

УДК 534.014

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-85-2-253-266

ДИНАМИКА ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСНОЙ СИЛЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧИТЕЛЯ КОЛЕБАНИЙ*

© 2023 г. Игумнов Л.А., Метрикин В.С., Никифорова И.В.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

irina.nikiforova@itmm.unn.ru

Поступила в редакцию 07.02.2023

Исследуется динамика тела под действием кусочно-постоянной периодической силы с произвольной скважностью и неподвижным ограничителем колебаний. Математическая модель представляет собой сильно нелинейную неавтономную динамическую систему с усеченным фазовым пространством по одной из фазовых координат. С использованием процедур метода точечных отображений для сильно нелинейных (виброударных) динамических систем, разработанных учеными горьковской школы академика А.А. Андропова, получены уравнения для точечных отображений двумерной поверхности Пуанкаре в виде явных точных аналитических формул. Полученные соотношения для точечных отображений поверхности Пуанкаре позволили достаточно эффективно (впервые для исследуемой динамической системы) исследовать не только вопросы существования и устойчивости периодических режимов движения тела с конечным числом ударов последнего о неподвижную преграду, но и вопросы перестройки сколь угодно сложных периодических движений как с конечным, так и с бесконечным числом неподвижных точек в зависимости от изменения параметров динамической системы. Это дало возможность впервые представить в аналитическом виде уравнения, определяющие в пространстве параметров границы области существования и устойчивости периодических движений с бесконечным числом неподвижных точек на поверхности Пуанкаре (соответствует бесконечноударному режиму движения). Приведенные в статье результаты численных экспериментов с использованием программного продукта, разработанного на языке высокого уровня, обеспечили возможность привести бифуркационные диаграммы по параметрам исследуемой системы (скважность, перегрузка и коэффициент восстановления скорости при ударе), которые наглядно демонстрируют области значений параметров, при которых существуют хаотические режимы движения тела. Установлен сценарий возникновения хаоса. Переход движений тела при изменении параметра перегрузки от периодических режимов движения к хаосу осуществляется по сценарию удвоения периода. Сравнение численного анализа с аналитическими результатами показало хорошее их согласование для различных наборов параметров исследуемой системы.

Ключевые слова: виброударная система, сильная нелинейность, точечные отображения, поверхность Пуанкаре, бесконечноударный режим.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант №22-19-00138).

Введение

Разнообразие задач, в которых приходится исследовать динамические системы с разрывными нелинейностями, необычайно широко. Это системы с сухим трением, виброударные, релейные системы, системы с переменной структурой, многочисленные механические и радиотехнические системы с негладкими характеристиками отдельных элементов и т.д. [1–3]. Разработка теории и методики расчета таких устройств актуальна для многих областей современного машиностроения. В частности, подобные задачи возникают в связи с проектированием машин, применяемых в вибротехнике, при добыче и переработке минерального сырья, – дробилок, мельниц, вибрационных грохотов, виброударного отбойного инструмента, виброграммовок и т.п. [4–10]. Необходимость математического описания систем с ударными взаимодействиями появляется при расчете процесса ударного торможения систем.

Часто вопрос об определении напряженного состояния соударяющихся элементов системы является второстепенным, и на передний план выступает задача исследования движения с учетом наличия ударов. Именно в таких случаях допустимо описывать удар в рамках обычной стереомеханической теории [11, 12]. Другими словами, соударения полагаются мгновенными, соударяющиеся тела – абсолютно твердыми, а силы, возникающие в процессе взаимодействия, – мгновенными и бесконечно большими (типа дельта-функций). Связь между скоростями после u_+ и до u_- удара в стереомеханической теории задается с помощью гипотезы Ньютона

$$u_+ = -Ru_-, \quad 0 < R < 1. \quad (1)$$

Здесь R – коэффициент восстановления нормальной составляющей скорости при ударе, который зависит от материала соударяющихся тел, их масс, формы, температуры и т.д. Зависимость его от скорости сближения тел обычно незначительна и ею можно пренебречь. Соотношение (1) вместе с уравнением сохранения количества движения системы при ударе позволяет однозначно определить ее динамическое состояние после удара.

В рамках использования ньютоновской концепции удара наблюдается процесс повторных учащающихся до бесконечности соударений [13], который в конечное время завершается появлением длительного контакта между взаимодействующими телами. Такие бесконечноударные процессы конечной продолжительности называют квазипластическим ударом. Конечно, в действительности не может быть бесконечного числа ударов, как не может быть, например, мгновенного удара. Однако нетрудно поставить эксперимент, в котором количество повторных соударений будет весьма велико, а последовательность интервалов между этими ударами (разумеется, конечная) будет напоминать бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Во всяком случае существуют движения механизмов и машин ударного типа с присутствующими квазипластическому удару несколькими повторными микросоударениями.

В системах с ударом представляет интерес исследование конечноударных и бесконечноударных периодических режимов движения [14], изучение условий существования которых проводится, как правило, в предположении гармонического характера внешней силы [14–17]. При этом разбиение пространства параметров на области существования бесконечноударных периодических движений различной кратности обычно проводится с помощью приближенного исследования. В настоящем исследовании для случая, когда внешняя сила представляет собой периоди-

ческую кусочно-постоянную форму, уравнения границ существования как конечно-ударных, так и бесконечноударных периодических режимов удалось представить с помощью достаточно простых аналитических формул. Это позволило сравнительно просто оценить влияние формы импульсной внешней силы на величину и взаимное расположение областей существования устойчивых периодических режимов движения тела с периодом произвольной кратности в пространстве основных параметров задачи.

