

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-85-2-224-242

## **МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ БЕТОНА KARAGOZIAN & CASE В ПАКЕТЕ ПРОГРАММ «ЛОГОС»**

© 2023 г.

**Абакумов А.И., Сафронов И.И.,  
Смирнов А.С., Дьянов Д.Ю., Медведкина М.В.**

*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский  
научно-исследовательский институт экспериментальной физики,  
Саров, Российская Федерация*

abakumov@vniief.ru

*Поступила в редакцию 20.02.2023*

Рассматривается локальная модель бетона на основе подхода Karagozian & Case, который успешно применяется для расчетного описания поведения бетонных и железобетонных конструкций при динамических воздействиях. Представлен модифицированный вариант модели Karagozian & Case, обусловленный стремлением расширить функциональные возможности модели и изложить детали ее компьютерной реализации, о которых в опубликованных источниках имеются лишь скудные сведения. Приведены основные соотношения модели: уравнение состояния среды с уплотнением; предельные поверхности начальной текучести, максимальной и остаточной прочности, зависящие от давления; зависимость предельных поверхностей от третьего инварианта в виде Вильяма – Вонки; эволюция поврежденности бетона; частично ассоциированное пластическое течение для учета дилатансии; упрощенная регуляризация модели на стадии разупрочнения среды; изотропное армирование, зависимость скорости деформирования с использованием коэффициента упрочнения бетона; автогенерация параметров модели. Помимо этого, введены следующие опции: описание деградации упругой жесткости бетона для моделирования циклического нагружения; учет зависимости поведения бетона от скорости деформирования по механизму вязкопластического течения; регуляризация модели по заданной энергии разрушения бетона.

Представленная модифицированная модель бетона Karagozian & Case реализована в явном динамическом модуле пакета параллельных программ «Логос» для суперЭВМ. Описаны исходные данные и схема алгоритма модели. Реализация модели верифицирована на тестовых примерах моделирования поведения образцов бетона при квазистатическом нагружении вплоть до разрушения при одноосном и трехосном сжатии, одноосном и двухосном сжатии-растяжении, циклическом одноосном растяжении. Рассмотренные задачи показывают соответствие модели поведению бетона в экспериментах.

*Ключевые слова:* модель бетона Karagozian & Case, дилатансия и уплотнение бетона, неассоциированный закон пластического течения, предельные поверхности бетона, компьютерная реализация модели бетона, верификация алгоритма модели Karagozian & Case.

## Введение

Для оценки реакции железобетонных зданий и сооружений АЭС на аварийные динамические ударные и взрывные воздействия, как правило, применяются расчетные компьютерные программы, основанные на методе конечных элементов. В расчетной схеме таких задач ключевую роль играет модель бетона. В модуле решения динамических нелинейных быстропротекающих задач механики деформируемого твердого тела пакета программ (ПП) «Логос» [1] реализовано несколько моделей бетона: Джонсона – Холмквиста [2], RHT [3], Винфрида [4], модифицированная модель Karagozian & Case (K&C) [5–7]. В настоящей статье рассматривается модель на основе K&C, которая достаточно часто применяется для описания поведения бетонных и железобетонных конструкций при динамических воздействиях (см., например, [8–10]). Представлены основные соотношения модифицированной модели бетона K&C, приведена схема реализации модели в ПП «Логос», кратко описаны тестовые примеры моделирования поведения образцов бетона.

### 1. Основные соотношения модифицированной модели бетона K&C

**1.1. Уравнение состояния бетона.** В модели бетона K&C разделяются соотношения для описания девиаторной и шаровой составляющих тензоров напряжений  $\sigma_{ij}$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}$ :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} - p, \quad \varepsilon_{ij} = e_{ij} + \frac{\varepsilon_v}{3}. \quad (1)$$

Здесь  $s_{ij}$  – девиатор напряжения,  $p = \sigma_{ii}/3$  – давление,  $e_{ij}$  – девиатор деформации,  $\varepsilon_v = e_{ii}$  – объемная деформация (по повторяющемуся индексу  $i$  идет суммирование).

Давление определяется объемной деформацией по уравнению состояния бетона. Уравнение состояния может быть однозначным или зависимым от истории нагружения, как в случае среды с уплотнением (при наличии пор в бетоне, рис.1), когда для вычисления давления используется заданная функция:

$$p = p_{\text{eos}}(\varepsilon_v^e, \varepsilon_v^c). \quad (2)$$

Здесь  $\varepsilon_v = \varepsilon_v^e + \varepsilon_v^c$ , где  $\varepsilon_v^e, \varepsilon_v^c$  – компоненты объемной деформации: соответственно обратимая упругая и необратимая, накопленная в результате уплотнения.

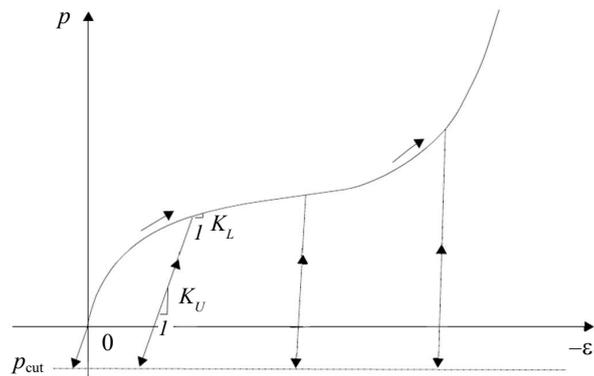


Рис. 1. Вид кривой уравнения состояния бетона с уплотнением

Наклон кривой  $p_{\text{eos}}$  есть модуль объемного сжатия при нагружении  $K_L = dp_{\text{eos}}/d\varepsilon_v$ . При повышении нагрузки и увеличении объемной деформации используется кри-

вая  $p_{\cos}$ . При разгрузке осуществляется плавный переход от кривой  $p_{\cos}$  к прямой с наклоном  $K_U$  по формуле [6]:

$$K' = K_U + (K_L - K_U) \exp(-5,55\varphi), \quad \varphi = \frac{-\Delta\varepsilon}{-\Delta\varepsilon + p/K_U}, \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon_v^c - \varepsilon_v^e \leq 0, \quad (3)$$

где  $K_U = K_U(\varepsilon_v)$  – заданная зависимость модуля объемного сжатия разгрузки. Повторная нагрузка осуществляется по прямой  $K_U$  и далее снова по кривой  $p_{\cos}$ .

Модуль сдвига бетона  $G$  определяется по модулю объемного сжатия  $K_L$  (или  $K'$ ) и заданному коэффициенту Пуассона  $\nu$ .

В случае гидростатического растяжения ( $p < 0$ ) давление определяется прямой  $K_U$  до предельной величины  $p_{\text{cut}}$  (см. рис.1) [6]:

$$p = \max(p_{\text{cut}}, p_{K_U}), \quad p_{\text{cut}} = \begin{cases} -f_t, & \lambda \leq \lambda_m, \\ -\eta f_t, & \lambda > \lambda_m. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $f_t$  – прочность бетона на растяжение;  $\eta(\lambda)$  – функция разупрочнения, монотонно убывающая от 1 до 0 при увеличении параметра поврежденности  $\lambda > \lambda_m$ .

**1.2. Предельные поверхности поведения бетона.** В соответствии с поведением образцов в опытах диаграмма деформирования бетона состоит из линейного упругого участка, нелинейного участка упрочнения и нелинейного участка разупрочнения. Кроме этого, диаграмма деформирования зависит от приложенного внешнего давления, что свойственно материалам с внутренним трением [11].

На меридиональной плоскости области упругого поведения, упрочнения и разупрочнения ограничиваются меридианами соответственно начальной  $Y_y$ , максимальной  $Y_m$  и остаточной  $Y_r$  (рис. 2).

