УДК 539.374

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ МАТЕРИАЛОВ*)

Б.Ф. Иванов, Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин

Санкт-Петербург

В рамках эндохронной теории неупругости решается задача о возможности появления немонотонного поведения кривых связи напряжений и деформаций. Установлено, что при некоторых условиях, накладываемых на параметр, характеризующий эндохронную теорию при больших деформациях, такая возможность реализуется.

Уже достаточно давно экспериментально были обнаружены факты немонотонного поведения кривых связи напряжений и деформаций при простом (монотонном) деформировании и нагружении. Отметим здесь работы Портевена–ЛеШателье [1], Савара [2], Массона [3], своеобразные кривые деформирования в экспериментах Монтелье [4]. Теоретически в рамках феноменологического подхода указанные явления до сих пор не находят единого удовлетворительного описания. Все упомянутые явления и аналогичные им, начиная с эффекта Пойнтинга [5] и осцилляции напряжений Рубина [6] и заканчивая явлением ретчета [7] и эффектом Малышева [8, 9], могут быть названы, следуя работе [10], эффектами второго порядка. Предложенная авторами в работе [11] эндохронная теория неупругости, учитывающая конечные деформации, качественно описывает ряд перечисленных эффектов [12–14].

В предлагаемой работе при анализе эффектов второго порядка оценивается роль параметра q, характеризующего эндохронную теорию при больших деформациях. (В эндохронной теории неупругости для малых деформаций $q = 0$.)

1. Используется простейший вариант эндохронной теории неупругости для больших деформаций в виде [12]:

$$\tau\overset{*}{\sigma}+\sigma\left|D\right|=2G(\tau D+k\varepsilon\left|D\right|),$$

$$\overset{*}{\varepsilon}=D,\quad \Omega=\dot{Q}Q^{T}, \tag{1}$$

$$\dot{\varepsilon}+\varepsilon\Omega-\Omega\varepsilon=\overset{*}{\varepsilon},\quad \left|D\right|=\sqrt{D:D}.$$

В соотношения (1) в безындексной форме входят: τ – аналог деформационного предела текучести; σ, ε – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; G – модуль сдвига; k – аналог коэффициента упрочнения; Q – ортогональный тензор поворота;

*) Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00169).

Ω – тензор спина; D – девиатор тензора скоростей деформаций; двоеточие означает операцию свертки компонент тензора. Кроме того, здесь используется, что

$$\varepsilon_{ii} = \sigma_{ii} / K,$$

$$D = (L + L^T)/2, \quad L = \dot{F} F^{-1}, \quad Q = F u^{-1},$$

где K – объемный модуль, F – тензор градиента деформаций, L – скорость градиента деформаций, u – правый тензор удлинения в полярном разложении тензора $F = Qu$.

Рассмотрим случай, когда градиент деформаций имеет достаточно простой вид

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

В этом случае

$$F^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} a_2 & -mb & 0 \\ -b & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta / a_3 \end{pmatrix}, \quad \Delta = a_1 a_2 - mb^2.$$

Тогда ортогональный тензор поворота Q имеет следующую структуру:

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$\dot{a}_1 a_2 - mb\dot{b} = \Delta \cdot D_{11},$$

$$\dot{a}_2 a_1 - mb\dot{b} = \Delta \cdot D_{22},$$

$$\dot{b}(a_2 + ma_1) - b\left(\dot{a}_2 + m\dot{a}_1\right) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b(m-1)}{a_1 + a_2}, \quad \frac{\dot{a}_3}{a_3} = D_{33}, \quad D_{13} = D_{23} = 0. \tag{3}$$

Изучается задача, когда $D_{11} \neq 0, D_{22} \neq 0, D_{22} = -D_{11}, D_{12} \neq 0, D_{13} = D_{23} = 0.$ Тогда система определяющих уравнений (1) примет вид:

$$\dot{\varepsilon}_{11} + q\varepsilon_{12} = D_{11},$$

$$\dot{\varepsilon}_{12} - q\varepsilon_{11} = D_{12}, \tag{4}$$

$$\dot{\sigma}_{11}+\frac{\sigma_{11}}{\tau}\left|D\right|+q\sigma_{12}=2G\left(D_{11}+\frac{k}{\tau}\varepsilon_{11}\left|D\right|\right),$$