1. Постановка задачи

Уравнения движения тела, ударяющегося о неподвижную плоскость в однородном поле силы тяжести, могут быть записаны в виде [18]:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \omega f(t) - 1, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ y_+ = -Ry_-. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени t ; y_- и y_+ – доударная и послеударная скорости движения тела соответственно; R – коэффициент восстановления скорости при ударе; ω – параметр перегрузки, а импульсная сила на периоде $[0, 2)$ своего определения задается соотношением

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \gamma, \\ -\gamma(2-\gamma)^{-1}, & \gamma < t < 2, \end{cases}$$

и имеет нулевую среднюю составляющую (рис. 1); γ – параметр скажности внешней силы.

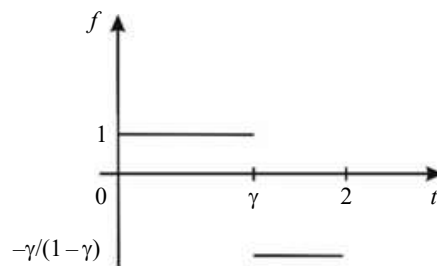


Рис. 1. Импульсная периодическая внешняя сила с периодом 2

Фазовое пространство $\Phi(x, y, t)$ системы (2), (3) трехмерно в координатах x, y, t , цилиндрично по t и усечено по x (на рис. 2 представлен вид фазовых траекторий в сечениях фазового пространства $\Phi(x, y = \text{const}, t)$).

Из рис. 2 и уравнений движения тела следует, что исследование динамической системы (2), (3) можно провести с помощью математического аппарата метода точечных отображений поверхностей Пуанкаре. Если известно точечное отображение T_{j_1} точек $M_0(x_0, y_0)$ плоскости $t = 0$ в точку $M_1(x_1, y_1)$ плоскости $t = \gamma$, а также отображение точки $M_1(x_1, y_1)$ в точку $M_2(x_2, y_2)$ плоскости $t = 2$, то исследование динамики системы (2), (3) может быть проведено с помощью изучения поведения

точек точечного преобразования $T = T_{j_1} T_{j_2}$ (j_1 и j_2 – количество ударов частицы о плоскость в интервалах $0 \leq t < \gamma$ и $0 < t < 2$) на поверхностях Пуанкаре.

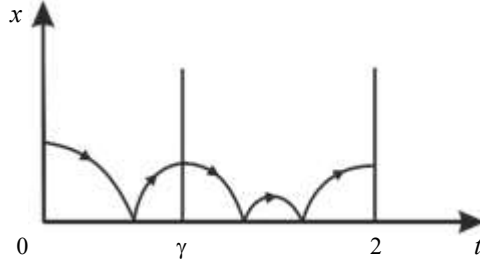


Рис. 2. Вид фазовых траекторий

2. Методы решения

Используя постоянство правых частей (2) в каждом из указанных интервалов, нетрудно получить уравнения точечных преобразований в виде:

– T_{j_1} при $j_1 = 0$

$$y_1 = y_0 + (\omega - 1)\gamma, \quad x_1 = x_0 + \gamma y_0 + (\omega - 1)\frac{\gamma^2}{2}, \quad x_1 \geq 0; \quad (4)$$

– T_{j_1} при $j_1 = 1$

$$y_1 = R\eta_0 + (\omega - 1)(\gamma - \tau), \quad \eta_0 = [y_0^2 - 2(\omega - 1)x_0]^{1/2},$$

$$x_1 = \frac{R\eta_0 + (\omega - 1)(\gamma - \tau)}{2}(\gamma - \tau), \quad x_1 \geq 0, \quad (5)$$

$$\tau = \frac{y_0 + \eta_0}{1 - \omega}, \quad 0 \leq \tau \leq \gamma;$$

– T_{j_2} при $j_2 = 0$

$$x_2 = x_1 + y_1(2 - \gamma) - \frac{[\gamma(\omega - 1) + 2](2 - \gamma)}{2},$$

$$y_2 = y_1 - \gamma(\omega - 1) - 2, \quad x_2 \geq 0; \quad (6)$$

– T_{j_2} при $j_2 = m \geq 1$

$$y_2 = R^m \eta_1 - (2 - \gamma - \tau_m) \left[\frac{\gamma \omega}{2 - \gamma} + 1 \right],$$

$$x_2 = \left(R^m \eta_1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma \omega}{2 - \gamma} + 1 \right] (2 - \gamma - \tau_m) \right) (2 - \gamma - \tau_m),$$

$$\tau_m = \frac{2 - \gamma}{\gamma(\omega - 1) + 2} \left(y_1 + \frac{\eta_1}{1 - R} \right) (1 + R - 2R^m),$$

$$\eta_1 = \left[y_1^2 + 2 \left(\frac{\gamma \omega}{2 - \gamma} + 1 \right) x_1 \right]^{1/2}, \quad 0 \leq \tau_m \leq 2 - \gamma, \quad x_2 \geq 0. \quad (7)$$

Соотношения (4)–(7) справедливы при $\omega > 1$. Для простейших конечноударных и бесконечноударных движений частицы с периодом, n -кратным периоду внешней

силы ($n = 1, 2, \dots$), характерен безударный пролет в течение $(n - 1)$ -го периода и ударный процесс ее взаимодействия с плоскостью в n -м периоде внешней силы. Используя соотношения (4) и (5), нетрудно убедиться, что координаты $x_{2, n-1}, y_{2, n-1}$ точки $M_{2, n-1} = T^{n-1}M_0$ задаются формулами

$$y_{2, n-1} = y_0 - 2(n-1); \quad x_{2, n-1} = x_0 + 2(n-1)y_0 + (n-1)(\gamma\omega - 2(n-1)). \quad (8)$$

Неподвижные точки $M^*(x^*, y^*)$ точечного преобразования T , соответствующие одноударным периодическим движениям с периодом, n -кратным периоду внешней силы, могут быть найдены, как известно [19], из условий $M^* = T^n M^*$.

