

УДК 531.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-2-189-205

**МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ
НАЧАЛЬНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ
В ТОНКОСТЕННОМ ЦИЛИНДРЕ
С ПЕРЕМЕННЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ***

© 2023 г. **Ватульян А.О., Недин Р.Д., Юров В.О.**

*Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
Владикавказ, Российская Федерация*

aovatulyan@sfedu.ru, rdn90@bk.ru, vyurov@sfedu.ru

Поступила в редакцию 01.02.2023

Описана линеаризованная модель колебаний предварительно напряженного упругого тела в терминах несимметричного тензора напряжений Пиолы, приведена слабая постановка задачи. С помощью вариационного принципа Лагранжа построена постановка задачи об установившихся осесимметричных колебаниях тонкостенного цилиндра (оболочки) с переменными материальными свойствами при наличии неоднородного поля предварительных напряжений; сформулированы уравнения движения, главные и естественные граничные условия. Введены интегральные характеристики, осредняющие изменение предварительных напряжений и материальных свойств по толщине оболочки. На основе представленной модели с помощью метода пристрелки численно исследована задача о колебаниях функционально-градиентной начально напряженной цилиндрической оболочки, проанализировано влияние законов изменения материальных модулей и компонент предварительных напряжений на динамические характеристики (амплитудно-частотные характеристики, собственные и резонансные частоты колебаний), проведен сравнительный анализ решений в зависимости от параметра тонкостенности. Для рассмотренной цилиндрической оболочки с осевой неоднородностью на основе данных акустического зондирования исследована обратная задача о восстановлении двух законов неоднородности предварительных напряжений, характеризующих неоднородное начальное напряженно-деформированное состояние растяжения или раздувания. В качестве дополнительной информации рассмотрены данные измерений компонент смещений на поверхности цилиндра, заданные в конечном наборе точек при некоторой частоте установившихся колебаний; при этом материальные характеристики считались известными и зависящими от осевой координаты, что позволило задать функциональный градиент произвольного вида вдоль оси цилиндра. Режим зондирующего нагружения определялся заданием типа нагружения и частоты колебаний. Получены явные формулы для искомых законов неоднородности предварительных напряжений, про-

*Выполнено за счет гранта РФФИ №18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>, в Южном федеральном университете.

ведены вычислительные эксперименты по их восстановлению, отмечена высокая точность реконструкции вдали от торцов цилиндра при зондировании на частоте в окрестности первого резонанса.

Ключевые слова: цилиндр, оболочка, предварительные напряжения, неоднородность, функционально-градиентный материал, слабая постановка, амплитудно-частотные характеристики, собственные частоты, обратная задача, реконструкция.

Введение

Ввиду активного применения в промышленности конструкций из новых функционально-градиентных материалов (ФГМ) со сложными неоднородными физико-механическими свойствами, которые часто оказываются предварительно напряженными, одной из актуальных задач является разработка и развитие уточненных моделей деформирования таких материалов. Современные технологии изготовления ФГМ, например 3D-печать, позволяют создавать объекты сложной геометрии, не используя классические технологии, в том числе литье, требующее дополнительного производства пресс-форм. Для изготовления элементов конструкций из ФГМ обычно используются высокотемпературные технологии (наплавка, спекание, нагартовка и др.), вследствие чего после остывания в образцах часто появляются поля предварительных напряжений (ПН), оказывающих значительное влияние на их динамические характеристики [1].

Все большую популярность в последнее время приобретают композиционные ФГМ сэндвичи, сочетающие жесткие слои (ядро) и слои с непрерывной градиентной структурой. Благодаря свойству непрерывности материальных характеристик функционально-градиентные (ФГ) сэндвич-структуры позволяют сгладить существенную концентрацию межфазных напряжений на границе раздела слоев композита [2]. Этот тип композитной структуры вызвал огромный исследовательский интерес со стороны промышленных и научных кругов [3, 4]. На основе теории деформации сдвига высокого порядка авторы [5] исследовали статику, потерю устойчивости и колебания многослойных ФГМ балок. На основе гипотез ломаной нормали и метода Ритца в [6] представлен анализ устойчивости ФГМ сэндвич-панелей. В [7] авторы использовали уточненную модель более высокого порядка для проведения статического и вибрационного анализа ФГМ сэндвич-панелей. Согласно заключительным замечаниям, представленным в обзоре [8], в литературе к настоящему времени имеется очень мало публикаций по исследованию деформирования оболочечных конструкций, изготовленных из ФГМ.

