуются величины $m = 0,2x^+$, $\eta = 0,5$.

Формула (21) иллюстрируется на рис. 4, согласно которому по заданной величине x_e значение, подсчитанное по (20), (21), остается без изменений, если оно попало внутрь шестиугольной фигуры на рисунке, и приравняется верхней или нижней границе, если оно попало вне ее. Заметим, что всегда $0 \leq x_e^{\text{новое}} \leq x^+$.

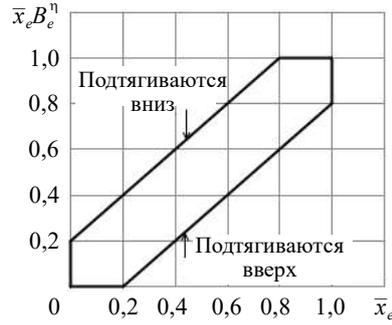


Рис. 4. Учет крайних толщин

Для реализации шага (21) необходимо знать величины производных $\partial l(x)/\partial x_e$ и величину множителя Лагранжа λ .

Анализ чувствительности целевой функции. Заданы перемещения U_0 и внешние усилия F_0 . Перемещения U и усилия F свободны и зависят от толщин x .

Функция податливости состоит из двух слагаемых, ее производная по толщине x_e равна:

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} = \frac{\partial l_1(x)}{\partial x_e} + \frac{\partial l_2(x)}{\partial x_e} = F_0^T \frac{\partial U(x)}{\partial x_e} + \frac{\partial F(x)^T}{\partial x_e} U_0. \quad (22)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Дифференцируя уравнения равновесия (8), получаем

$$\frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U(x) + K_{UU}(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_e} + \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial U(x)}{\partial x_e} = -K_{UU}^{-1}(x) \left(\frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U(x) + \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 \right). \quad (23)$$

Тогда, учитывая (8), (23), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1(x)}{\partial x_e} = & -U^T \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U - U^T \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 - U_0^T K_{FU} K_{UU}^{-1} \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U - \\ & - U_0^T K_{FU} K_{UU}^{-1} \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим второе слагаемое. Транспонируя и дифференцируя уравнения равновесия (9), получаем

$$\frac{\partial F(x)^T}{\partial x_e} = U(x)^T \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} + \frac{\partial U(x)^T}{\partial x_e} K_{UF} + U_0^T \frac{\partial K_{FF}(x)}{\partial x_e}. \quad (25)$$

Отсюда с помощью (22) получим

$$\frac{\partial l_2(x)}{\partial x_e} = U(x)^T \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 + \frac{\partial U(x)^T}{\partial x_e} K_{UF} U_0 + U_0^T \frac{\partial K_{FF}(x)}{\partial x_e} U_0.$$

Учитывая (23), запишем

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_2(x)}{\partial x_e} = U^T \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 - \left(U^T \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} + U_0^T \frac{\partial K_{FU}(x)}{\partial x_e} \right) K_{UU}^{-1}(x) K_{UF}(x) U_0 + \\ + U_0^T \frac{\partial K_{FF}(x)}{\partial x_e} U_0. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые являются скалярами. Транспонируя их, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_2(x)}{\partial x_e} = U^T \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 - U_0^T K_{FU} K_{UU}^{-1} \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U - \\ - U_0^T K_{FU} K_{UU}^{-1} \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 + U_0^T \frac{\partial K_{FF}(x)}{\partial x_e} U_0. \end{aligned} \quad (26)$$

Общая производная податливости после сложения величин (24), (26) и преобразования:

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} = -U^T \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U - 2U_0^T K_{FU} U^* + U_0^T \frac{\partial K_{FF}(x)}{\partial x_e} U_0, \quad (27)$$

где U^* – решение системы уравнений,

$$K_{UU} U^* = \frac{\partial K_{UU}(x)}{\partial x_e} U + \frac{\partial K_{UF}(x)}{\partial x_e} U_0 = \frac{\partial}{\partial x_e} \begin{bmatrix} K_{UU} & K_{UF} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ U_0 \end{Bmatrix}. \quad (28)$$

Перейдем на уровень КЭ и введем разделение перемещений и внешних сил на свободные U , F_0 и заданные U_0 , F :

$$\tilde{U} = \begin{Bmatrix} U \\ U_0 \end{Bmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ F \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

Матрица инцидентий свободных U и всех перемещений \tilde{U} конструкции имеет вид:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ O_0 \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Количество строк равно количеству свободных перемещений КЭ, количество столбцов равно количеству всех перемещений. Нумерация перемещений здесь ус-

ловная и соответствует нумерации вначале свободных перемещений, а затем заданных.