Если удар частицы о плоскость происходит в первом полуинтервале n -го периода внешней силы, то соответствующая система уравнений, определяющая координаты $x_0^*, y_0^*, y_{2, n-1}^*, \eta^* = [(y_{2, n-1}^*)^2 - 2(\omega - 1)x_{2, n-1}^*]^{1/2}$, с учетом (5), (6), (8) имеет вид:

$$\begin{aligned} y_{2, n-1}^* &= y_0^* - \gamma(\omega - 1) - 2n; \quad y_0^* = (1 + R)\eta^* + y_{2, n-1}^* + (\omega - 1)\gamma, \\ \frac{(y_{2, n-1}^*)^2 - (\eta^*)^2}{2(\omega - 1)} &= x_0^* + (2n - \gamma)y_0^* - \gamma\left(n - \frac{\gamma}{2}\right)\omega - \frac{(2n - \gamma)^2}{2}, \\ x_0^* &= \frac{((2R + 1)\eta^* + y_{2, n-1}^* + (\omega - 1)\gamma)(\eta^* + y_{2, n-1}^* + (\omega - 1)\gamma)}{2(\omega - 1)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Из уравнений (9) получаем

$$\eta^* = \frac{2n}{1 + R}; \quad y_{2, n-1}^* = -\frac{1}{2}(\gamma(\omega - 1) + 2n) - \frac{n(1 - R)}{\omega(1 + R)}. \quad (10)$$

С учетом (10) характеристический полином, от величины корней которого зависит устойчивость рассматриваемого периодического режима, получается с помощью линеаризации формул (5), (6), (8) точечного отображения в окрестности неподвижной точки [20, 21] и соответствующее ему характеристическое уравнение принимают вид

$$P(z) = z^2 - (1 + R^2 - (1 + R)^2\omega)z + R^2 = 0. \quad (11)$$

Область существования и устойчивости одноударного периодического режима определяется неравенствами $\tau = (y_{2, n-1}^* + \eta^*)/(1 - \omega) \geq 0, P(-1) \geq 0$ или, соответственно,

$$\omega \geq \omega_0 = \frac{2n\gamma(1 - R)}{1 + R}, \quad (12)$$

$$\omega \leq \omega_- = 2 \frac{1 + R^2}{(1 + R)^2}. \quad (13)$$

Вид областей существования и устойчивости приведен на рис. 3. Области устойчивости одноударных периодических режимов движения тела находятся между двумя заштрихованными границами. Поведение левой границы устойчивости существенно зависит от величины n . С увеличением n , как видно из рис. 3, области устойчивости уменьшаются в размерах. Правая граница области устойчивости не зависит от n и является общей для всех областей устойчивости. Закрашенные области являются областями существования бесконечноударных режимов. Цифры указывают на структуру периодического режима: n – кратность периодического режима, а ∞ – бесконечный режим движения тела.

Следует отметить, что одноударные (в том числе и m -ударные) n -кратные периодические движения с ударами только во втором полуинтервале n -го периода внешней силы неустойчивы при любых значениях параметров. Соответствующий характеристический полином имеет вид:

$$P_1(z) = z^2 - \left(\frac{\gamma}{2-\gamma} \left(\frac{1+R-2R^m}{1-R} + R^m \right) \omega + 1 + R^{2m} \right) z + R^{2m}. \quad (14)$$

В этом случае $P_1(+1) < 0$ и рассматриваемый n -кратный периодический режим действительно неустойчив.

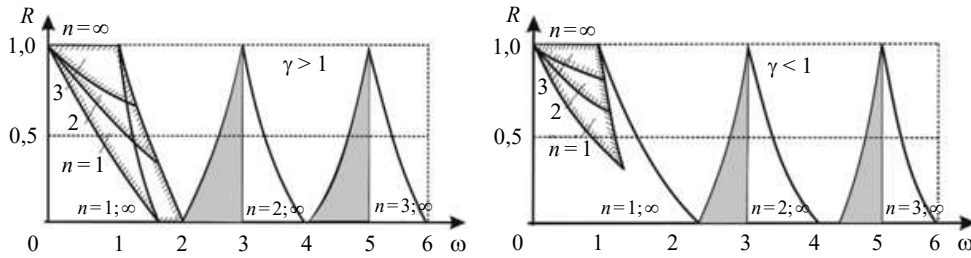


Рис. 3. Области существования и устойчивости

Таким образом, уравнения границ областей существования и устойчивости одноударных n -кратных периодических движений в пространстве параметров задачи, как и в случае гармонической внешней силы, определяются простыми аналитическими соотношениями.

Простейший бесконечноударный n -кратный периодический режим движения характеризуется безударным пролетом частицы над плоскостью в промежутке времени $(2(n-1) + \gamma)$ и бесконечноударным затухающим процессом в течение второго полуинтервала n -го периода внешней силы. В этом случае границам области существования режима соответствует либо развитие процесса ($\tau_{m=\infty} \geq 0$), либо его исчезновение ($\tau_{m=\infty} \leq 2 - \gamma$).