$$\dot{\sigma}_{12}+\frac{\sigma_{12}}{\tau}\left|D\right|-q\sigma_{11}=2G\left(D_{12}+\frac{k}{\tau}\varepsilon_{12}\left|D\right|\right), \qquad (5)$$

$$2\dot{\beta}=-q.$$

Введем новые обозначения

$$\sigma=\sigma_{11}+i\sigma_{12},$$

$$\varepsilon=\varepsilon_{11}+i\varepsilon_{12}, \qquad (6)$$

$$D=D_{11}+iD_{12}.$$

Эти величины назовем комплексным напряжением, комплексной деформацией и комплексной скоростью деформации соответственно. Уравнения (4) и (5) в соответствии с обозначениями (6) принимают вид:

$$\dot{\varepsilon}-iq\varepsilon=D,$$

$$\dot{\sigma}+\left(\frac{\left|D\right|}{\tau}-iq\right)\sigma=2G\left(D+\frac{k}{\tau}\left|D\right|\varepsilon\right).$$

При начальных условиях $\sigma(0)=0$, $\varepsilon(0)=0$ и задании тензора D нетрудно получить решение

$$\varepsilon=\int_0^t D(\xi)\left\{\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]-i\cdot\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\right\}d\xi,$$

$$\frac{\sigma}{2G}=\int_0^t\left[D(\xi)+\frac{k}{\tau}\left|D(\xi)\right|\varepsilon\right]\exp\left(C(\xi)-C(t)\right)\times$$

$$\times\left\{\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]-i\cdot\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\right\}d\xi,$$

здесь

$$B(t)=-\int_0^t q(\xi)\,d\xi,\quad C(t)=\frac{1}{\tau}\int_0^t\left|D(\xi)\right|d\xi.$$

Отделяя вещественные и мнимые части решения, получим:

$$\varepsilon_{11}(t)=\int_0^t\left\{D_{11}(\xi)\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]+D_{12}(\xi)\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\right\}d\xi,$$

$$\varepsilon_{12}(t)=\int_0^t\left\{D_{12}(\xi)\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]-D_{11}(\xi)\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\right\}d\xi,$$

$$\frac{\sigma_{11}(t)}{2G}=\int_0^t\exp\left[C(\xi)-C(t)\right]\left\{\left[D_{11}(\xi)+\frac{k}{\tau}\left|D(\xi)\right|\varepsilon_{11}\right]\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]+\right.$$

$$+\left[D_{12}(\xi)+\frac{k}{\tau}\left|D(\xi)\right|\varepsilon_{12}\right]\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\Bigg\}d\xi,$$

$$\frac{\sigma_{12}(t)}{2G}=\int_0^t \exp\left[C(\xi)-C(t)\right]\Bigg\{\left[D_{12}(\xi)+\frac{k}{\tau}\left|D(\xi)\right|\varepsilon_{12}\right]\cos\left[B(t)-B(\xi)\right]-$$

$$-\left[D_{11}(\xi)+\frac{k}{\tau}\left|D(\xi)\right|\varepsilon_{11}\right]\sin\left[B(t)-B(\xi)\right]\Bigg\}d\xi.$$

2. Рассмотрим важный частный случай, когда

$$D_{11}=0,\quad D_{12}=D_{12}^0=\mathrm{const},\quad k=0. \tag{7}$$

Предположим, что $q(t)$ локально интегрируема на $[0,+\infty)$, тогда можно показать, что

$$\lim_{t\to\infty}\sigma_{11}(t)=0 \quad \text{è} \quad \lim_{t\to\infty}\sigma_{12}(t)=D_{12}^0.$$

Кроме того, если $q(t)$ монотонно убывает, $\lim\limits_{t\to\infty} q(t)=0$ и существует $\beta=\int_0^\infty q(t)\,dt\le$ $\le\pi/2$, то

$$\dot{\sigma}_{12}(t)>0.$$

Монотонное возрастание σ_{12} возможно и при $\beta>\pi/2$. Приведем характерный пример.