Матрица инцидентий заданных и всех перемещений конструкции представляется в виде:

$$T_0 = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ I_0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Количество строк равно количеству заданных перемещений КЭ, количество столбцов равно количеству всех перемещений. Вначале нумеруются свободные перемещения, а затем заданные; I , O – единичная и нулевая матрицы размера числа свободных перемещений; I_0 , O_0 – единичная и нулевая матрицы размера числа заданных перемещений.

Выделим свободные перемещения и внешние силы из всех перемещений и внешних сил:

$$U = T^T \tilde{U}, \quad F_0 = T^T \tilde{F}. \quad (32)$$

Выделим заданные перемещения и внешние силы из всех перемещений и внешних сил:

$$U_0 = T_0^T \tilde{U}, \quad F = T_0^T \tilde{F}. \quad (33)$$

Выделим подматрицы, соответствующие свободным и заданным перемещениям, из полной матрицы жесткости:

$$K_{UU} = T^T K T, \quad K_{UF} = T^T K T_0, \quad K_{FU} = T_0^T K T, \quad K_{FF} = T_0^T K T_0. \quad (34)$$

Расширенная приведенная матрица жесткости элемента имеет вид:

$$K_e^0 = T_e^T k_e^0 T_e. \quad (35)$$

Составляющие расширенной приведенной матрицы жесткости элемента запишутся в виде:

$$K_e^0 = \begin{bmatrix} K_{e\,UU}^0 & K_{e\,UF}^0 \\ K_{e\,FU}^0 & K_{e\,FF}^0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Матрица жесткости конструкции

$$K = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_e \frac{x_e^{p+1}}{(x_e^+)^p} K_e^0, \quad (37)$$

производная матрицы жесткости конструкции

$$\frac{\partial K}{\partial x_e} = \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} K_e^0. \quad (38)$$

Видно, что заполнение не нулями матрицы производных $\partial K / \partial x_e$ повторяет заполнение расширенной матрицы жесткости элемента K_e^0 .

Производные подматриц имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} K_{eUU}^0, & \frac{\partial K_{UF}}{\partial x_e} &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} K_{eUF}^0, \\ \frac{\partial K_{FU}}{\partial x_e} &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} K_{eFU}^0, & \frac{\partial K_{FF}}{\partial x_e} &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} K_{eFF}^0.\end{aligned}$$

Правая часть вспомогательной системы (28) запишется в виде:

$$\frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} U + \frac{\partial K_{UF}}{\partial x_e} U_0 = \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} (K_{eUU}^0 U + K_{eUF}^0 U_0). \quad (39)$$

Слагаемые производной податливости (27):

$$\begin{aligned}U^T \frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} U &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U^T K_{eUU}^0 U, \\ U_0^T \frac{\partial K_{FF}}{\partial x_e} U_0 &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U_0^T K_{eFF}^0 U_0, \\ U_0^T K_{FU} U^* &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U_0^T K_{FU} U^{**},\end{aligned} \quad (40)$$

где U^{**} – решение системы уравнений

$$K_{UU} U^{**} = K_{eUU}^0 U + K_{eUF}^0 U_0. \quad (41)$$

Составляющая матрицы жесткости конструкции

$$K_{FU} = \frac{E}{1-\nu^2} \sum_e \frac{x_e^{p+1}}{(x_e^+)^p} K_{eFU}^0. \quad (42)$$

Суммируются коэффициенты расширенных матриц жесткости всех КЭ из строк и столбцов, соответствующих заданным перемещениям.