Полагая в (8) $y_0 = x_0 = 0$ и в (7) $m = \infty$, $x_{2,n-1} = y_{2,n-1} = 0$, для указанных пограничных процессов получаем

$$\tau_{\infty} = \frac{2-\gamma}{\gamma(\omega-1)+2} \left(y_1 + \frac{1+R}{1-R} \left(y_1^2 + 2 \left(\frac{\gamma\omega}{2-\gamma} + 1 \right) x_1 \right)^{1/2} \right). \quad (15)$$

Здесь

$$y_1 = \gamma(\omega-1) - 2(n-1); \quad x_1 = \frac{(2(n-1) + \gamma)(\gamma(\omega-1) - 2(n-1))}{2}. \quad (16)$$

С учетом выражений (15), (16) условие $\tau_{\infty} \geq 0$ принимает вид

$$\omega \geq \omega_1 = 1 + \frac{2(n-1)}{\gamma}, \quad (17)$$

а условие $\tau_{\infty} \leq 2 - \gamma$ будет записано в виде

$$\omega \leq \omega_2 = \frac{1}{2\gamma} \left(2n - 2 + \gamma + \left((2n - 2 + \gamma)^2 + 8n(2 - \gamma) \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2 \right)^{1/2} \right). \quad (18)$$

Неравенства (17), (18) позволяют достаточно просто оценить влияние параметра на размер и форму области существования режима. Нетрудно проверить, что при любых допустимых значениях γ величина $\Delta(R, \gamma) = \omega_2 - \omega_1 \geq 0$, причем $\Delta(R=1, \gamma) = \Delta(R, \gamma=2) = 0$, а при $n \rightarrow \infty$

$$\Delta \rightarrow \Delta_\infty = \frac{(2-\gamma)(1-R)^2}{(1+R)^2\gamma}. \quad (19)$$

Поскольку $\partial\omega/\partial\gamma < 0$ при $n \geq 2$ и $\partial\omega_2/\partial\gamma < 0$ при $n = 1, 2, \dots$, то с увеличением γ области существования n -кратного бесконечноударного периодического режима на плоскости (ω, R) смещаются в сторону меньших значений ω , за исключением неподвижной границы $\omega = 1$, и уменьшаются в размере. При $\gamma \rightarrow 0$ для любых значений R и конечных $\omega \geq 1$ из рассматриваемых простейших бесконечноударных периодических режимов существует только однократный режим. При $\gamma \rightarrow 2$ (в отличие от одноударных n -кратных периодических движений) области существования бесконечноударного режима исчезают за счет слияния границ ω_1, ω_2 с соответствующими отрезками $\omega = n, 0 \leq R \leq 1$ ($n = 1, 2, \dots$).

Из формул (17), (18) при $\gamma \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty$ и $\omega\gamma = C = \text{const}$ получаем асимптотическое представление границ ω_1, ω_2 в виде

$$C_1 = 2(n-1), \quad C_2 = (n-1) + \left((n-1)^2 + \frac{4n(1-R)^2}{(1+R)^2} \right)^{1/2}. \quad (20)$$

На плоскости (C, R) в этом случае имеем счетное количество последовательно расположенных областей существования бесконечноударного периодического режима, соответствующих различной кратности движения. Точки $C = n, R = 0$ для соседних областей являются общими (рис. 4).

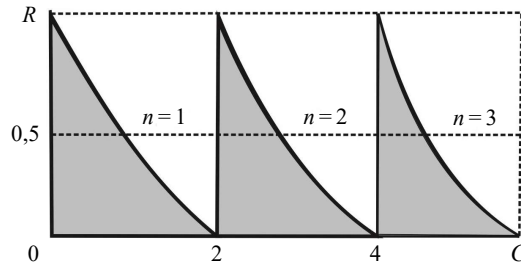


Рис. 4. Области существования бесконечноударных периодических режимов движения

Бесконечноударное n -кратное периодическое движение частицы с безударным пролетом в течение $(n-1)$ -го периода внешней силы, одним ударом в интервале $2(n-1) \leq t \leq 2(n-1) + \gamma$ и бесконечноударным затухающим процессом в промежутке времени $2(n-1) + \gamma \leq t \leq 2n$, согласно (5), (7) и (8), существует, если выполняются неравенства:

$$0 \leq \tau' \leq \gamma, \quad 0 \leq \tau' \leq 2 - \gamma, \quad (21)$$

$$\tau' = \frac{y_{2,n-1} + (y_{2,n-1}^2 - 2(\omega-1)x_{2,n-1})^{1/2}}{1-\omega}, \quad (22)$$

$$\tau'_\infty = \frac{2-\gamma}{\gamma(\omega-1)+2} \left(y_1 + \frac{1+R}{1-R} \left(y_1^2 + 2 \left(\frac{\gamma\omega}{2-\gamma} + 1 \right) x_1 \right)^{1/2} \right). \quad (23)$$

Координаты $x_{2,n-1}, y_{2,n-1}$ и x_1, y_1 в этом случае удовлетворяют системе

$$y_{2,n-1} = -2(n-1), \quad x_{2,n-1} = (n-1)(\gamma\omega - 2(n-1)), \quad (24)$$

$$y_1 = R(y_{2,n-1}^2 - 2(\omega-1)x_{2,n-1})^{1/2} + (\omega-1)(\gamma - \tau'), \quad (25)$$

$$x_1 = \left(R(y_{2,n-1}^2 - 2(\omega-1)x_{2,n-1})^{1/2} + \frac{(\omega-1)(\gamma - \tau')}{2} \right) (\gamma - \tau').$$

Подставляя соотношения (24), (25) в (22) и (23), нетрудно убедиться, что неравенства (21) принимают вид:

$$\frac{2(n-1)}{\gamma} \leq \omega \leq \omega_1, \quad (26)$$

$$\omega_3 \leq \omega \leq \omega_1, \quad (27)$$

где ω_1 определяется соотношением (16), а ω_3 при $\gamma, R = \text{const}$ является максимальным, меньшим значения ω_1 , корнем уравнения

$$H_1(\omega) = H_2(\omega), \quad (28)$$

в котором

$$H_1(\omega) = (2-\gamma)(\omega-1) \left(\frac{1-R}{1+R} \right)^2 \left(2n - (1+R)\sqrt{2\omega(n-1)(2(n-1) - \gamma(\omega-1))} \right)^2, \quad (29)$$

$$H_2(\omega) = 2\omega(2(n-1) - \gamma(\omega-1)) \times \\ \times \left(((1+R)\sqrt{2(n-1)\omega} - \sqrt{2(n-1) - \gamma(\omega-1)})^2 - R^2(n-1)(2 + \gamma(\omega+1)) \right). \quad (30)$$

Следует отметить, что

$$H_2(\omega = \omega_1) < H_1(\omega = \omega_1), \quad (31)$$

а при $\omega = 2(n-1)/\gamma$ $H_2 > H_1$. Поэтому величина $\omega_3 > 2(n-1)/\gamma$ и область существования рассматриваемого бесконечноударного периодического движения определяется неравенством (27).