Динамический отклик на распространение волн и возбуждение установившихся колебаний имеет решающее значение для мониторинга состояния конструкций и обнаружения повреждений, дефектов или полей остаточных напряжений оболочечных конструкций, и эта тема привлекает широкое внимание исследователей [9, 10]. Авторы [11] провели анализ распространения волн в трехмерной цилиндрической оболочке из графенового аэрогеля, лежащей на двухпараметрическом упругом основании. Ряд исследований посвящен моделированию и динамическому анализу многослойных и ФГ углеродных нанотрубок, начиная со статей Liew и Wang, применивших теории оболочек Лява и Купера – Нахди для изучения распространения волн в одностенных и двустенных углеродных нанотрубках [12]. Отметим здесь еще несколько публикаций, посвященных использованию теории неоднородных ци-

линдрических оболочек в исследованиях деформирования углеродных нанотрубок в различных условиях [13, 14]. В [15] авторами исследована задача распространения тепловых волн в трехслойных цилиндрических оболочках, состоящих из металлического внутреннего слоя и двух поверхностных ФГМ-слоев, в теплопроводной среде с использованием теории деформации сдвига первого порядка; при этом материальные свойства, зависящие от температуры, непрерывно менялись вдоль координаты по толщине.

В литературе наблюдается дефицит исследований, посвященных идентификации существенно неоднородных факторов предварительного напряженно-деформированного состояния (ПНДС). Главным образом это связано со сложностью математического аппарата и вычислительными трудностями, возникающими на этапе постановки и решения сопутствующих обратных задач. Несколько линеаризованных подходов к моделированию ПН приведено в [16]. На основе этих подходов в [16–18] описан ряд методик восстановления ПНДС в упругих телах, в том числе из ФГ композитов, с использованием метода акустического зондирования. Предлагаемые методики в основном базируются на итерационно-регуляризационных схемах решения соответствующих коэффициентных обратных задач. Такие подходы могут быть полезны при работе с данными измерений недостаточного объема (например, при наличии измерений поля перемещений на участке поверхности тела), которые можно получить в ходе проведения экспериментов по неразрушающему зондированию. Что касается исследований однородного ПНДС, в литературе часто встречается подход к решению задач о восстановлении поля ПН в различных конструкциях, основанный на априорной информации о том, что ПНДС сформировано в результате приложения механической нагрузки. В статье [19] изучалось ПНДС в сварном шве кольцевой конструкции, моделируемой цилиндрическим обручем. Метод сверления отверстий (*blind hole method*) использовался для проверки распределения остаточного напряжения в кольцевой конструкции, и результаты испытаний сравнивались с результатами расчета методом конечных элементов (МКЭ). Это позволило сформулировать рекомендации по оптимальному режиму сварки кольцевых конструкций.

В настоящее время анализ составных ФГ конструкций имеет приложения и в биомеханике. Так, дентальные имплантаты имеют цилиндрическую или коническую форму с винтовой структурой, и большинство имплантатов с винтовой фиксацией имеют однородную твердую структуру [20]. В этом случае модуль Юнга имплантатов значительно выше, чем у окружающих тканей, и имплантаты выходят из строя из-за эффекта экранирования напряжений. Таким образом, дентальные имплантаты с пористой ФГ структурой передают напряжение на окружающие ткани и обеспечивают долговременную стабильность. Такие материалы привлекли значительный интерес исследователей из-за их легкого веса, превосходной способности поглощать энергию и высоких термостойких свойств. В [21] представлены результаты экспериментальных исследований особенностей эксплуатации ПН оболочек с учетом влияния температурного нагружения. В статье [22] описаны результаты испытаний на устойчивость 20 металлических тонкостенных цилиндрических оболочек при сложном локализованном осевом сжатии, проведены конечно-элементные (КЭ) расчеты для изучения потери устойчивости цилиндрической оболочки.