Производная податливости записывается в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} &= -U^T \frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} U - 2U_0^T K_{FU} U^* + U_0^T \frac{\partial K_{FF}}{\partial x_e} U_0 = -\frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U^T K_{eUU}^0 U - \\ &- 2 \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U_0^T K_{FU} U^{**} + \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} U_0^T K_{eFF}^0 U_0 = \\ &= \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} (-U^T K_{eUU}^0 U - 2U_0^T K_{FU} U^{**} + U_0^T K_{eFF}^0 U_0).\end{aligned} \quad (43)$$

Из общего выражения (27) можно получить частные случаи только при отсутствии статического или отсутствии кинематического воздействий. При отсутствии кинематического воздействия ($U_0 = 0$) производная податливости имеет вид:

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} = -U^T \frac{\partial K_{UU}}{\partial x_e} U = -\frac{(p+1)x_e^p E}{(x^+)^p (1-\nu^2)} U^T K_{eUU}^0 U = -\frac{(p+1)x_e^p E}{(x^+)^p (1-\nu^2)} u_e^T k_e^0 u_e. \quad (44)$$

При отсутствии статического воздействия ($F_0 = 0$) производная податливости имеет вид:

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} = \begin{Bmatrix} U \\ U_0 \end{Bmatrix}^T \frac{\partial K}{\partial x_e} \begin{Bmatrix} U \\ U_0 \end{Bmatrix} = \frac{(p+1)x_e^p E}{(x^+)^p (1-\nu^2)} u_e^T k_e^0 u_e. \quad (45)$$

Матрица k_e^0 положительно определена. Тогда из (44), (45) следует, что $\partial l(x)/\partial x_e \leq 0$ для $U_0 = 0$ и $\partial l(x)/\partial x_e \geq 0$ для $F_0 = 0$.

Алгоритм анализа чувствительности заключается в следующих действиях:

1. Нахождение треугольного разложения матрицы жесткости конструкции $K_{UU} = L_H L_B$.
2. Нахождение свободных перемещений U : $K_{UU}U = F_0 - K_{UF}U_0$.
3. Нахождение правой части вспомогательной системы $(K_{eUU}^0 U + K_{eFF}^0 U_0)$, $e = 1, n$.
4. Нахождение вспомогательных перемещений U^{**} : $K_{UU}U^{**} = K_{eUU}^0 U + K_{eFF}^0 U_0$, $e = 1, n$.
5. Определение чувствительности податливости

$$\frac{\partial l(x)}{\partial x_e} = \frac{E(p+1)x_e^p}{(1-\nu^2)(x_e^+)^p} (-U^T K_{eUU}^0 U - 2U_0^T K_{FU} U^{**} + U_0^T K_{eFF}^0 U_0).$$

Сглаживание чувствительностей. Во избежание проблем с осцилляцией производные $\partial l(x)/\partial x_e$ в элементах сглаживаются с помощью значений производных в соседних элементах [5].

Пусть $c_e = \partial l(x)/\partial x_e$ – производная в элементе e . Сглаженная производная

$$\tilde{c}_e = S_e(x), \quad (46)$$

где функция S_e действует на окрестность e -го КЭ.

В качестве S_e используется, например, функция

$$\tilde{c}_e = \frac{\sum_{j \in N_e} H_{ej} x_j c_j}{x_e \sum_{j \in N_e} H_{ej}}, \quad (47)$$

где N_e означает множество варьируемых КЭ, расстояние $\text{dist}(e, j)$ от центра которых до центра e -го КЭ меньше заданного радиуса R , то есть

$$\text{dist}(e, j) \leq R. \quad (48)$$

Штрафные множители зависят от расстояния до КЭ

$$H_{ej} = R - \text{dist}(e, j). \quad (49)$$

Неварьируемые КЭ могут маркироваться нулевым значением производных c_j и \tilde{c}_e .

Множитель Лагранжа. Множитель Лагранжа λ в (19) соответствует ограничению по объему и должен удовлетворять равенству

$$V(x(\lambda)) = V_D. \quad (50)$$

Он находится как корень уравнения (50) по методу, например, дихотомии.