Из (17) и (26) следует, что $\omega_2(n-1) < \omega_3(n)$, в том числе и при $R = 0$. Это означает, что области существования бесконечноударных периодических движений на плоскости (ω, R) не пересекаются.

Исследуем свойства границы $\omega = \omega_3$. Из (28) следует, что при $R = 1$ $\omega_3 = \omega_1$ и $\partial\omega_3/\partial R = 0$, то есть на плоскости (ω, R) граница $\omega = \omega_3$ проходит через точку $(\omega_1, 1)$, имея вертикальную касательную.

В частном случае при $\gamma \rightarrow 0, \omega \rightarrow \infty, \gamma\omega = C = \text{const}$, согласно (27)–(30), $\omega_3 \rightarrow \omega_1$. Следовательно, область существования рассматриваемого бесконечноударного режима стягивается к нулю.

При $R = 0$ разбиение плоскости параметров (ω, R) на области существования одноударных периодических режимов движения как с мгновенными, так и с длительными остановками [22, 23] можно произвести, используя полученные ранее соотношения и методику построения формул точечного преобразования T за период внешней силы.

Так, области существования и устойчивости однократного одноударного периодического движения, согласно (11), (12), определяются неравенством

$$\frac{2}{\gamma} \leq \omega \leq 2(\gamma \leq 2), \quad (32)$$

а областей существования одноударных периодических движений большей кратности не существует.

Область существования одноударного периодического движения с длительной остановкой, согласно (16), (17), определяется неравенством

$$1 \leq \omega \leq \frac{2}{\gamma}. \quad (33)$$

Непосредственно из условий (32) и (33) следует, что на плоскости (ω, γ) левая граница области существования одноударного движения является частью правой границы области существования однократного периодического движения (рис. 5). На рисунке незаштрихованные части плоскости – одноударные режимы движения тела, заштрихованные части – n -кратные бесконечноударные режимы.

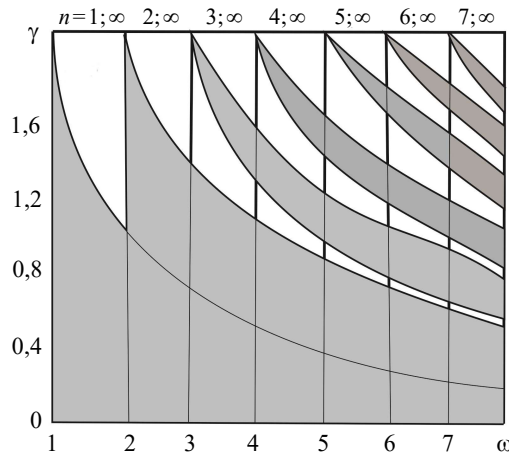


Рис. 5. Области существования периодических режимов движения тела

Уравнения границ, при переходе через которые однократный режим с мгновенной остановкой и однократный режим с длительной остановкой переходит в режим с длительной остановкой и дополнительным мгновенным ударом, задаются соответственно соотношениями

$$\omega = 2, \quad 1 \leq \gamma \leq 2, \quad (34)$$

$$\omega = \frac{2}{\gamma}, \quad 0 < \gamma \leq 1. \quad (35)$$

При увеличении параметра ω указанный двукратный периодический режим непрерывно переходит в простейший двукратный режим. Граница исчезновения последнего, согласно (17), определяется как

$$\omega = \frac{4}{\gamma}. \quad (36)$$

Области существования простейших и с дополнительным мгновенным ударом периодических движений с кратностью $n \geq 3$, согласно (16), (17) и (31), задаются неравенствами

$$\gamma^* \leq \gamma \leq \frac{2\pi}{\omega}, \quad \omega \geq n. \quad (37)$$

Здесь

$$\gamma^* = \frac{2(n-1)}{\omega-1} + \frac{2(n-\omega)}{(n-2)^2(\omega-1)\omega} \times \\ \times (2\omega(n-1) - n^2 - 2((n-1)(\omega-n)(\omega(n-1)-n))^{1/2}). \quad (38)$$

Из анализа соотношения (37) следует, что области существования указанных периодических режимов на плоскости (ω, γ) не пересекаются и при $\gamma = \text{const}$ движения с большей кратностью могут быть реализованы только при больших значениях ω .

3. Численное исследование динамики частицы

Ниже приведены бифуркационные диаграммы по параметру перегрузки ω при различных значениях коэффициента восстановления скорости при ударе R и параметра скважности γ . На рис. 6–8 по оси абсцисс отложены значения параметра перегрузки ω , а по оси ординат x_i – значения координат частицы на поверхностях Пуанкаре в моменты $\tau = \gamma$ и $\tau = 2$ при построении точечного отображения поверхностей Пуанкаре в себя.

Так, на рис. 6а,б приведены бифуркационные диаграммы для значений параметров $\gamma = 0,7$, $R = 0,5$. При $1 \leq \omega \leq 1,416$ наблюдается режим с безударным пролетом частицы над плоскостью в промежутке времени $(2(n-1) + \gamma)$ и бесконечноударным затухающим процессом в течение второго полуинтервала n -го периода внешней силы. При $1,417 \leq \omega \leq 2,304$, $2,311 \leq \omega \leq 3,381$, $4,276 \leq \omega \leq 6$ наблюдается хаотический режим; при $2,305 \leq \omega \leq 2,31$, $2,382 \leq \omega \leq 4,275$ – периодические режимы с конечным числом ударов.