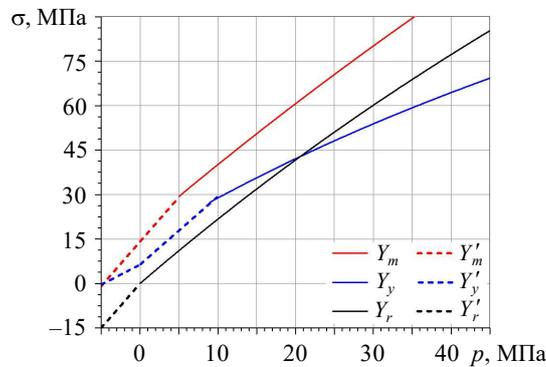


Рис. 2. Вид меридианов сжатия для описания предельных состояний бетона

Текущий меридиан сжатия бетона  $Y^c$  получается интерполяцией функций  $Y_y$ ,  $Y_m$  при упрочнении бетона ( $\eta$  монотонно возрастает от 0 до 1) [6]:

$$Y^c(p, \eta) = \eta Y_m(p) + (1 - \eta) Y_y(p) \quad (5)$$

или интерполяцией  $Y_m$ ,  $Y_r$  при разупрочнении бетона ( $\eta$  монотонно убывает от 1 до 0):

$$Y^c(p, \eta) = \eta Y_m(p) + (1 - \eta) Y_r(p) \quad (6)$$

(если  $Y^c < 0$ , то полагается  $Y^c = 0$ ).

Заданная функция разупрочнения  $\eta$  зависит от параметра поврежденности  $\lambda$ . В процессе нагружения и накопления поврежденности текущая предельная поверх-

ность расширяется неоднородно по давлению, сокращается, передвигается по гидростатической оси.

Функции  $Y_i(p)$  ( $i = y, m, r$ ) имеют вид гипербол (сплошные линии на рис. 2):

$$Y_i(p) = a_{0i} + \frac{P}{a_{1i} + a_{2i}p} \geq 0, \quad (7)$$

причем  $a_{0r} = 0$ . Прочность бетона на сжатие  $f_c$  вычисляется из условия  $f_c = 3p_f = Y_m(p_f)$  (для кривых на рис. 2  $f_c = 60$  МПа,  $p_f = 20$  МПа,  $f_t = 4,7$  МПа).

С целью лучшего согласия с результатами экспериментов для небольших давлений меридиан максимальной прочности  $Y'_m$  представляется в линейном виде [6]:

$$Y'_m(p) = 1,5 \frac{p + f_t}{\psi(p)} \text{ при } p < \frac{f_c}{3}. \quad (8)$$

При отрицательных давлениях меридиан остаточной прочности  $Y'_r$  для интерполяции принимается как [6]:

$$Y'_r(p) = 1,5 \frac{p}{\psi(p)} \text{ при } p < 0, \quad (9)$$

а меридиан начальной прочности  $Y'_y$  [6]:

$$Y'_y(p) = 0,45 Y'_m(p) = 0,45 \cdot 1,5 \frac{p + f_t}{\psi(p)} \text{ при } p < 0, \quad (10)$$

где  $0,5 \leq \psi(p) \leq 1$  – определенная функция отношения расстояний от гидростатической оси до меридиана растяжения и сжатия в пространстве главных напряжений [8]. При давлениях из диапазона  $0 \leq p \leq p_y$  меридиан начальной прочности  $Y_y$  представляется отрезком прямой, соединяющим прямую  $Y'_y(p)$  при  $p = 0$  и гиперболу  $Y_y$  при  $p = p_y$ , где  $p_y$  – давление в точке пересечения гиперболы начальной прочности  $Y_y$  с прямой остаточной прочности  $Y'_r(p)$ . На рис. 2 кусочно-линейные функции  $Y'_i(p)$  ( $i = y, m, r$ ) показаны штриховыми линиями.

Для учета вида напряженно-деформированного состояния (НДС) (трехосное сжатие-растяжение) в модели К&С используется зависимость предельного меридиана  $Y$  от угла Лоде в виде Вильяма – Вонки [12]:

$$Y(p, \theta) = Y^c(p) \cdot r_{ww}, \quad r_{ww}(p, \theta) = \frac{2(1 - \psi^2)c + (2\psi - 1)k}{d}, \quad (11)$$

где

$$k = \sqrt{4(1 - \psi^2)c^2 + \psi(5\psi - 4)}, \quad d = 4(1 - \psi^2)c^2 + (1 - 2\psi)^2, \quad c = \cos \theta, \quad (12)$$

$$\theta = \theta(s_{ij}) - \text{угол Лоде}, \quad \cos 3\theta = 1,5\sqrt{3} \frac{J_3}{J_2^{1,5}},$$

$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji}$ ,  $J_3 = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki}$  – второй и третий инварианты девиатора напряжений.

В частности,  $\theta = 60^\circ$ ,  $r_{ww} = 1$  при сжатии;  $\theta = 0$ ,  $r_{ww} = \psi$  при растяжении.

Таким образом, поверхность предельного состояния бетона:

$$F(p, s, \theta, \eta) = \sigma_e(s) - Y(p, \theta, \eta) = 0, \quad (13)$$

где  $\sigma_e(s) = \sqrt{3J_2}$  – напряжение Мизеса, несимметричное относительно гидростатической оси.

Графический вид предельных кривых бетона в меридиональной плоскости других моделей бетона обычно имеет сходство с меридианами модели К&С [12], но способы их задания могут различаться (например, [13–15]). Некоторые модели бетона «закрывают» предельную поверхность дополнительной «сар»-поверхностью для описания компактирования бетона при больших давлениях (например, [16]). В модели К&С компактирование бетона описывается его уравнением состояния (см. п. 1.1).

Учет вида НДС в других моделях бетона может осуществляться масштабированием предельной функции по Кулону – Мору, Гадеусу [13], Рабину [16] или с использованием главных напряжений в функции текучести [17].

**1.3. Функция разупрочнения и поврежденность бетона.** Заданная функция разупрочнения  $\eta = \eta(\lambda)$  обычно имеет вид «колокола» (рис. 3) и может интерпретироваться как нормированная диаграмма деформирования бетона. На стадии упрочнения  $\eta$  возрастает от 0 до 1 при изменении параметра поврежденности  $\lambda$  от 0 до  $\lambda_m$ , а на стадии разупрочнения  $\eta$  убывает от 1 до 0 при  $\lambda > \lambda_m$  ( $\eta(\lambda_m) = 1$ ). В расчетах бывает удобно стадию разупрочнения представить в виде экспоненты с параметром  $b$  или других аналитических функций, что предусмотрено в реализации модели К&С (на рис. 3  $\lambda_m = 5,6 \cdot 10^{-5}$ ,  $b = 1500$ ).

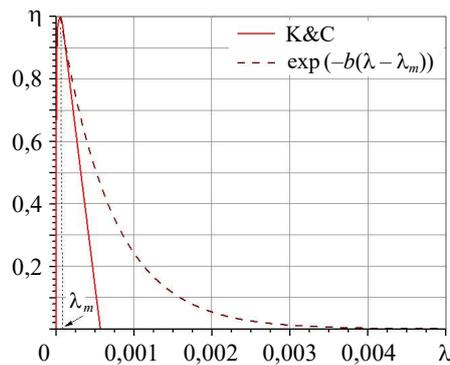


Рис. 3. Вид функции разупрочнения

Приращение параметра поврежденности материала  $d\lambda$  рассчитывается как модификация приращения эффективной необратимой неупругой деформации [6]:

$$d\lambda = h(\sigma) d\bar{\varepsilon}^p, \quad h(\sigma) = \begin{cases} (1 + p/f_t^{def})^{-b_1}, & p \geq 0, \\ (1 + p/f_t)^{-b_2}, & p < 0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{2/3 d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$  – приращение эффективной неупругой деформации,  $d\varepsilon_{ij}^p$  – приращение тензора неупругой деформации,  $f_t^{def}$  – прочность на растяжение по умолчанию (см. ниже).

Параметры  $b_1, b_2$  позволяют различать эволюцию поврежденности при гидростатическом сжатии и растяжении. При  $b_i = 0$  поврежденность становится равной накопленной пластической деформации  $\lambda = \bar{\varepsilon}^p$ . При  $b_i > 0$  положительное давление замедляет эволюцию поврежденности, а отрицательное давление ускоряет ее.

Для описания разрушения при всестороннем растяжении  $p < 0$  используется объемная поврежденность, пропорциональная текущей объемной деформации  $\varepsilon_v > 0$  [6]:

$$d\lambda_v = b_3 f_d k_d d\varepsilon_v, \quad (15)$$

где  $b_3$  – заданный параметр, а  $f_d, k_d$  – эмпирические внутренние функции.