В [18] на основе общей линеаризованной постановки задачи о движении ПН упругого тела исследована задача о радиальных колебаниях упругой изотропной трубы. Представлен сравнительный анализ влияния уровней остаточных напряжений

и деформаций на частотные характеристики трубы. Изучена обратная задача идентификации неоднородного ПНДС на основе дополнительных данных о функции перемещений, измеренной на внешней границе в некотором диапазоне частот. Для решения обратной задачи предложен специальный итерационный подход, основанный на технике регуляризации; проведены вычислительные эксперименты по восстановлению предварительного состояния. В [23] исследована задача для конечного цилиндра в условиях сложного начального напряженного состояния, описываемого четырьмя ненулевыми компонентами тензора ПН. На основе метода возмущений выведены формулы, позволяющие приближенно найти изменения резонансных частот, вызванные наличием неоднородного поля ПН, проанализировано влияние уровней ПН на изменение собственных частот. В статье [24] изучается обратная задача по восстановлению трех параметров неоднородного поля ПН известной структуры.

В настоящей статье приведено исследование осесимметричных колебаний тонкостенного ФГ цилиндра (оболочки) с переменными материальными свойствами при наличии неоднородного поля ПН. Изучено влияние законов изменений материальных модулей и компонент ПН на динамические характеристики. Рассмотрена обратная задача о восстановлении ПН на основе измерений смещений на поверхности оболочки.

1. Линеаризованная модель деформирования ПН тела

С использованием принципа наложения малых деформаций на конечные будем рассматривать малые колебания упругого ПН тела под действием периодической нагрузки вида $\mathbf{P}e^{i\omega t}$, приложенной на части поверхности S_σ в текущей конфигурации. Соответствующая полная краевая задача после отделения временного множителя $e^{i\omega t}$ в метрике естественной недеформированной конфигурации примет вид [16, 25]:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho\omega^2 \mathbf{u} &= 0, \\ \mathbf{u}|_{S_u} &= 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}|_{S_\sigma} = \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}$ – линеаризованный добавочный несимметричный тензор напряжений Пиоли, \mathbf{u} – вектор малых добавочных перемещений, $\boldsymbol{\sigma}_0$ и $\boldsymbol{\sigma}$ – симметричные тензоры начальных и добавочных напряжений Кирхгофа, ρ – плотность, ω – частота колебаний, \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела; на части границы S_u тело жестко зашпемлено. С учетом малости градиента начальной деформации будем считать, что при переходе из начальной конфигурации в текущую конфигурацию изменением вектора нормали можно пренебречь. Слабая постановка задачи (1) имеет вид [16, 17]:

$$\int_V \mathbf{T} : \nabla \mathbf{v} dV - \omega^2 \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{v} dS = 0, \quad \mathbf{v}|_{S_u} = 0, \quad (2)$$

где введена пробная вектор-функция \mathbf{v} , удовлетворяющая главным граничным условиям из (1); V – занимаемый телом объем; $:$ – операция полного тензорного умножения (в компонентной форме для ортонормированного базиса для тензоров 2-го ранга имеем $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij}B_{ij}$).

Представленная модель позволяет описывать колебания тела при наличии неоднородных полей ПН различной природы.

2. Постановка задачи о колебаниях ПН неоднородной цилиндрической оболочки

В цилиндрической системе координат на основе общей линеаризованной постановки (1) рассмотрим задачу об осесимметричных колебаниях ПН цилиндра с переменными материальными характеристиками, занимающего область $V = \{r \in [R_1, R_2], \phi \in [0, 2\pi], z \in [0, L]\}$ (рис. 1).

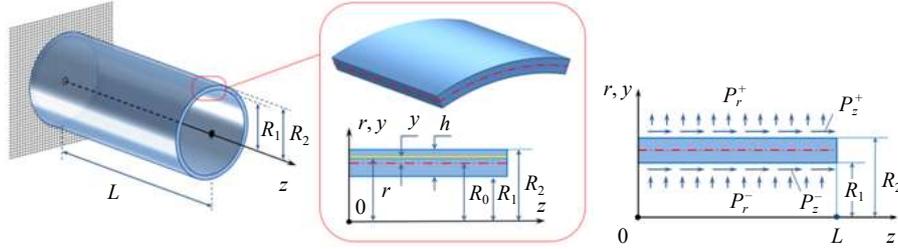


Рис. 1. Цилиндрическая оболочка и схема ее нагружения

Будем считать, что один торец цилиндра жестко закреплён, другой свободен от нагрузки; колебания вызваны периодической нагрузкой, приложенной ко внутренней и внешней поверхностям, с амплитудами $P_r^\mp(z)$ (внутреннее и внешнее давление) и $P_z^\mp(z)$ (касательные нагрузки):

$$u_r = 0, u_\phi = 0, u_z = 0 \text{ при } z = 0; \quad T_{zr} = 0, T_{z\phi} = 0, T_z = 0 \text{ при } z = L;$$

$$T_r = P_r^-, T_{r\phi} = 0, T_{rz} = P_z^- \text{ при } r = R_1; \quad T_r = P_r^+, T_{r\phi} = 0, T_{rz} = P_z^+ \text{ при } r = R_2.$$