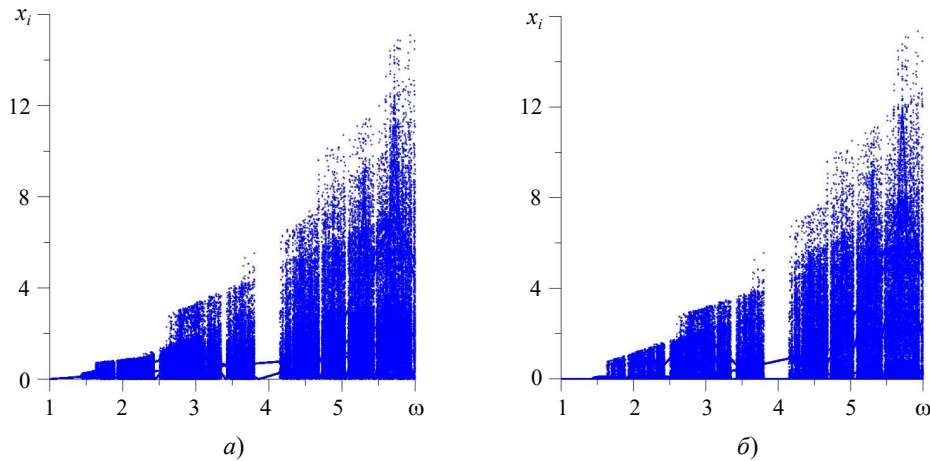


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы по параметру ω на поверхности Пуанкаре при $\tau = \gamma$ (а) и $\tau = 2$ (б)

На рис. 7а,б представлены бифуркационные диаграммы при $\gamma = 0,7$, $R = 0,2$, а на рис. 8а,б – при $\gamma = 1,2$, $R = 0,5$. Из рис. 7 следует, что с уменьшением коэффициента восстановления скорости R области существования хаотических режимов уменьшаются, а периодических режимов увеличиваются. Из рис. 8 видно, что с увеличением параметра скважности области существования периодических движений по параметру скважности с конечным числом ударов уменьшаются, а их место занимают движения хаотического типа.

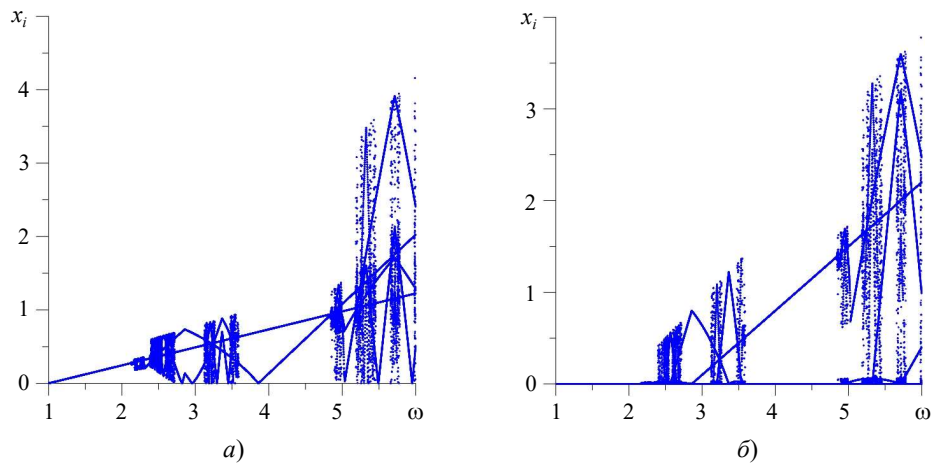


Рис.7. Бифуркационные диаграммы по параметру ω на поверхности Пуанкаре при $\tau = \gamma$ (a) и $\tau = 2$ (б)

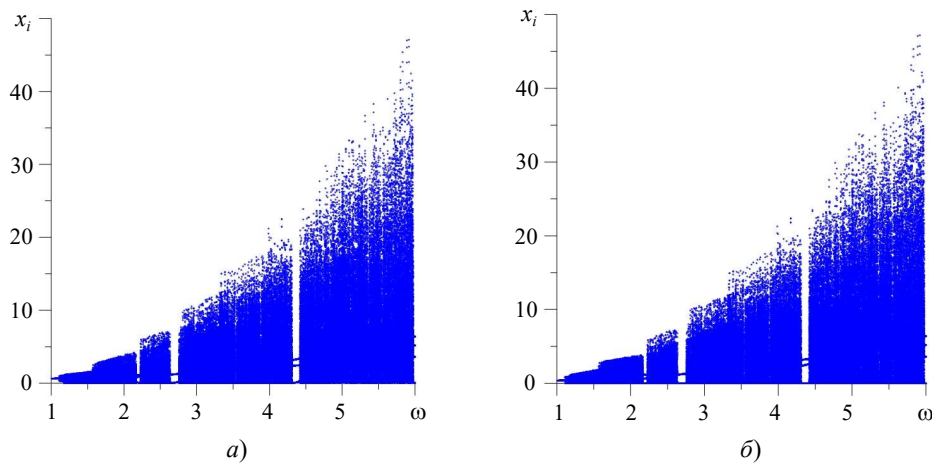


Рис. 8. Бифуркационные диаграммы по параметру ω на поверхности Пуанкаре при $\tau = \gamma$ (a) и $\tau = 2$ (б)

Заключение

Приведены уравнения для точечных отображений поверхностей Пуанкаре в задаче о движении тела под действием кусочно-постоянной периодической силы с произвольной скважностью.

Впервые получены аналитические уравнения границ для областей устойчивости периодических движений с конечным и бесконечным числом ударов частицы об ограничитель колебаний.

Приведены области существования и устойчивости различных типов периодических режимов в пространстве параметров, позволивших оценить влияние последних на характер и структуру режимов движения.