На каждом временном шаге поврежденность накапливается:  $\lambda = \int_0^{\bar{\varepsilon}^p} (d\lambda + d\lambda_v)$ . Можно ввести приведенную поврежденность  $\delta$  малого объема бетона:

$$\delta = \frac{\lambda + \lambda_m}{\lambda + \lambda_m} = \frac{2}{1 + \lambda_m/\lambda} = \delta_{b_1} + \delta_{b_2} + \delta_v. \quad (16)$$

Величина  $\delta$  изменяется от 0 до 1 на стадии упрочнения и от 1 до 2 на стадии разупрочнения с разрушением ( $\delta_{b_1}, \delta_{b_2}, \delta_v$  – доли поврежденности  $\delta$  при положительном, отрицательном давлении и всестороннем растяжении соответственно).

В других моделях бетона экспериментальные одноосные диаграммы деформирования сжатия и растяжения используются напрямую [18, 19] или представляются в аналитическом виде (спадающая экспонента [13]). Кроме этого, может учитываться деградация упругой жесткости бетона, что дает возможность описания циклических нагрузок с закрытием трещин при сжатии (например, [19]). В реализацию модели К&С по аналогии с [16] введена следующая возможность. Упругие константы деградируют по мере разупрочнения материала:

$$E = (1 - d)E_0 \text{ при } \lambda > \lambda_m. \quad (17)$$

Здесь  $E_0$  – начальный модуль упругости,  $d$  – скалярная поврежденность упругой жесткости (изменяется от 0 до  $d_{\max} \leq 1$ ). Деградация жесткости в первом приближении напрямую связана с деградацией прочности бетона [16]:

$$d = 1 - \eta \text{ при } \lambda > \lambda_m. \quad (18)$$

В приращении деформации появляется компонента  $d\varepsilon^d$ , вызванная деградацией жесткости:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p + d\varepsilon^d, \quad (19)$$

что учитывается при расчете пластического течения.

**1.4. Частично ассоциированное пластическое течение.** Для описания нелинейного поведения бетона с накоплением неупругих остаточных деформаций и поврежденности в модели К&С используется теория пластического течения. Функция  $F$  поверхности текучести для предельного состояния  $F = 0$  в пространстве напряжений зависит от трех инвариантов тензора напряжений и параметра поврежденности (см. выше):

$$F(p, s, \theta, \lambda) = \sigma_e(s) - Y(p, \theta, \lambda). \quad (20)$$

Приращение пластической деформации нормально к пластическому потенциалу  $Q$ :

$$d\varepsilon^{p, \omega} = d\tilde{\mu} \frac{\partial Q}{\partial \sigma}, \quad (21)$$

который берется в виде [10]

$$Q = \sigma_e(s) - \omega Y(p, \theta, \lambda). \quad (22)$$

Отсюда приращение пластической деформации (здесь и далее матричные обозначения):

$$d\varepsilon^p = (s + mI)d\mu, \quad d\bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} s_{ij} s_{ij} + 2m^2} d\mu = \frac{2}{3} \sigma'_e d\mu, \quad (23)$$

где  $\mu$  – скалярный пластический параметр течения  $\tilde{\mu}$  в другом масштабе,  $m = 2\omega\sigma_e \times Y_p/9$ ,  $\sigma'_e = \sigma_e \sqrt{1 + 2\omega^2 Y_p^2/9}$  (полагается, что  $\theta$ -компонента градиента  $Q$  не вызывает пластического течения).

При  $\omega = 0$  получается неассоциированное течение Прандтля – Рейса, когда дилатансия отсутствует; при  $\omega = 1$  – ассоциированное течение с дилатансией; промежуточный вариант  $0 < \omega < 1$  соответствует неассоциированному течению с дилатансией.

Приращение деформации  $d\varepsilon$ , которое известно в начале текущего временного шага, раскладывается на пластическую и упругую части:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^p + d\varepsilon^e = (s + mI)d\mu + Cd\sigma, \quad (24)$$

где  $I$  – единичная матрица,  $C$  – матрица упругих свойств бетона. Требуется найти приращение (упругих) напряжений и переменных состояния пластичности (приращение пластической деформации и параметра поврежденности).

Умножение равенства (24) на обратную матрицу упругих свойств приводит к соотношению:

$$d\sigma^* = C^{-1}d\varepsilon = (2Gs + 3mKI)d\mu + d\sigma, \quad (25)$$

$d\sigma^*$  – приращение пробного упругого напряжения.

При пластическом течении  $F = \sigma_e(s^*) - Y(p^*, \theta, \lambda_n) > 0$ . Пусть

$$\sigma^* = \sigma_n + d\sigma^* = s^* - p^*, \quad \sigma = s - p, \quad (26)$$

где  $\sigma_n, \lambda_n$  – напряжение и поврежденность на предыдущем временном шаге  $n$ ;  $\sigma$  – искомое напряжение на текущем шаге. Пробное давление  $p^*$  определяется из уравнения состояния (п. 1.1). Угол Лоде  $\theta$  вычисляется по пробному упругому напряжению  $\sigma^*$ , и полагается, что он не изменяется при расчете пластического течения на текущем временном шаге.

После ряда преобразований получаем

$$d\mu = \frac{f(\sigma^*)}{2G\sigma_e(1 + (\omega KY_p^2)/(3G)) + 2H\sigma'_e/3} \quad (27)$$

и приращение эффективной пластической деформации

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{f(\sigma^*)}{(3G + \omega KY_p^2)/\sqrt{1 + 2/9\omega^2 Y_p^2} + H}, \quad (28)$$

где модуль пластического упрочнения

$$H = Y_{,\bar{\varepsilon}^p} = Y_{,\lambda} h(\sigma). \quad (29)$$

При разупрочнении  $H$  становится отрицательным, поэтому из неравенства  $d\bar{\varepsilon}^p > 0$  следует условие  $(3G + \omega KY_p^2)/\sqrt{1 + 2/9\omega^2 Y_p^2} + H > 0$ . Если оно не выполняется, то полагается  $d\bar{\varepsilon}^p = 0$ .

Для компонент тензора пластической деформации получим

$$d\varepsilon^p = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\sigma'_e} (s + mI), \quad (30)$$

накопление объемной пластической деформации

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_{v,n}^p + 3m d\mu. \quad (31)$$

$n$  – номер шага по времени.

Корректировка давления

$$p = p^* + dp^p, \quad (32)$$

где  $dp^p = 3mKd\mu$  – приращение давления, вызванного дилатансией.

Также с использованием (14) имеем

$$\lambda = \lambda_n + d\lambda. \quad (33)$$

Вычисленные приращения пластической деформации, поврежденности и давления, вообще говоря, изменяют радиус текучести  $Y(p, \lambda)$  и, как следствие, поверхность текучести  $F$ . В первом приближении

$$Y(p, \lambda) = Y(p^*, \lambda_n) + Y_{,\lambda} d\lambda + Y_{,p} dp^p = Y(p^*, \lambda_n) + Hd\bar{\varepsilon}^p + Y_{,p} dp^p. \quad (34)$$

Тогда компоненты девиатора напряжений определяются радиальным возвратом пробных напряжений

$$s_{ij} = s_{ij}^* \frac{Y(p, \lambda)}{\sigma_e(s^*)}, \quad (35)$$

а тензор напряжения

$$\sigma = s - p. \quad (36)$$

**1.5. Регуляризация модели.** Наличие участка разупрочнения в диаграмме деформирования бетона, а также неассоциированный закон пластического течения приводят к необходимости регуляризации локальной модели материала для получения физически значимого численного решения. В модели К&С для этого реализован метод полосы трещин [11].

При разрушении элемента растяжением расчетная удельная энергия образования трещины  $G_f$  не должна зависеть от размера элемента  $L_e$ . Для этого нисходящий участок кривой  $\eta$  масштабируется

$$\eta' = \begin{cases} \eta(\lambda), & \lambda < \lambda_m, \\ \eta(\lambda'), & \lambda \geq \lambda_m, \end{cases} \quad \lambda' = \lambda_m + (\lambda - \lambda_m)r_s. \quad (37)$$

Для больших конечных элементов коэффициент регуляризации  $r_s < 1$  (кривая  $\eta$  сжимается), для малых –  $r_s > 1$  (кривая  $\eta$  растягивается).