Для построения упрощенной модели цилиндрической оболочки введем кинематические гипотезы и обозначения:

$$u_r = w, \quad u_\phi = 0, \quad u_z = u - yw_{,z}, \quad (3)$$

где $u = u(z)$ – продольное перемещение, $w = w(z)$ – радиальное перемещение, $h = R_2 - R_1$ – толщина стенки оболочки, $R_0 = (R_2 + R_1)/2$. Также введена вспомогательная радиальная координата $y = r - R_0$ относительно срединной поверхности (см. рис. 1).

Будем рассматривать изотропный случай, считая, что свойства материала описываются двумя переменными параметрами E, ν (модуль Юнга и коэффициент Пуассона), в общем случае зависящими от координат y, z . Компоненты тензоров напряжений и деформаций с учетом гипотез (3) будут иметь вид:

$$T_\phi = \sigma_\phi + \sigma_\phi^0 \frac{w}{r}, \quad T_z = \sigma_z + \sigma_z^0 (u_{,z} - yw_{,zz}), \quad T_{zr} = \sigma_z^0 w_{,z}, \quad (4)$$

$$\sigma_\phi = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\phi + \nu\varepsilon_z), \quad \sigma_z = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_z + \nu\varepsilon_\phi), \quad \varepsilon_\phi = \frac{w}{y+R_0}, \quad \varepsilon_z = u_{,z} - yw_{,zz}. \quad (5)$$

Построим далее уравнения и граничные условия для тонкостенной оболочки на основе вариационного принципа. Рассмотрим уравнение слабой постановки (2) и воспользуемся методом вариации произвольных постоянных, подставив вместо компонент пробного вектора \mathbf{v} соответствующие вариации перемещений $\delta \mathbf{u}$:

$$I_T - \omega^2 I_p - I_p = 0, \quad (6)$$

где

$$I_T = \int_V \mathbf{T} : \nabla \delta \mathbf{u} dV, \quad I_\rho = \int_V \rho \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} dV, \quad I_P = \int_{S_\sigma} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{u} dS.$$

Учитывая гипотезы (3) для компонент смещений u_r, u_z и соответствующих вариаций $\delta u_r, \delta u_z$, получим

$$I_T = \int_V \left[\frac{E}{1-\nu^2} \left[(\delta u_{,z} - y \delta w_{,zz})(u_{,z} - y w_{,zz}) + \frac{w \delta w}{(y+R_0)^2} \right] + \sigma_\phi^0 \frac{w \delta w}{(y+R_0)^2} + \frac{E\nu}{1-\nu^2} \times \right. \\ \left. \times \frac{(u_{,z} - y w_{,zz}) \delta w + (\delta u_{,z} - y \delta w_{,zz}) w}{y+R_0} + \sigma_z^0 [w_{,z} \delta w_{,z} + (u_{,z} - y w_{,zz})(\delta u_{,z} - y \delta w_{,zz})] \right] dV, \\ I_\rho = \int_V \rho (w \delta w + (u - y w_{,z})(\delta u - y \delta w_{,z})) dV, \quad I_P = \int_{S_\sigma} (P_r \delta w + P_z (\delta u - y \delta w_{,z})) dS. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение интегральные характеристики, представляющие собой осреднение основных параметров задачи по толщине оболочки, для материальных модулей и ПН

$$D^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2} y^k dy, \quad Y^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E\nu}{1-\nu^2} y^k dy, \\ \sigma_{ij}^{0(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij}^0 y^k dy, \quad \rho^{(k)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho y^k dy, \quad k = 0, 2, \quad (8) \\ \tilde{D}^{(k)} = D^{(k)} R_0 + D^{(k+1)}, \quad \tilde{Y}^{(k)} = Y^{(k)} R_0 + Y^{(k+1)}, \\ \tilde{\sigma}_\alpha^{0(k)} = \sigma_\alpha^{0(k)} R_0 + \sigma_\alpha^{0(k+1)}, \quad \tilde{\rho}^{(k)} = \rho^{(k)} R_0 + \rho^{(k+1)}.$$