В критериях оптимальности (19) участвуют найденный множитель λ и сглаженные производные (46). В итерационном процессе (20) необходима положительность критерия оптимальности $B_e \geq 0$, то есть необходимо искать положительные множители Лагранжа $\lambda > 0$ в задаче со статическими воздействиями ($U_0 = 0$) и отрицательные множители $\lambda < 0$ в задаче с кинематическими воздействиями ($F_0 = 0$). При смешанных воздействиях ($U_0 \neq 0, F_0 \neq 0$) множитель Лагранжа может быть и

того, и другого знака. Абсолютные величины множителя Лагранжа сильно отличаются в задачах со статическими и кинематическими воздействиями.

Алгоритм решения. Резюмируя сказанное, можно для решения задачи топологической оптимизации предложить следующий алгоритм.

1. Подготовка сетки КЭ. Начальное решение $x = x^{(0)}$.
2. Выполнение процедур до применения «критерия сходимости»:
 - а) КЭ анализ, $K(x)U = F$;
 - б) анализ чувствительности $l(x)$;
 - в) фильтрация чувствительностей;
 - г) нахождение нового x по методу критериев оптимальности;
 - д) визуальное сопровождение.

Критерием сходимости служит либо стабилизация решения x , либо превышение предельного числа итераций. Значений функции податливости на шагах алгоритма не требуется, однако их можно вычислить как

$$l(x) = F_0^T U + F^T U_0 = U^T K U + U_0^T K U_0$$

либо как

$$l(x) = \frac{1}{1 + \nu^2} \sum_{e=1}^{n+n_0} \frac{x_e^{p+1}}{(x^+)^p} E(U_e^T K_e^0 U_e + U_{0e}^T K_e^0 U_{0e}).$$

Нормализация. Изложенная методика ориентирована на размерные параметры: x_e – толщина, K – матрица жесткости конструкции, F_0 – заданные внешние силы, U_0 – заданные перемещения, V_d – ресурс объема, a – площади КЭ. Нормализация позволяет масштабировать решение задачи и построить программный код, не зависящий от системы единиц измерения. Отметим безразмерные, приведенные величины верхней чертой.

Варьируемая толщина нормализуется верхней ее границей

$$\bar{x}_e = \frac{x_e}{x^+}. \quad (51)$$

Таким образом, $0 \leq \bar{x}_e \leq 1, e = 1, 2, \dots, n$. Неварьируемые толщины нормализуются так же:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{0i}}{x^+}, \quad i = \overline{n+1, n_0}.$$

Внешние перемещения и силы нормализуются так:

$$\begin{aligned} U &= x^+ \bar{U}, \quad U_0 = x^+ \bar{U}_0, \\ F_0 &= \frac{(x^+)^2 E}{1 - \nu^2} \bar{F}_0, \quad F = \frac{(x^+)^2 E}{1 - \nu^2} \bar{F}; \end{aligned} \quad (52)$$

податливость

$$l = \frac{(x^+)^3 E}{1 - \nu^2} \bar{l}; \quad (53)$$

приведенный объем

$$\bar{V} = \frac{\sum_{e=1}^n \bar{x}_e a_e}{A}; \quad (54)$$

объем

$$V = x^+ A \bar{V}, \quad (55)$$

где A – площадь варьируемой конструкции;
ограничение по объему

$$V_{\text{д}} = \alpha x^+ A, \quad (56)$$

где α – заданная доля объема от максимально возможного, $0 < \alpha \leq 1$;
матрица жесткости конструкции

$$K = \frac{x^+ E}{1 - \nu^2} \bar{K}; \quad (57)$$

уравнения равновесия (4)

$$\bar{K}(\bar{x}) \begin{Bmatrix} \bar{U} \\ U_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_0 \\ F \end{Bmatrix}; \quad (58)$$

производная податливости

$$\frac{\partial l}{\partial x_e} = \frac{(x^+)^2 E}{1 - \nu^2} \frac{\partial \bar{l}}{\partial \bar{x}_e}; \quad (59)$$

напряжения

$$\sigma = E \bar{\sigma}; \quad (60)$$

энергия деформаций

$$w = (x^+)^3 E \bar{w}; \quad (61)$$

множитель Лагранжа

$$\lambda = \frac{E}{1 - \nu^2} \bar{\lambda}. \quad (62)$$

Надчеркнутые обозначения безразмерны и используются при численной реализации.