В реализации модели К&С используется упрощенное соотношение

$$r_s = \left( \frac{L_{\text{ном}}}{L_e} \right)^q, \quad (38)$$

где  $L_{\text{ном}} = 100$  мм (номинальный размер элемента, который не требует регуляризации),  $L_e$  – текущий размер элемента с учетом ограничений,  $q = 1,057$  – эмпирический показатель степени.

Ограничения:  $L' = \max(L_e, w_{\text{loc}})$  – ограничение на растяжение функции разупрочнения;  $w_{\text{loc}}$  – заданный размер зоны локализации;  $L = \min(L'U_L, L_{\text{max}})$  – ограничение на сжатие функции разупрочнения;  $L_{\text{max}} = 250$  мм [7] – максимальный размер элемента для регуляризации;  $U_L$  – коэффициент перевода из пользовательской системы единиц длины в мм.

Отсутствие ограничения на растяжение может привести к избыточной энергии разрушения. Ограничение на сжатие можно ослабить, уменьшая значение прочности бетона на растяжение [7].

Такая формула для коэффициента  $r_s$  совместно с определенным значением параметра разупрочнения  $b_2$  при растяжении одноэлементного кубика приводит к расчетным значениям энергии разрушения, близким к экспериментальным, рекомендованным в [7]. При этом параметры модели К&С определяются автогенерацией по заданной прочности бетона на сжатие  $f_c$ . Энергия разрушения  $G_f$  зависит от  $f_c$  и максимального размера заполнителя. От этих же параметров зависит необходимое значение  $b_2$  [7].

При пользовательских параметрах модели К&С (в частности, другой функции  $\eta(\lambda)$ ) или заданном значении  $G_f$  описанная схема регуляризации может не подойти. В реализацию модели К&С дополнительно введен более универсальный алгоритм регуляризации на основе заданной энергии разрушения  $G_f$  при квазистатическом растяжении образца, который, помимо размера элемента, учитывает прочность бетона на растяжение и функцию разупрочнения  $\eta(\lambda)$ . Коэффициент растяжения функции  $\eta(\lambda)$  при этом определяется как

$$r_G = \frac{G_f}{G'_f} = \frac{G_f}{S_{\text{soft}} L_e f_t}, \quad (39)$$

где  $S_{\text{soft}}$  – площадь под участком разупрочнения кривой  $\eta(\lambda)$ .

Регуляризация в других моделях бетона, например [16, 19], по существу аналогична приведенной выше, но может отличаться формой задания исходных данных. Для регуляризации локальных моделей материалов также используется нелокальный подход [20].

**1.6. Влияние скорости деформирования.** Учет скорости деформирования материала важен при динамических воздействиях. При высоких скоростях деформирования прочность бетона может возрастать в несколько раз [21–23]. В модели К&С учет скорости деформирования бетона соответствует радиальному пути нагружения в пространстве главных напряжений, которому следуют базовые эксперименты с образцами

$$Y'(p, \eta) = r_f Y(p/r_f, \eta), \quad (40)$$

где  $r_f(\bar{\epsilon})$  – экспериментальная функция степени упрочнения бетона в зависимости от скорости деформирования. Приведенное давление  $p/r_f$  используется также в расчете поврежденности (14) и в соотношении Вильяма – Вонки (11).

В реализацию модели К&С включена зависимость  $r_f(\bar{\epsilon})$ , рекомендованная для сжатия бетона [16, 24], и модификация [25] для растяжения.

Дополнительно в модель К&С включен механизм вязкопластического течения для учета зависимости от скорости деформирования (по аналогии с [16]): на каждом временном шаге вязкопластическое напряжение (то есть учитывающее скорость деформации) интерполируется между упругим напряжением и пластическим (не учитывающим скорость деформации)

$$\sigma_{ij}^{vp} = (1 - \gamma)\sigma_{ij}^e + \gamma\sigma_{ij}^p, \quad \gamma = \frac{\Delta t}{\zeta + \Delta t}. \quad (41)$$

Здесь  $\Delta t$  – временной шаг,  $\zeta$  – заданный коэффициент текучести, при этом динамическое предельное напряжение Мизеса в бетоне  $Y' = Y + E\zeta \dot{\epsilon}$ .

**1.7. Учет армирования бетона.** Модель K&C позволяет учесть армирование бетона по правилу смесей для модуля объемного сжатия, модуля сдвига, предела текучести и модуля пластического упрочнения соответственно:

$$\begin{aligned} K' &= (1 - f_s)K + f_s K_s, & G' &= (1 - f_s)G + f_s G_s, \\ Y' &= (1 - f_s)Y + f_s Y_s, & H' &= (1 - f_s)H + f_s H_s, \end{aligned} \quad (42)$$

где индекс  $s$  обозначает принадлежность соответствующей величины к материалу арматуры,  $f_s$  – объемная доля арматуры,  $Y_s = Y_{s0} + H_s \bar{\epsilon}^p$  – предел текучести арматуры с учетом заданной зависимости от скорости деформирования.

При расчете напряжения в малом объеме железобетона производится коррекция давления

$$p' = (1 - f_s)p - f_s K_s \epsilon_v. \quad (43)$$

Более точно армирование бетона можно учесть вне локальной модели бетона заданием связи объемных элементов бетона с балочными элементами арматуры.

**1.8. Автогенерация параметров модели.** На основе концепции обобщенного бетона [7] реализация модели K&C позволяет генерировать значения своих параметров по одной заданной величине – прочности бетона на сжатие  $f_c$ . Пусть имеется базовый набор значений параметров модели K&C (добавляется индекс  $b$ ) для бетона  $f_{c,b} = 6583 \text{ psi}$  (45,4 МПа). Тогда для получения предельных поверхностей бетона с прочностью на сжатие  $f_c$  производится масштабирование базовых параметров:

$$a_{0i} = a_{0i,b} r, \quad a_{1i} = a_{1i,b}, \quad a_{2i} = \frac{a_{2i,b}}{r}, \quad r = \frac{f_c}{f_{c,b}}, \quad (44)$$

где  $f_c$  задано в единицах пользователя, а  $f_{c,b}$  – в базовых единицах. Прочность на растяжение вычисляется как  $f_t^{\text{def}} = 1,58(f_c^2/UCF\_P)^{1/3}$ , где  $UCF\_P$  – коэффициент перевода давления из пользовательских единиц в psi.

Пусть имеется базовое уравнение состояния для  $f_{c,b}$  с коэффициентом Пуассона бетона  $\nu^b$ , для которого ход кривой давления при сжатии и модуль объемного сжатия при разгрузке соответственно имеют вид:

$$p^b = p_{\text{eos}}^b(\epsilon_v), \quad K^b = K^b(\epsilon_v). \quad (45)$$

Уравнение состояния определяется масштабированием по линейному участку базового бетона

$$p = p_{\text{eos}}^b(\epsilon_v) r_p, \quad K = K^b(\epsilon_v) r_p, \quad (46)$$

где  $r_p = \chi p_1(f_c) / p_1(f_c^b)$ ,  $p_1(f_c)$  – известная зависимость предельного давления упругого (начального линейного) участка уравнения состояния от прочности бетона на сжатие.

Остальные параметры модели K&C принимаются постоянными (не зависящими от  $f_c$ ). В частности, функция  $\eta(\lambda)$  изображена на рис. 3; степень дилатансии  $\omega_b = 0,5$ , коэффициент Пуассона  $\nu_b = 0,19$ , параметры эволюции поврежденности  $b_1 = 1,6$ ,  $b_2 = 1,35$ ,  $b_3 = 1,15$ , размер зоны локализации  $w_{\text{loc}} = 25,4 \text{ мм} = 1 \text{ дюйм}$ .

Параметры модели K&C, полученные автогенерацией, могут служить лишь начальным приближением, которое требует экспериментального уточнения.

## 2. Исходные данные и схема алгоритма модифицированной модели К&С

Исходные данные модели бетона К&С следующие:

- кусочно-линейные функции уравнения состояния и модуля объемного сжатия при разгрузке;
- вид функции разупрочнения  $\eta(\lambda)$ , ее параметры или кусочно-линейное задание;
- плотность бетона, коэффициент Пуассона, предел прочности на растяжение  $f_t$ , параметры предельных поверхностей  $a_{ji}$ , параметры эволюции поврежденности  $b_j$ , степень дилатансии  $\omega$ ;
- размер зоны локализации  $w_{loc}$ , способ регуляризации, энергия разрушения элемента при растяжении;
- способ учета зависимости от скорости деформирования бетона; значение коэффициента текучести или кусочно-линейная функция степени упрочнения бетона в зависимости от скорости;
- объемная доля арматуры, параметры билинейной диаграммы упругопластического деформирования арматуры; кусочно-линейная функция степени упрочнения арматуры в зависимости от скорости.