Все введенные характеристики (8) – это функции осевой координаты z . В силу одномерности задачи частная производная по осевой координате z заменяется обыкновенной производной, которую будем обозначать штрихом. Воспользуемся в (7) формулой интегрирования по частям и сгруппируем слагаемые при вариациях $\delta w, \delta u$, учитывая главные граничные условия $u = 0, w = 0, w' = 0$ при $z = 0$:

$$\int_0^L \left[\{-N'_z - \omega^2 (\tilde{\rho}^{(0)} u - \tilde{\rho}^{(1)} w') - q_z\} \delta u + \right. \\ \left. + \{N_\phi / R_0 + M'_z - \Psi' - \omega^2 (\tilde{\rho}^{(0)} w + (\tilde{\rho}^{(1)} u - \tilde{\rho}^{(2)} w')') - q_r\} \delta w \right] dz + \\ + N_z \delta u \Big|_{z=L} - \{M'_z - \Psi - \omega^2 (\tilde{\rho}^{(1)} u - \tilde{\rho}^{(2)} w') + m_z\} \delta w \Big|_{z=L} + M_z \delta w' \Big|_{z=L} = 0. \quad (9)$$

Здесь введены следующие обозначения для усилий и моментов:

$$N_z = Q^{(0)}, \quad M_z = -Q^{(1)}, \quad Q^{(k)} = Y^{(k)} w + (\tilde{D}^{(k)} + \tilde{\sigma}_z^{0(k)}) u' - (\tilde{D}^{(k+1)} + \tilde{\sigma}_z^{0(k+1)}) w'', \\ \frac{N_\phi}{R_0} = \left(D^{(0)} - \frac{D^{(1)}}{R_0} + \frac{D^{(2)}}{R_0^2} + \sigma_\phi^{0(0)} - \frac{\sigma_\phi^{0(1)}}{R_0} + \frac{\sigma_\phi^{0(2)}}{R_0^2} \right) \frac{w}{R_0} + Y^{(0)} u' - Y^{(1)} w'', \\ \Psi = \tilde{\sigma}_z^{0(0)} w', \quad q_z = \left(R_0 - \frac{h}{2} \right) P_z^- - \left(R_0 + \frac{h}{2} \right) P_z^+, \\ q_r = \left(R_0 - \frac{h}{2} \right) \left(P_r^- - \frac{h}{2} (P_z^-)' \right) - \left(R_0 + \frac{h}{2} \right) \left(P_r^+ + \frac{h}{2} (P_z^+)' \right),$$

$$t_z = \frac{h}{2} \left(\left(R_0 - \frac{h}{2} \right) P_z^- + \left(R_0 + \frac{h}{2} \right) P_z^+ \right).$$

Формула для N_ϕ является приближением первыми тремя членами ряда Тейлора. Приравнивая нулю коэффициенты при независимых вариациях в (9), получим уравнения движения:

$$N'_z + \omega^2 (\tilde{\rho}^{(0)} u - \tilde{\rho}^{(1)} w') + q_z = 0, \quad (10)$$

$$\frac{N_\phi}{R_0} + M'_z - \Psi' - \omega^2 (\tilde{\rho}^{(0)} w + (\tilde{\rho}^{(1)} u - \tilde{\rho}^{(2)} w')) - q_r = 0 \quad (11)$$

с главными и естественными граничными условиями:

$$u = w = w' = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (12)$$

$$N_z = 0, \quad M_z = 0, \quad -M'_z + \Psi + \omega^2 (\tilde{\rho}^{(1)} u - \tilde{\rho}^{(2)} w') = t_z \quad \text{при } z = L.$$

3. Анализ ПНДС в цилиндрической оболочке с осевой неоднородностью

Предложенная модель тонкостенного ПН цилиндра позволяет проводить анализ влияния ПНДС на амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) и резонансные частоты, который может быть положен в основу изучения обратных задач, когда требуется реконструкция параметров ПН на базе акустического зондирования. Например, для рассмотренной цилиндрической оболочки с осевой неоднородностью на основе данных акустического зондирования можно поставить задачу восстановления параметров ПН.