Замечания

1. В разрешающем уравнении (4) и в последующих выкладках в качестве неизвестных используются узловые перемещения, то есть за расчетный подход принимается метод перемещений. Однако ничто не мешает и логичнее для кинематических воздействий использовать в качестве неизвестных внутренние усилия, то есть использовать метод сил. Выбор метода перемещений обоснован его лучшей методической проработкой и существующей численной реализацией.

2. Немаловажным обстоятельством изложенной методики является свойство сепарабельности целевой функции, управляемых параметров и функции ограничений. Податливость, объем представляются в виде сумм функций от непересекающихся множеств параметров. Это позволяет свести задачу оптимизации большой размерности к серии задач малой размерности. Методика может быть применена практически без изменений к другим сепарабельным функциям и задачам, например, к задаче минимизации объема при заданном значении податливости.

3. Примеры

Эталонные конструкции. Эталонные конструкции двухопорной балки и консольной балки из [5] были подвергнуты топологической оптимизации при кинематическом и статическом воздействии. Заданное перемещение прикладывалось вместо сосредоточенной силы в середине двухопорной балки или на краю консольной балки. Двухопорная балка дискретизирована 150×50 КЭ, консольная балка – 150×100 КЭ.

Отличия результатов оптимизации при кинематическом воздействии (рис. 5а, в) от результатов оптимизации при статическом воздействии (рис. 5б, г) либо не заметны, либо незначительны.

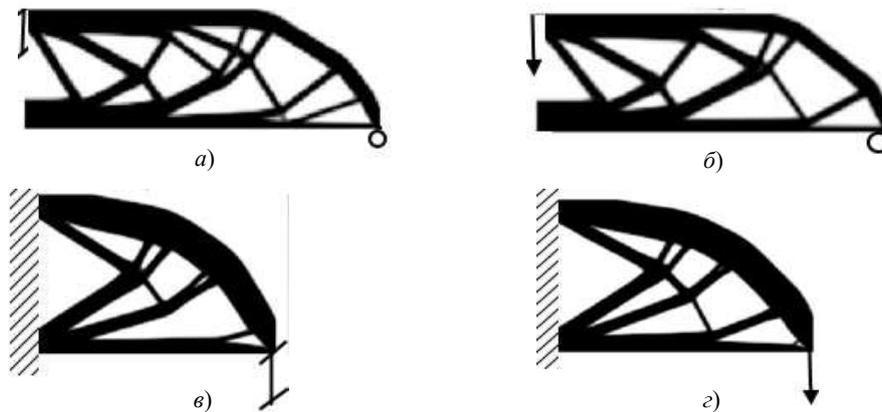


Рис. 5. Отличия результатов оптимизации эталонных конструкций

Образец двухосного растяжения. Рассматривается плоский образец для проведения эксперимента на двухосное растяжение [27]. Образец состоит из квадратной испытательной части *A* постоянной толщины и квадратной обеспечивающей части, которая передает внешнее воздействие на часть *A* от испытательной машины *B* (рис. 6). Обеспечивающая часть содержит четыре одинаковые составляющие *C* и четыре разреза между ними *D*.

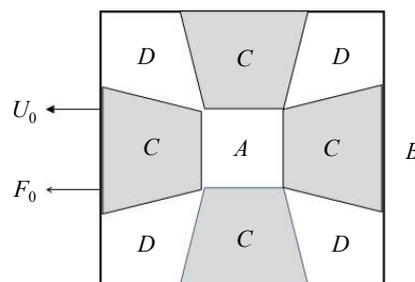


Рис. 6. Образец двухосного растяжения

Требуется найти распределение толщин обеспечивающей части заданного объема, которое минимизирует ее податливость.

Рассматривается четверть образца с условиями симметрии по двум осям. В качестве критерия останова итерационного процесса оптимизации используется стабилизация максимального изменения приведенной толщины меньше $\bar{x}_e = 0,01$. Разрезы моделируются элементами толщиной $\bar{x}_e = 0,001$. Толщина испытательной

части $\bar{x}_A = 0,5$. Ширина испытательной части равна 0,4 размера образца. Заданная доля объема от максимально возможного $\alpha = 0,5$. Показатель штрафования модуля упругости $p = 2$. Радиус сглаживания чувствительностей $R = 1,5$ КЭ. Размеры сетки 150×150 КЭ. Ширина разреза D между составляющими C увеличивается от $-0,01$ ширины образца у испытательной части до $0,1$ ширины образца у края, считая от диагонали разреза, или от 0 до $0,5$ ширины образца у края (широкий разрез). Знак минус у ширины означает, что составляющие C соединяются между собой.