Для первоначального приближения можно использовать значения параметров модели К&С, которые генерируются программой (см. п. 1.8) при задании значения прочности бетона на сжатие  $f_c$  с отрицательным знаком. Для отдельных параметров можно изменить генерируемые программой параметры, задавая требуемые значения.

Компьютерная реализация модели К&С в ПП «Логос» разработана в виде процедуры расчета состояния малого объема материала на языке программирования Fortran-90, имеет векторизованный вид и обладает возможностью параллельной обработки. На входе процедуры – тензор приращения деформаций на текущем временном шаге, переменные состояния и другие переменные; на выходе – тензор напряжений, неупругие деформации, накопленная поврежденность, другие обновленные переменные состояния. Общая блок-схема алгоритма реализации модели бетона К&С представлена на рис. 4.

## 3. Тестовые примеры

Реализация модифицированной модели К&С в ПП «Логос» верифицирована путем сопоставления с исходной реализацией [6, 7] на модельных задачах. Исходя из свойств поведения образцов бетона в лабораторных испытаниях и функциональных возможностей модели К&С, на схеме одноэлементного куба с одной точкой интегрирования проверяется реакция материала на следующие случаи квазистатического нагружения вплоть до разрушения:

- одноосное и трехосное сжатие;
- одноосное и двухосное сжатие/растяжение;
- циклическое одноосное растяжение.

Рассмотренные задачи показывают следование модели К&С поведению бетона в экспериментах.

**3.1. Трехосное сжатие.** Рассматривается численное моделирование экспериментов по осевому сжатию образца бетона со свободным и стесненным движением в поперечном направлении [6]. Прочность бетона на сжатие  $f_c = 45,4$  МПа. Стеснение обеспечивается подпорным давлением на боковой поверхности образца  $P_b = 7, 14, 20, 34$  МПа.

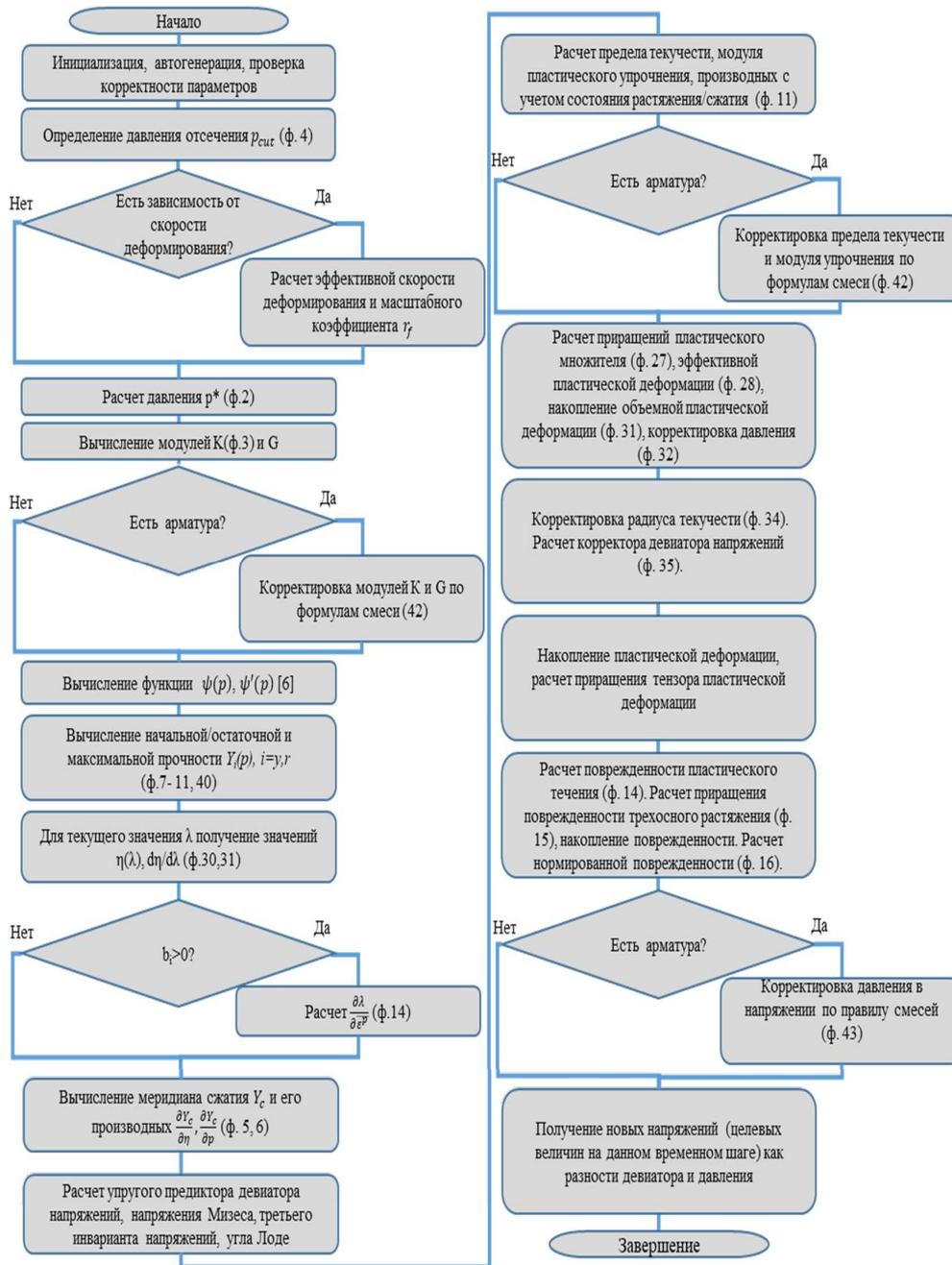


Рис. 4. Общая блок-схема алгоритма реализации модели бетона K&C

В расчетной схеме на трех гранях куба с ребром 100 мм заданы условия симметрии относительно координатных плоскостей (рис. 5), на остальных гранях заданы граничные условия: одна грань куба движется со скоростью  $V_b = 0,02t$  мм/мс, сжимая образец; на двух других задано давление подпора  $P_b$ . Параметры модели К&С определяются автогенерацией. На рис. 5  $U_x, U_y, U_z$  – смещения на гранях образцов в направлении осей координат.

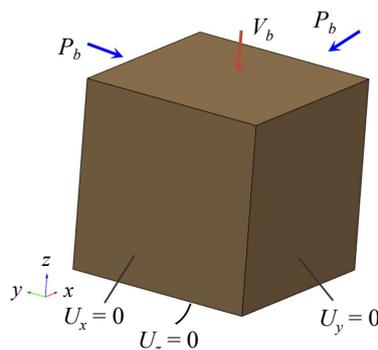


Рис. 5. Конечно-элементная модель трехосного сжатия образца бетона

Наблюдается согласие результатов расчетов с экспериментальными данными (рис. 6).

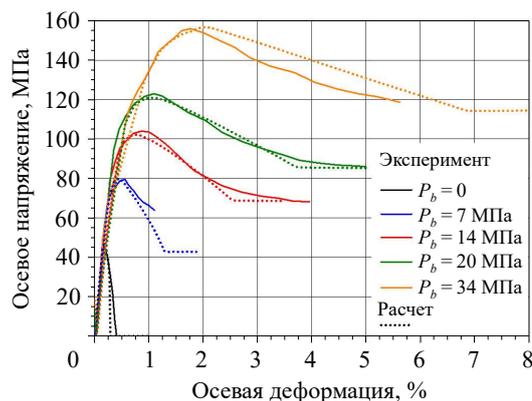


Рис. 6. Зависимость напряжения Мизеса от осевой деформации при трехосном сжатии образца бетона [6]

**3.2. Двухосное нагружение.** Рассматривается численное моделирование опытов по нагружению образца бетона в форме пластины [26]. По толщине пластина свободна (напряжение  $\sigma_3 = 0$ ), а по двум другим координатным направлениям пластина сжимается и/или растягивается с напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$  соответственно. Прочность бетона на растяжение  $f_t = 2,6$  МПа, на сжатие  $f_c = 32,0$  МПа [27]. Необходимо определить зависимости напряжения  $\sigma_1$  по оси  $x$  от деформаций по координатным осям  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  при заданных значениях модулей напряжений:

- 1)  $|\sigma_1|/|\sigma_2| = 1/0, 1/1, 1/0,55$  – одноосное и двухосное сжатие;
- 2)  $|\sigma_1|/|\sigma_2| = 1/0, 1/1, 1/0,52$  – одноосное и двухосное растяжение;
- 3)  $|\sigma_1|/|\sigma_2| = 1/0,052, 1/0,204$  – двухосное сжатие-растяжение.