Представленные бифуркационные диаграммы иллюстрируют сценарий рождения хаотических движений, а бифуркационные значения параметров – рождение движений с конечным и бесконечным числом ударов частицы.

Список литературы

1. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaja E., Yu H. Modelling of a vibro-impact capsule system. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 66. P. 2–11. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.09.012>.
2. Liu Y., Pavlovskaja E., Hendry D., Wiercigroch M. Vibro-impact responses of capsule system with various friction models. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 72. P. 39–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.009>.
3. Liao M., Zhang J., Liu Y., Zhu D. Speed optimisation and reliability analysis of a self-propelled capsule robot moving in an uncertain frictional environment. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2022. Vol. 221. Article No 107156. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107156>.
4. Асташев В.К., Крупенин В.Л. Динамические принципы разработки виброударных машин. *Вестник научно-технического развития*. 2018. №5(129). С. 3–10. DOI: 10.18411/vntr2018-129-1.
5. Babitsky V.I. *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 1998. 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69635-3>.
6. Babitsky V.I., Krupenin V.L. *Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems*. Berlin: Springer-Verlag, 2001. 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-44488-6>.
7. Ibrahim R.A. *Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications*. Berlin: Springer-Verlag, 2009. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00275-5>.
8. Wang B., Wang L., Peng J., Yue X., Xu W. A new technique for the global property of the vibro-impact system at the impact instant. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2022. Vol. 140. Article No 103914. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103914>.
9. Метрикин В.С., Стародубовская Н.С. Фрикционные автоколебания в вибрационной системе с учетом трения наследственного типа. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №2. С. 147–155. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-2-147-155>.
10. Баничук Н.В., Отгонбаяр С. О движении осесимметричного ударника в средах с линейно изменяющимися прочностными характеристиками. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №4. С. 484–491. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-4-484-491>.
11. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. *Курс теоретической механики*. В 2 т. Т.2. *Динамика*. М.: Наука, 1985. 496 с.
12. Пановко Я.Г. *Введение в теорию механического удара*. М.: Наука, 1977. 224 с.
13. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. *Виброударные системы (Динамика и устойчивость)*. М.: Наука, 1973. 591 с.
14. Ксендзов А.А., Нагаев Р.Ф. Бесконечноударные периодические режимы в задаче вибротранспортировки с подбрасыванием. *Механика твердого тела*. 1971. № 5. С. 29–35.
15. Нагаев Р.Ф. Общая задача о квазипластическом ударе. *Механика твердого тела*. 1971. №3. С. 94–103.
16. Федосеев Ю.С., Фейгин М.И. К теории скользящего режима в динамических системах с соударениями. *Прикладная математика и механика*. 1972. Т. 36. Вып. 5. С. 840–850.
17. Фейгин М.И. Скользящий режим в динамических системах с ударными взаимодействиями. *Прикладная математика и механика*. 1967. Т. 31. Вып. 3. С. 533–536.
18. Nikiforova I.V., Metrikin V.S., Igumnov L.A. Numerical and analytical investigation of the dynamics of a body under the action of a periodic piecewise constant external force. *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies: 22nd International Conference, MMST 2022*. 14–17 Nov. 2022. Nizhny Novgorod, Russia. P. 67–81. https://doi.org/10.1007/978-3-031-24145-1_6.
19. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. М.: ЛИБРОКОМ, 2010. 472 с.
20. Фейгин М.И. *Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями*. М.: Наука, 1994. 285 с.
21. Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V. The dynamics of eccentric vibration mechanism (Part 1). *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19. Iss. 7. P. 4854–4865. <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18346>.
22. Leine R.I., Heimsch T.F. Global uniform asymptotic attractive stability of the non-

autonomous bouncing ball system. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2012. Vol. 241. Iss. 22. P. 2029–2041. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.04.013>.

23. Nikiforova I.V., Igumnov L.A., Metrikin V.S. Mathematical modeling of multidimensional strongly nonlinear dynamic systems. *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies: 20th International Conference, MMST 2020*. 23–27 Nov. 2020. Nizhny Novgorod, Russia. P. 63–76. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78759-2_5.