При кинематическом воздействии испытательная машина создает единичное перемещение $\bar{U}_0 = 1$, перпендикулярное обоим краям образца, и нулевое перемещение вдоль обоих краев обеспечивающей части. При статическом воздействии испытательная машина создает по краю обеспечивающей части равномерную нагрузку $\bar{F}_0 = 1$ в каждом узле. На рис. 7 показаны результаты топологической оптимизации по изложенной методике; a – без статического воздействия, b – без кинематического воздействия.



Рис. 7. Распределение толщин при кинематическом и статическом воздействиях

На рис. 8 показаны результаты оптимизации при другой ширине разреза между составляющими.



Рис. 8. Распределение толщин при широком разрезе

Можно сделать вывод о том, что иногда топологический проект сильно зависит от способа приложения нагрузки – кинематического или статического.

Заключение

Поставлена и решена задача топологической оптимизации плоской упругой конструкции при совместных статических и кинематических воздействиях. Целевой функцией выступает податливость конструкции, равная работе заданных внешних

сил и перемещений на вызываемых ими перемещениях и опорных реакциях. Управляемыми параметрами служат толщины плоских конечных элементов. Учитывается ограничение в виде равенства на заданный объем распределяемого материала. Метод оптимизации основан на критериях оптимальности. Показано, что анализ чувствительности и процесс оптимизации существенно зависят от вида внешнего воздействия – статического и кинематического. Приводятся примеры топологической оптимизации конструкций.

References

1. Bendsoe M.P. *Optimization of Structural Topology, Shape and Material*. Berlin. Heidelberg. Springer. 1995. 273 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03115-5>.
2. Hassani B., Hinton E. *Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software*. London. Springer. 1999. 268 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0891-7>.
3. Xie Y.M., Steven G.P. *Evolutionary Structural Optimization*. London. Springer. 1997. 188 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0985-3>.
4. Bendsoe M.P., Sigmund O. *Topology Optimization: Theory, Methods and Applications*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2004. 370 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-05086-6>.
5. Sigmund O. A 99 line topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2001. Vol. 21. Iss. 2. P. 120–127. <https://doi.org/10.1007/s001580050176>.
6. Liu K., Tovar A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2014. Vol. 50. Iss. 6. P. 1175–1196. <https://doi.org/10.1007/s00158-014-1107-x>.
7. Liang Q.Q. *Performance-Based Optimization of Structures: Theory and Applications*. London. CRC Press. 2005. 280 p. <https://doi.org/10.1201/9781482265521>.
8. Rozvany G.I.N. A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*. 2009. Vol. 37. Iss. 3. P. 217–237. <https://doi.org/10.1007/s00158-007-0217-0>.
9. *Topology Optimization in Structural and Continuum Mechanics*. Eds. Rozvany G.I.N, Lewinski T.P. Vienna. Springer. 2014. 471 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-7091-1643-2>.
10. Ohsaki M. *Optimization of Finite Dimensional Structures*. Boca Raton, USA. CRC Press. 2011. 406 p. <https://doi.org/10.1201/EBK1439820032>.
11. Kress G., Keller D. *Structural Optimization. Zentrum für Strukturtechnologien*. Zurich. ETH. 2007. 159 p.
12. Christensen P.W., Klarbring A. *An Introduction to Structural Optimization*. Dordrecht. Springer. 2009. 214 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8666-3>.
13. Belegundu A.D., Chandrupatla T.R. *Optimization Concepts and Applications in Engineering*. Cambridge. Cambridge University Press. 2011. 480 p.
14. Selley S.E., Gyurecz G., Janik J., Kortelyesi. *Engineering Optimization. Course Bulletin*. Typotex Publishing House. 2012. 225 p.
15. Allaire G. *Conception Optimale de Structures*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2007. 280 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-36856-4>.
16. Huang X., Xie Y. *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. Chichester, UK. John Wiley&Sons. 2010. 223 p. DOI: 10.1002/9780470689486.
17. Larsson R. *Methodology for Topology and Shape Optimization: Application to a Rear Lower Control Arm*. Goteborg, Sweden. Chalmers Reproservice. 2016. 53 p.
18. Veenendaal D. Evolutionary optimization of fabric formed structural elements. *Magistr's thesis*. TU Delft. 2008. 261 p.
19. *Formal Engineering Design Synthesis*. Eds. E.K. Antonsson, J. Cagan. Cambridge. Cambridge University Press. 2001. 496 p.
20. Novotny A.A., Sokolowski J. *Topological Derivatives in Shape Optimization*. Berlin. Heidelberg. Springer. 2013. 324 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35245-4>.
21. Bruynell M., Cravier J.C., Gourmelen P. *Optimisation des Structures Mecaniques: Methodes numeriques et Elements Finis*. Paris. Du Nod. 2014. 384 p. <https://hdl.handle.net/2268/184947>.