П р и м е р 1. Пусть $m=k_0^2$, тогда

$$q=\frac{1-k_0^2}{k_0^2+1}\left\{1+\left[\frac{1+k_0^2}{2k_0}\cdot\mathrm{sh}\,\frac{2k_0}{1+k_0^2}t\right]^2\right\}^{-1}.$$

Если $m=0$, то $q=1/(1+t^2)$ и $\int_0^\infty q\,dt=\pi$. На рис. 1 для этого случая приведены графики изменения сдвигового и осевого напряжения от времени ($\tau=1$, $2G=1$, $k=$ $=0$, $m=0$).

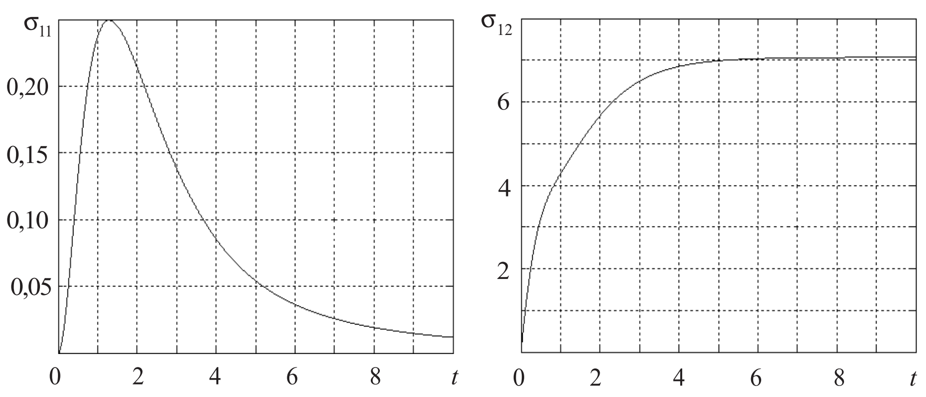

Рис. 1

3. Рассмотрим случай, когда помимо (7) выполняется условие $q = q_\infty = \text{const}$. Тогда, если $q = 0$, система (4)–(5) имеет единственную точку покоя $Q(0, 1)$, являющуюся центром, и решение $\sigma(t)$, начинающееся в точке $(0, 0)$, идет в эту точку по мнимой оси. Если же $q_\infty \neq 0$, то у системы будет единственная точка покоя

$$Q_\infty = \left(\frac{-q_\infty}{1+q_\infty^2}, \frac{1}{1+q_\infty^2} \right),$$

являющаяся фокусом, и решение, начинающееся в точке $(0, 0)$ при $q_\infty > 0$, располагается в левой полуплоскости комплексной переменной, наматываясь на точку Q_∞ против часовой стрелки. При $q_\infty \neq 0$ решение целиком располагается выше оси σ_{11} и ниже прямой $\sigma_{12} = D_{12}^0$. Отметим, что скорость напряжений при этом условии не остается знакопостоянной, то есть процесс решения оказывается осциллирующим по скорости изменения напряжений.

4. Рассмотренные авторами другие примеры также показали, что и при переменном q, не удовлетворяющем условиям п. 3, возникают осциллирующие изменения скоростей напряжений.

П р и м е р 2. Пусть $m = -l^2$, тогда

$$q = \frac{l^2+1}{1-l^2}\left\{ 1 + \left[\frac{1-l^2}{2l} \cdot \sin \frac{2l}{1-l^2} t \right]^2 \right\}^{-1}.$$

При $m \to -1$ значение q велико и практически величина постоянная, а кривые $\sigma_{12}(t)$ и $\sigma_{11}(t)$ имеют колебательный характер. На рис. 2 приведен типичный пример поведения $\sigma_{12}(t)$ при условии, что

$$\tau = 1/q,\ k = 1,\ l = 0{,}8,\ 2G = 2q(1+\lambda),\ d\lambda = \sqrt{d\varepsilon : d\varepsilon}.$$