Расчетные схемы опытов изображены на рис. 7. Размер элемента  $100 \times 100 \times 25$  мм (1/8 часть пластины). Две смежные малые грани пластины движутся вдоль

координатных осей со скоростями  $V_{b1}$  и  $V_{b2}$ , линейно зависими от времени. На трех гранях пластины заданы условия симметрии. Из решения плосконапряженной задачи упругости [28] следует отношение деформаций

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{k - \nu}{1 - k\nu},$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $k = \sigma_2/\sigma_1$ . Отношение скоростей  $V_{b1}$  и  $V_{b2}$  берется в расчетной схеме равным отношению деформаций по представленной формуле. В случае комбинированного нагружения сжатие-растяжение в направлении растяжения вместо скорости  $V_{b2}$  задается давление  $P_{b2}$ , исходя из заданного  $k$  и расчетного значения  $\sigma_1$ . Параметры модели К&С определяются автогенерацией.

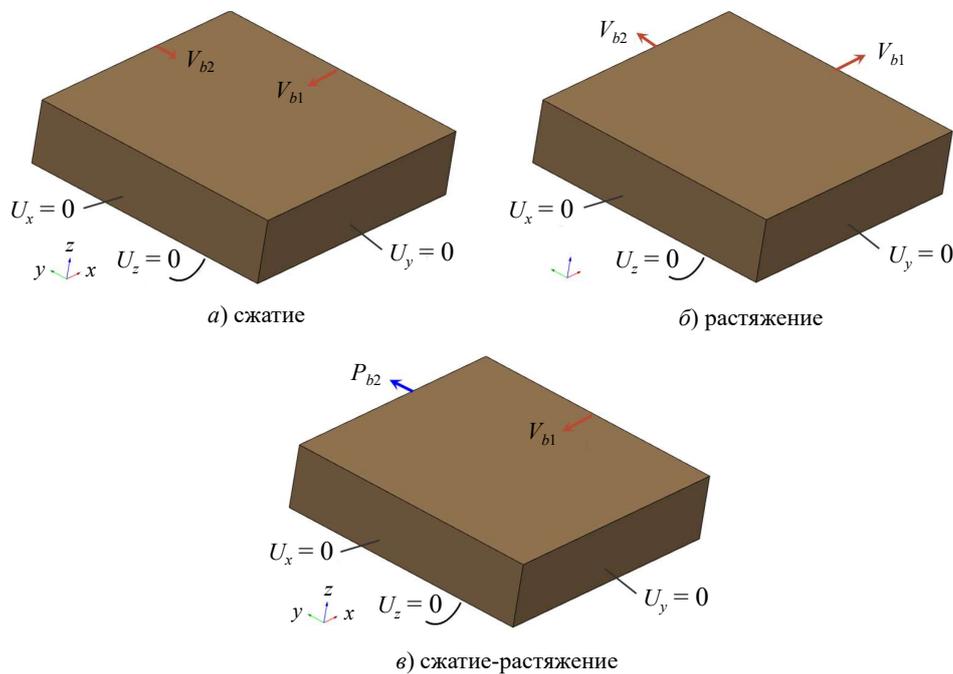


Рис. 7. Конечно-элементные схемы опытов по двухосному сжатию-растяжению пластины

Расчеты удовлетворительно описывают поведение бетонных образцов при двухосном нагружении (рис. 8, 9). На рисунках дополнительно представлены соответствующая схема нагружения и путь нагружения на меридиональной плоскости. При двухосном растяжении прочность бетона практически не изменяется (рис. 8а). При сжатии с увеличением поперечного напряжения  $\sigma_2$  прочность бетона на сжатие увеличивается (рис. 8б). При комбинации сжатие-растяжение с увеличением растягивающего напряжения прочность на сжатие уменьшается (рис. 9б). При приближении к точке потери несущей способности при увеличении напряжения сжатия происходит увеличение объема образца (рис. 9а). Неупругое увеличение объема (дилатансия) обычно связывается с развитием основной массы микротрещин в бетоне.

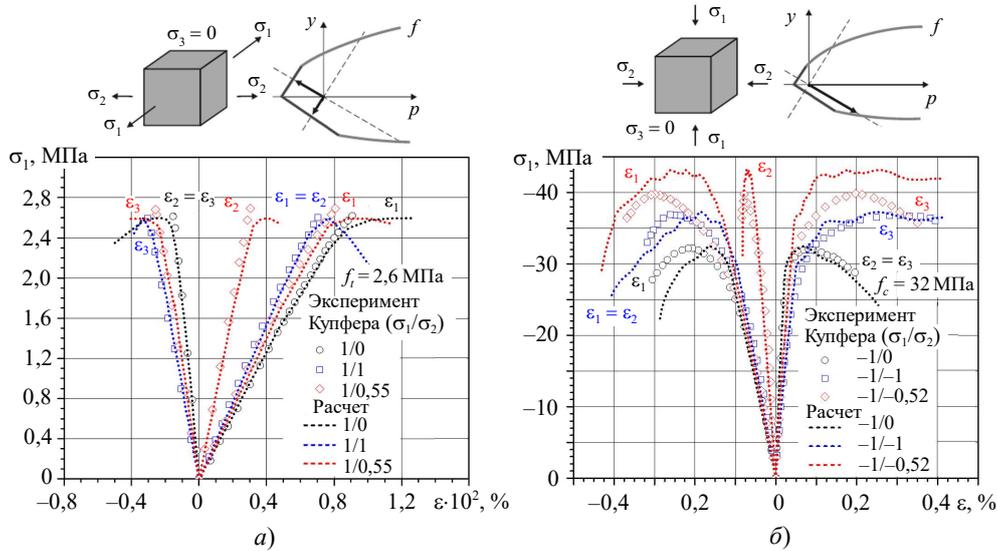


Рис. 8. Зависимость напряжения от компонент деформации: а) при двухосном растяжении образца бетона; б) при двухосном сжатии образца бетона

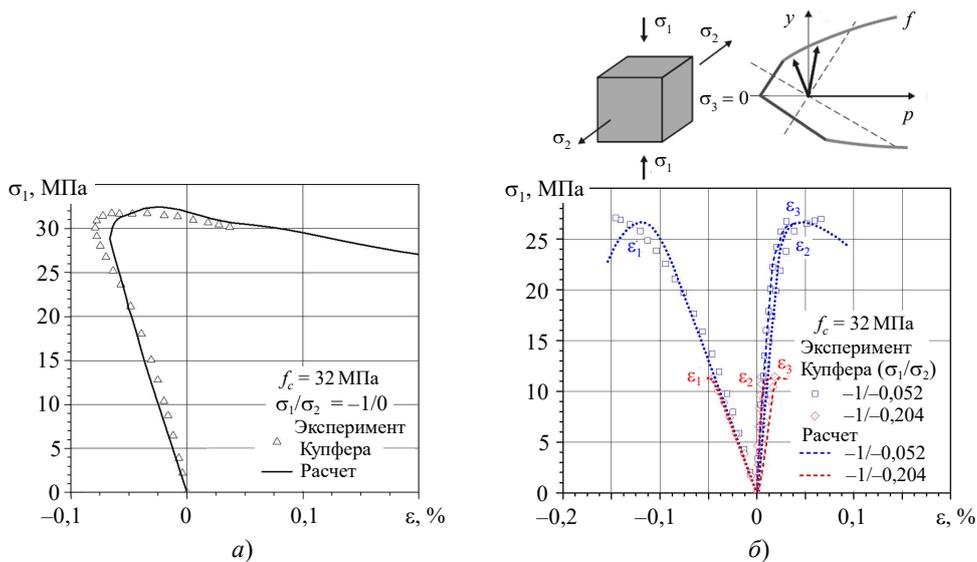


Рис. 9. Зависимость напряжения от компонент деформации: а) при одноосном сжатии образца; б) при двухосном растяжении-сжатии образца бетона

**3.3. Циклическое растяжение.** Для расчетов использовалась схема из примера трехосного сжатия с нулевым подпорным давлением  $P_b = 0$  и размером ребра кубика 82,6 мм (см. рис. 5). Подвижная грань куба движется, циклически растягивая образец с упругой разгрузкой. Параметры модели К&С определяются автогенерацией по прочности на сжатие  $f_c = 39,4$  МПа. Дополнительно задавалась прочность на растяжение  $f_t = 3,4$  МПа, экспоненциальная функция разупрочнения с параметром  $b = 2500$  и параметр поврежденности при давлении растяжения  $b_2 = 3,5$ . Расчетом воспроизведено три цикла нагружения образца с деградацией упругой жесткости (рис. 10). Наблюдается согласие с экспериментом [29].