References

1. Liu Y., Wiercigroch M., Pavlovskaya E., Yu H. Modelling of a vibro-impact capsule system. *Int. J. Mech. Sci.* 2013. Vol. 66. P. 2–11. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2012.09.012>.
2. Liu Y., Pavlovskaya E., Hendry D., Wiercigroch M. Vibro-impact responses of capsule system with various friction models. *Int. J. Mech. Sci.* 2013. Vol. 72. P. 39–54. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.03.009>.
3. Liao M., Zhang J., Liu Y., Zhu D. Speed optimisation and reliability analysis of a self-propelled capsule robot moving in an uncertain frictional environment. *Int. J. Mech. Sci.* 2022. Vol. 221. Article No 107156. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107156>.
4. Astashev V.K., Krupenin V.L. Dinamicheskie printsipy razrabotki vibroudarnykh mashin [Dynamic principles of development of vibro-impact machines]. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitiya [Vestnik Nauchno-Tekhnicheskogo Razvitiya]*. 2018. No 5(129). P. 3–10 (in Russian).
5. Babitsky V.I. *Theory of Vibro-Impact Systems and Applications*. Berlin. Springer-Verlag. 1998. 318 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69635-3>.
6. Babitsky V.I., Krupenin V.L. *Vibration of Strongly Nonlinear Discontinuous Systems*. Berlin. Springer-Verlag. 2001. 404 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-44488-6>.
7. Ibrahim R.A. *Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications*. Berlin. Springer-Verlag. 2009. 312 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-00275-5>.
8. Wang B., Wang L., Peng J., Yue X., Xu W. A new technique for the global property of the vibro-impact system at the impact instant. *Int. J. Non Linear Mech.* 2022. Vol. 140. Article No 103914. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2022.103914>.
9. Metrikin V.S., Starodubrovskaya N.S. Friksionnye avtokolebaniya v vibratsionnoy sisteme s uchetom treniya nasledstvennogo tipa [Frictional self-oscillations in an oscillatory system accounting for hereditary-type friction forces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 2. P. 147–155 (In Russian).
10. Banichuk N.V., Otgonbayar S. O dvizhenii osesimmetrichnogo udarnika v sredakh s lineynoy izmenyayushchimisya prochnostnymi kharakteristikami [On axisymmetric impactor moving in media with linearly changed strength characteristics]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 4. P. 484–491 (In Russian).
11. Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. V 2 t. T. 2. Dinamika [Theoretical Mechanics Course. In 2 vols. Vol. 2. Dynamics]*. Moscow. Nauka Publ. 1985. 496 p. (In Russian).
12. Panovko Ya.G. *Vvedenie v teoriyu mekhanicheskogo udara [Introduction to the Theory of Mechanical Shock]*. Moscow. Nauka Publ. 1977. 224 p. (In Russian).
13. Kobrinskiy A.E., Kobrinskiy A.A. *Vibroudarnye sistemy (Dinamika i ustoychivost) [Vibro-Impact Systems (Dynamics and Stability)]*. Moscow. Nauka Publ. 1973. 591 p. (In Russian).
14. Ksendzov A.A., Nagaev R.F. Beskonechnoudarnye periodicheskie rezhimy v zadache vibrotransportirovki s podbrasyvaniem [Infinite-impact periodic modes in the problem of vibration conveying with tossing]. *Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1971. No 5. P. 29–35 (In Russian).
15. Nagaev R.F. Obshchaya zadacha o kvaziplasticheskom udare [General problem of quasi-plastic impact]. *Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1971. No 3. P. 94–103 (In Russian).
16. Fedoseenko Yu.S., Feygin M.I. K teorii skolzyashchego rezhima v dinamicheskikh sistemakh s soudareniyami [On the theory of sliding mode in dynamical systems with collisions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Appl. Math. Mech.]*. 1972. Vol. 36. Iss. 5. P. 840–850 (In Russian).
17. Feygin M.I. Skolzyashchiy rezhim v dinamicheskikh sistemakh s udarnymi vzaimodeystviyami [Sliding mode in dynamical systems with impact interactions]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Appl. Math. Mech.]*. 1967. Vol. 31. Iss. 3. P. 533–536 (In Russian).

18. Nikiforova I.V., Metrikin V.S., Igumnov L.A. Numerical and analytical investigation of the dynamics of a body under the action of a periodic piecewise constant external force. *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies: 22nd International Conference, MMST 2022*. 14–17 Nov. 2022. Nizhny Novgorod, Russia. P. 67–81. https://doi.org/10.1007/978-3-031-24145-1_6.

19. Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy* [Method of Point Mappings in the Theory of Nonlinear Oscillations]. Moscow. LIBROKOM Publ. 2010. 472 p. (In Russian).

20. Feygin M.I. *Vynuzhdennyye kolebaniya sistem s razryvnymi nelineynostyami* [Forced Vibrations of Systems with Discontinuous Nonlinearities]. Moscow. Nauka Publ. 1994. 285 p. (In Russian).

21. Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V. The dynamics of eccentric vibration mechanism (Part 1). *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19. Iss. 7. P. 4854–4865. <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18346>.

22. Leine R.I., Heimsch T.F. Global uniform asymptotic attractive stability of the non-autonomous bouncing ball system. *Physica D*. 2012. Vol. 241. Iss. 22. P. 2029–2041. <https://doi.org/10.1016/j.physd.2011.04.013>

23. Nikiforova I.V., Igumnov L.A., Metrikin V.S. Mathematical modeling of multidimensional strongly nonlinear dynamic systems. *Mathematical Modeling and Supercomputer Technologies: 20th International Conference, MMST 2020*. 23–27 Nov. 2020. Nizhny Novgorod, Russia. P. 63–76. https://doi.org/10.1007/978-3-030-78759-2_5.

DYNAMICS OF A BODY UNDER THE IMPULSE FORCE AND WITH OSCILLATION LIMITER*

Igumnov L.A., Metrikin V.S., Nikiforova I.V.

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation

irina.nikiforova@itmm.unn.ru

Received by the Editor 2023/02/07

The paper investigates the dynamics of a body under a piecewise constant periodic force with an arbitrary duty cycle and in the presence of an oscillation limiter. The mathematical model is a strongly nonlinear non-autonomous dynamical system with a truncated phase space along one of the phase coordinates. Using the point mapping method for strongly nonlinear (vibro-impact) dynamical systems, equations for two-dimensional Poincaré map are obtained in the form of explicit analytical formulas. The relations obtained for Poincaré map made it possible to effectively study the rearrangements of arbitrarily complex periodic motions with both a finite and an infinite number of fixed points, depending on the change in the parameters of the dynamical system. This allowed us to represent for the first time an analytical form of the equations that define in the parameter space the boundaries of the existence and stability domain of periodic motions with an infinite number of fixed points on the Poincaré surface (corresponds to the infinitely impact mode of motion). The numerical experiments presented in the paper using a software product developed in the C++ language made it possible to present bifurcation diagrams that clearly demonstrate the ranges of parameter values with chaotic motion modes of the body. A scenario for the emergence of chaos has been established. The transition of body motions with a change in the overload parameter from periodic motion modes to chaos is carried out according to the period doubling. Comparison of numerical analysis with analytical results for different sets of parameters of the system under study (overload parameter) showed their good agreement.

Keywords: vibro-impact system, strong non-linearity, pointmapping, Poincaré surface, infinite-impact mode.

* Completed with financial support by Russian Science Foundation (grant No 22-19-00138).