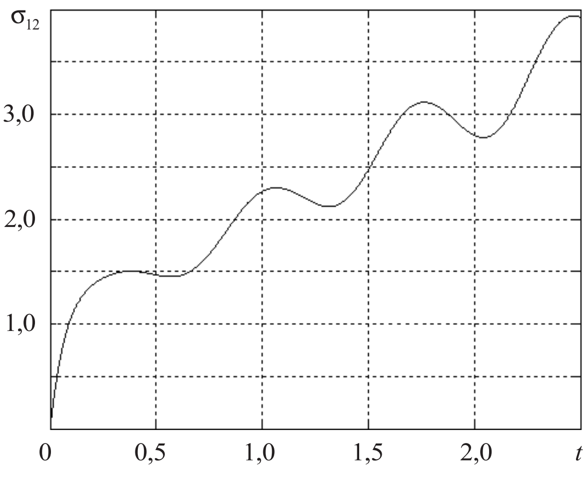

Рис. 2

Таким образом, показано, что в зависимости от значения m величина параметра эндохронной неупругости q может иметь различный характер изменения и, как следствие, может возникать как монотонное, так и колебательное изменение скоростей напряжений.

Литература

1. *Porteven, A.* Sur un phenomene observe lors de l'essai de traction d'alliages en cours de transformation / A. Porteven, F. LeChatelier // Comp. Rend. Acad. Sci. Paris. – 1923. – Vol. 176. – P. 507–510.
2. *Savart, F.* Recherches sur les vibration longitudinales / F. Savart // Annales de Chimie et de Physique. Deuxieme serie. – 1837. – Vol. 65. – P. 337–402.
3. *Masson, A.* Sur elasticite des corps solides / A. Masson // Annales de Chimie et de Physique. Troisieme serie. – 1841. – Vol. 3. – P. 451–462.
4. *Montheillet, F.* Axial stresses and texture development during the torsion testing of Al, Cu, α-Fe / F. Montheillet, M. Cohen, J.J. Jonas // Acta Metallurgica. – 1984. – Vol. 32. – P. 2077–2089.
5. *Poynting, J.H.* On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted / J.H. Poynting // Proccedings of Royal Society. London. A. – 1909. – Vol. 82. – P. 546–559.
6. *Rubin, M.B.* Plasticity theory formulated in terms of physically based microstructural variables. Part II. Examples / M.B. Rubin // International Journal of Solids and Structures. – 1994. – Vol. 31, N19. – P. 2635–2652.
7. *Delobelle, P.* Experimental study and phenomenological modelization of ratchet under uniaxial and biaxial loading on an austenitic steel / P. Delobelle, P. Robinet, L. Bocher // International Journal of Plasticity. – 1995. – Vol. 11, N4. – P. 397–421.
8. *Малышев, Б.М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов / Б.М. Малышев // Вестник Московского университета. Математика, механика, астрономия, физика, химия. – 1958. – №1. – С. 55–68.
9. *Малышев, Б.М.* Пластическое течение при совместном непрерывном растяжении и кручении под действием малых крутящих моментов / Б.М. Малышев // Вестник Московского университета. Математика, механика, астрономия, физика, химия. – 1958. – №2. – С. 33–46.
10. *Георгиевский, Д.В.* Тензорно нелинейные эффекты при изотермическом деформировании сплошных сред / Д.В. Георгиевский // Успехи механики. – 2002. – Т.1, №2. – С. 150–176.
11. *Кадашевич, Ю.И.* Новые принципы составления определяющих уравнений эндохронной теории пластичности при конечных деформациях / Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин // Машины и аппараты целлюлозно-бумажного производства: Межвуз. сб. науч. трудов. СПб: Изд-во СПбГТУРП. – 1996. – С. 124–127.
12. *Кадашевич, Ю.И.* Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости / Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1998. – Вып. 59. – С. 72–76.
13. *Кадашевич, Ю.И.* Новый взгляд на построение эндохронной теории пластичности при учете конечных деформаций / Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин // Научно-технические ведомости СПбГТУ. – СПб: Изд-во СПбГТУ. – 2003. – №3.– С. 96–103.
14. *Кадашевич, Ю.И.* О расширении возможностей эндохронной теории неупругости, учитывающей конечные деформации / Ю.И. Кадашевич, С.П. Помыткин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 2004. – Вып. 66. – С. 31–34.

[01.12.2006]

ON THE ISSUE OF INSTABILITY OF INELASTIC DEFORMATION OF MATERIALS

B.F. Ivanov, Yu.I. Kadashevich, S.P. Pomytkin

The problem of possibility of non-monotonous behavior of stress-strain curves is analyzed in the frame of the endochronous theory of inelasticity. It is found that for certain constraints imposed on parameter of endochronous inelasticity such a possibility exists.