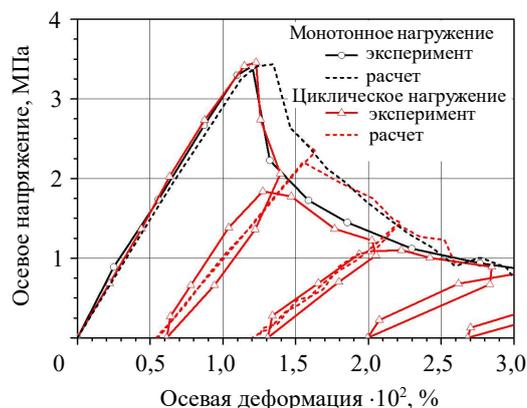


Рис. 10. Зависимость осевого напряжения от осевой деформации при одноосном монотонном и циклическом растяжении образца бетона [29]

### Заключение

Представлена модифицированная модель бетона Karagozian & Case (K&C), которая успешно применяется в ПП «Логос» для расчетного моделирования поведения бетона и железобетонных конструкций при динамических воздействиях. С целью расширения функциональных возможностей модели введены модификации: деградация упругой жесткости бетона для моделирования циклического нагружения; зависимость поведения бетона от скорости деформирования по механизму вязкопластического течения; регуляризация модели по заданной энергии разрушения бетона.

Приведены основные соотношения модели бетона K&C, исходные данные и схема алгоритма модели K&C. На тестовых примерах показана работоспособность реализованной модели бетона K&C.

### Список литературы

1. Дьянов Д.Ю., Спиридонов В.Ф., Цибереv К.В. и др. Пакет программ ЛОГОС. Модуль решения динамических задач прочности. *Вопросы атомной науки и техники. Серия: Математическое моделирование физических процессов*. 2018. Вып. 1. С. 3–14.
2. Holmquist T.J., Johnson G.R., Cook W.H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. *14<sup>th</sup> International Symposium*. Quebec City, Canada. 1993. Vol. 2. P. 591–600.
3. Лукин А.В., Модестов В.С. Конечно-элементное моделирование и анализ напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций. *Научно-технические ведомости СПбГТУ. Физ.-мат. науки*. 2014. Вып. 3(201). С. 35–46.
4. Broadhouse B.J., Neilson A.J. *Modelling Reinforced Concrete Structures in DYNA3D*. Winfrith, UK: UKAEA Atomic Energy Establishment, 1987. 16 p.
5. *LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. II. Material Models*. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2018. 1682 p.
6. Malvar L.J., Crawford J.E., Wesevich J.W., Simons D.A. Plasticity concrete material model for Dyna3D. *International Journal of Impact Engineering*. 1997. Vol. 19. Iss. 9-10. P. 847–873. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(97\)00023-7](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(97)00023-7).
7. Magallanes J.M., Wu Y., Malvar L.J., Crawford J.E. Recent improvements to release III of the K&C concrete model. *Proceedings of 11<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference*. 2010. Vol. 1. Iss. 3. P. 37–48.
8. Malvar L.J., Simons D. Concrete material modeling in explicit computations. *Workshop on Recent Advances in Computational Structural Dynamics and High Performance Computing*. 1996. P. 165–194.

9. Magallanes J.M. Importance of concrete material characterization and modelling to predicting the response of structures to shock and impact loading. *WIT Transactions on the Built Environment*. 2008. Vol. 98. P. 241–250. DOI: 10.2495/SU080241.
10. Wu Y., Crawford J.E., Magallanes J.M. Performance of LS-DYNA concrete constitutive models. *12<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference*. 2012. Vol. 1. P. 1–14.
11. Bazant Z.P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*. 1976. Vol. 102. Iss. 2. P. 331–344. DOI: 10.1061/jmcea3.0002111.
12. Chen W.F., Han D.J. *Plasticity for Structural Engineers*. New York: Springer-Verlag, 1988. 606 p.
13. Brannon R.M., Leelavanichkul S. *Survey of four Damage Models for Concrete*. Salt Lake City, USA: Sandia National Laboratories, 2009. 77 p. DOI: 10.2172/993922.
14. Пирогов С.А. Модель динамического деформирования и разрушения разносопротивляющихся материалов при интенсивных ударных воздействиях. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 40–48. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2012-74-1-40-48>.
15. Голяков В.И., Наумкин А.В. 3D-моделирование поведения защитных железобетонных конструкций АЭС при падении самолета. *Супервычисления и математическое моделирование: Труды XV Международ. конф. Саров: РФЯЦ–ВНИИЭФ*, 2014. С. 175–184.
16. Murray Y.D. *Users Manual for LS-DYNA Concrete Material Model 159*. Colorado Springs, USA. 2007. 77 p.
17. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Vol. 25. Iss. 3. P. 299–326. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4).
18. *ABAQUS. Theory Guide. Vol. I.: Damaged Plasticity Model for Concrete and Other Quasi-Brittle Materials*. 2013. 1172 p.
19. *ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials: Concrete Damaged Plasticity*. 2013. 692 p.
20. Bazant Z.P., Planas J. *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*. New York: Routledge, 1998. 640 p. <https://doi.org/10.1201/9780203756799>.
21. Баженов Ю.М. *Бетон при динамическом нагружении*. М.: Стройиздат, 1970. 271 с.
22. Li H., Shi G. Material modeling of concrete for the numerical simulation of steel plate reinforced concrete panels subjected to impacting loading. *Journal of Engineering Materials and Technology*. 2017. Vol. 139. Iss. 2. P. 021011-1–021011-13. <https://doi.org/10.1115/1.4035487>.
23. Winkelbauer B.J. Phase I. Evaluation of selected concrete material models in LS-DYNA. *Civil Engineering Theses*. Lincoln, USA. 2015. 507 p.
24. *CEB-FIB Model Code 1990. Design Code*. Lausanne, Switzerland: Thomas Telford, 1993. 437 p.
25. Malvar L.J., Ross C.A. Review of strain rate effects for concrete in tension. *ACI Materials Journal*. 1998. Vol. 95. Iss. 6. P. 735–739. DOI:10.14359/418.
26. Kupfer H., Hilsdorf K., Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics-asce*. 1969. Vol. 66. Iss. 8. P. 656–666. DOI: 10.14359/7388.
27. Chervenka J., Papanikolaou V.K. Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 12. P. 2192–2220. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.01.004>.
28. Рекач В.Г. *Руководство к решению задач по теории упругости*. М.: Высшая школа, 1966. 229 с.
29. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *Journal of Engineering Mechanics*. 1998. Vol. 124. Iss. 8. P. 892–900. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:8\(892\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)).

#### References

1. D'yanov D.Yu., Spiridonov V.F., Ciberev K.V. i dr. Paket programm LOGOS. Modul resheniya dinamicheskikh zadach prochnosti [LOGOS software package. Module for solving dynamic problems of strength]. *Voprosy Atomnoj Nauki i Tekhniki. Seriya: Matematicheskoe Modelirovanie Fizicheskikh Processov* [Questions of Atomic Science and Technology. Series: Mathematical Modeling of Physical Processes]. 2018. Iss. 1. P. 3–14. (In Russian).