22. *Shell Structures for Architecture. Form Finding and Optimization*. Eds. S. Adriaenssens, P. Block, D. Veenendaal, C. Williams. London. Routledge. 2014. 340 p. <https://doi.org/10.4324/9781315849270>.
23. *Engineering Optimization 2014*. Eds. H.C. Rodrigues, J. Herskovits, C.M. Soares et al. London. CRC Press. 2014. 1078 p. <https://doi.org/10.1201/b17488>.
24. Xia L. *Multiscale Structural Topology Optimization*. ISTE Press Ltd. 2016. 175 p. <https://doi.org/10.1016/C2015-0-01254-0>.
25. Zhang W., Zhu J., Gao T. *Topology Optimization in Engineering Structure Design*. ISTE Press Ltd. 2016. 274 p.
26. *Nature-Inspired Optimizers. Theories. Literature Reviews and Applications*. Eds. M. Sey-edali, J.S. Dong, A. Lewis. Cham, Switzerland. Springer Cham. 2020. 238 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12127-3>.
27. Tiernan P., Hannon A. Design optimisation of biaxial tensile test specimen using finite element analysis. *International Journal of Material Forming*. 2014. Vol. 7. Iss. 1. P. 117–123. <https://doi.org/10.1007/s12289-012-1105-8>.

2D TOPOLOGICAL OPTIMIZATION WITH STATIC AND KINEMATIC EFFECTS*

Kiselev V.G.¹, Sergeev O.A.¹, Sergeeva S.A.², Komarova E.I.¹

¹*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

Received by the Editor 2022/12/12

Topological optimization of linearly elastic 2D structures under static and kinematic effects is presented. As an objective function, the compliance of the structure is considered, which is equal to the work of given external forces and displacements on the displacements and support forces caused by them. The design variables are the thicknesses of 2D finite elements. A constraint in the form of equality on a given volume of distributed material within a given design area is taken into account. The optimization method is based on optimality criteria.

The examples consider the topological optimization of a simply supported beam and a cantilever beam under kinematic and static effects. The displacement is given instead of a concentrated force in the middle of simply supported beam or at the free end of a cantilever beam. The simply supported beam was divided into 150 finite elements along the length and 50 finite elements along the height, the cantilever beam – into 150 finite elements along the length and 100 finite elements along the height. Differences between the results of optimization under kinematic effect and the results of optimization under static effect are insignificant. To conduct an experiment on biaxial tension the analysis considered a 2D sample consisting of a square test part of constant thickness and a square supporting part, which transmits an external force to the test part. The distribution of thicknesses of the providing part of a given volume was obtained, which minimizes its compliance. Under kinematic effect, the testing machine generates a unit displacement perpendicular to both ends of the specimen and a zero displacement along both edges of the supporting part. Under static effect, the testing machine created a uniform load along the edge of the supporting part in each node. It is shown that the sensitivity and the optimization process significantly depend on the type of external effect – static and kinematic.

Keywords: topological optimization, homogenization method, 2D structures, force and kinematic loading.

*The work was carried out with financial support from the State assignment Ministry of Education and Science of Russia (project No FSWR-2023-0036).