2. Holmquist T.J., Johnson G.R., Cook W.H. A computational constitutive model for concrete subjected to large strains, high strain rates, and high pressures. *14<sup>th</sup> International Symposium*. Quebec City, Canada. 1993. Vol. 2. P. 591–600.
3. Lukin A.V., Modestov V.S. Konechno-elementnoe modelirovanie i analiz napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya zhelezobetonnnykh konstruktsiy [Finite element modeling and analysis of the stress-strain state of reinforced concrete structures]. *Nauchno-Tekhnicheskie Vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta. Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific and Technical Statements of the St. Petersburg State Polytechnic University. Physical and Mathematical Sciences]. 2014. Vol. 3(201). P. 35–46 (In Russian).
4. Broadhouse B.J., Neilson A.J. *Modelling Reinforced Concrete Structures in DYNA3D*. Winfrith, UK. UKAEA Atomic Energy Establishment. 1987. 16 p.
5. *LS-DYNA Keyword User's Manual. Vol. II. Material Models*. Livermore. Livermore Software Technology Corporation. 2018. 1682 p.
6. Malvar L.J., Crawford J.E., Wesevich J.W., Simons D.A. Plasticity concrete material model for Dyna3D. *Int. J. Impact Eng.* 1997. Vol. 19. Iss. 9-10. P. 847–873. [https://doi.org/10.1016/S0734-743X\(97\)00023-7](https://doi.org/10.1016/S0734-743X(97)00023-7).
7. Magallanes J.M., Wu Y., Malvar L.J., Crawford J.E. Recent improvements to release III of the K&C concrete model. *Proceedings of 11<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference*. 2010. Vol. 1. Iss. 3. P. 37–48.
8. Malvar L.J., Simons D. Concrete material modeling in explicit computations. *Workshop on Recent Advances in Computational Structural Dynamics and High Performance Computing*. 1996. P. 165–194.
9. Magallanes J.M. Importance of concrete material characterization and modelling to predicting the response of structures to shock and impact loading. *WIT Transactions on the Built Environment*. 2008. Vol. 98. P. 241–250. DOI: 10.2495/SU080241.
10. Wu Y., Crawford J.E., Magallanes J.M. Performance of LS-DYNA concrete constitutive models. *12<sup>th</sup> International LS-DYNA Users Conference*. 2012. Vol. 1. P. 1–14.
11. Bazant Z.P. Instability, ductility, and size effect in strain-softening concrete. *Journal of Engineering Mechanics Division*. 1976. Vol. 102. Iss. 2. P. 331–344. DOI: 10.1061/jmcea3.0002111.
12. Chen W.F., Han D.J. *Plasticity for Structural Engineers*. New York. Springer-Verlag. 1988. 606 p.
13. Brannon R.M., Leelavanichkul S. *Survey of four Damage Models for Concrete*. Salt Lake City, USA. Sandia National Laboratories. 2009. 77 p. DOI: 10.2172/993922.
14. Pirogov S.A. Model dinamicheskogo deformirovaniya i razrusheniya raznosoprotivlyayushchikhsya materialov pri intensivnykh udarnykh vozdeystviyakh [A model of dynamic deformation and failure of hetero-resistant materials under intensive impact loading]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2012. Iss. 74. P. 40–48 (In Russian).
15. Golyakov V.I., Naumkin A.V. 3D-modelirovanie povedeniya zashchitnykh zhelezobetonnnykh konstruktsiy AES pri padenii samoleta [3D modeling of the behavior of NPP protective reinforced concrete structures in case of an aircraft crash]. *Supervychisleniya i matematicheskoe modelirovanie: Trudy XV Mezhdunarodnoy konferentsii* [Supercomputing and Mathematical Modeling: Proceedings of the XV Int. Conf.]. Sarov. RFYAC–VNIIEF. 2014. P. 175–184 (In Russian).
16. Murray Y.D. *Users Manual for LS-DYNA Concrete Material Model 159*. Colorado Springs, USA. 2007. 77 p.
17. Lubliner J., Oliver J., Oller S., Onate E. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*. 1989. Vol. 25. Iss. 3. P. 299–326. [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(89\)90050-4](https://doi.org/10.1016/0020-7683(89)90050-4).
18. *ABAQUS. Theory Guide. Vol. I.: Damaged Plasticity Model for Concrete and Other Quasi-Brittle Materials*. 2013. 1172 p.
19. *ABAQUS Analysis User's Guide. Vol. III: Materials: Concrete Damaged Plasticity*. 2013. 692 p.
20. Bazant Z.P., Planas J. *Fracture and Size Effect in Concrete and other Quasibrittle Materials*. New York. Routledge. 1998. 640 p. <https://doi.org/10.1201/9780203756799>.
21. Bazhenov Yu.M. *Beton pri dinamicheskom nagruzhении* [Concrete Under Dynamic Loading]. Moscow. Stroyizdat Publ. 1970. 271 p. (In Russian).

22. Li H., Shi G. Material modeling of concrete for the numerical simulation of steel plate reinforced concrete panels subjected to impacting loading. *J. Eng. Mater. Technol.* 2017. Vol. 139. Iss. 2. P. 021011-1–021011-13. <https://doi.org/10.1115/1.4035487>.
23. Winkelbauer B.J. Phase I. Evaluation of selected concrete material models in LS-DYNA. *Civil Engineering Theses*. Lincoln, USA. 2015. 507 p.
24. *CEB-FIB Model Code 1990. Design Code*. Lausanne, Switzerland. Thomas Telford. 1993. 437 p.
25. Malvar L.J., Ross C.A. Review of strain rate effects for concrete in tension. *ACI Mater. J.* 1998. Vol. 95. Iss. 6. P. 735–739. DOI:10.14359/418.
26. Kupfer H., Hilsdorf K., Rusch H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of Engineering Mechanics-asce*. 1969. Vol. 66. Iss. 8. P. 656–666. DOI: 10.14359/7388.
27. Chervenka J., Papanikolaou V.K. Three dimensional combined fracture-plastic material model for concrete. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 12. P. 2192–2220. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.01.004>.
28. Rekach V.G. *Rukovodstvo k resheniyu zadach po teorii uprugosti [A Guide to Solving Problems in the Theory of Elasticity]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1966. 229 p. (In Russian).
29. Lee J., Fenves G.L. Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures. *J. Eng. Mech.* 1998. Vol. 124. Iss. 8. P. 892–900. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(1998\)124:8\(892\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:8(892)).

#### **A MODIFIED MODEL OF KARAGOZIAN & CASE CONCRETE IN LOGOS SOFTWARE PACKAGE**

**Abakumov A.I., Safronov I.I., Smirnov A.S., Dyanov D.Y., Medvedkina M.V.**

*Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics,  
Sarov, Russian Federation*

abakumov@vniief.ru

*Received by the Editor 2023/02/20*

The paper describes a local model of concrete on the basis of Karagozian & Case (K&C) approach that is successfully used for computed description of the behavior of concrete and reinforced concrete constructions under dynamic loadings. A modified option of the K&C model is presented aiming at the expansion of functional capabilities of the model and providing the details of its computer realization, which is scarcely described in publications. Basic ratios of the model are provided: the equation of state of the environment with compacting; limiting surfaces of the initial yielding flow, maximum and residual strengths that depend on pressure; limiting surfaces as a function of the third invariant in the form of William-Vonke; evolution of the concrete damage; partially-associated plastic yielding to account for dilatancy; simplified regularization of the model at the stage of the loss of strength of the environment; account for isotropic reinforcement, the strain rate using the strengthening factor of the concrete; auto-generation of the model parameters. Besides, the following options have been introduced: degradation description of the elastic hardness of the concrete to simulate cyclic loading; account for the concrete behavior as a function of the strain rate by the mechanism of viscoplastic flow; model regularizing by the set energy of the concrete destruction. The represented modified model of K&C concrete is realized in explicit dynamic module of LOGOS software package for a supercomputer. The initial data and the scheme of the model algorithm are described. Model realization has been verified using test examples of simulation of the concrete samples behavior under quasi-static loading until destruction: uniaxial and triaxial compression, uniaxial and two-axial compression and stretching, cyclic uniaxial stretching. The considered problems show compliance of the K&C model and the behavior of the concrete in the experiments.

*Keywords:* K&C concrete model, concrete compacting and dilatancy, non-associated law of plastic yielding, limiting surfaces of concrete, computer model of the concrete, algorithm verification of K&C model.