Введем в рассмотрение безразмерные комплексы:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{z}{L} \in [0, 1], \quad \eta = \frac{2y}{h} \in [-1, 1], \quad w(z) = L\hat{w}(\xi), \quad u(z) = L\hat{u}(\xi), \\ E(z, y) = E_0 \hat{E}(\xi, \eta), \quad \rho(z, y) = \rho_0 \hat{\rho}(\xi, \eta), \quad \sigma_\alpha^0(z, y) = \sigma_0 \hat{\sigma}_\alpha^0(\xi, \eta), \\ P_\alpha^\pm = E_0 \hat{P}_\alpha^\pm, \quad P_\alpha^0 = \sigma_0 \hat{P}_\alpha^0 \quad (\alpha = \phi, z), \\ E_0 = \max_{z, y} (E(z, y)), \quad \rho_0 = \max_{z, y} (\rho(z, y)), \quad \sigma_0 = \max_{z, y} |\sigma_\alpha^0(z, y)|, \\ D^{(k)} = E_0 \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} \hat{D}^{(k)}, \quad Y^{(k)} = E_0 \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} \hat{Y}^{(k)}, \quad \rho^{(k)} = \rho_0 \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} \hat{\rho}^{(k)}, \quad (13) \\ \sigma_\alpha^{0(k)} = \tau E_0 \left(\frac{h}{2} \right)^{k+1} \hat{\sigma}_\alpha^{0(k)}, \quad \hat{g} = \frac{\hat{E}}{1 - \nu^2}, \\ \hat{D}^{(k)} = \int_{-1}^1 \hat{g} \eta^k d\eta, \quad \hat{Y}^{(k)} = \nu \hat{D}^{(k)}, \quad \hat{\rho}^{(k)} = \int_{-1}^1 \hat{\rho} \eta^k d\eta, \quad \hat{\sigma}_\alpha^{0(k)} = \int_{-1}^1 \hat{\sigma}_\alpha^0 \eta^k d\eta, \\ \kappa^2 = \frac{\rho_0 R_0^2 \omega^2}{E_0}, \quad \varepsilon = \frac{h}{R_0}, \quad \xi_0 = \frac{R_0}{L}, \quad \tau = \frac{\sigma_0}{E_0}. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай оболочки с осевой неоднородностью при материальных характеристиках E , ν и ρ , зависящих от продольной координаты и не зависящих от поперечной. Тогда осредненные характеристики примут вид:

$$\hat{D}^{(k)} = \hat{g} \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}, \quad \hat{\rho}^{(k)} = \hat{\rho} \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Полагая $\hat{P}_\alpha^\pm = \hat{P}_\alpha/2$, уравнения (10), (11) в безразмерной форме запишутся в виде:

$$\varepsilon \left\{ [2\hat{g}\nu\hat{w} + \xi_0(2\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_z^{0(0)})\hat{u}']' + \frac{2\kappa^2}{\xi_0}\hat{\rho}\hat{u} - \hat{P}_z \right\} + \frac{1}{2}\varepsilon^2\tau\{\xi_0[\hat{\sigma}_z^{0(1)}(\hat{u}' - \xi_0\hat{w}'')]\}' - \\ - \frac{1}{4}\varepsilon^3 \left\{ \xi_0^2 \left[\left(\frac{2}{3}\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_z^{0(2)} \right) \hat{w}'' \right]' + \frac{2}{3}\kappa^2\hat{\rho}\hat{w}' \right\} = 0, \quad (14)$$

$$\varepsilon \left\{ \frac{1}{\xi_0}(2\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_\phi^{0(0)})\hat{w} + 2\hat{g}\nu\hat{u}' - \xi_0\tau(\hat{\sigma}_z^{0(0)}\hat{w}')' - \frac{2\kappa^2}{\xi_0}\hat{\rho}\hat{w} + \xi_0\hat{P}_z' + \hat{P}_r \right\} - \\ - \frac{1}{2}\varepsilon^2\tau \left\{ \frac{1}{\xi_0}\hat{\sigma}_\phi^{0(1)}\hat{w} + \xi_0(\hat{\sigma}_z^{0(1)}\hat{w}')' + \xi_0[\hat{\sigma}_z^{0(1)}\xi_0\hat{u}']'' \right\} + \\ + \frac{1}{4}\varepsilon^3 \left\{ \frac{1}{\xi_0} \left(\frac{2}{3}\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_\phi^{0(2)} \right) \hat{w} - \xi_0^2 \left[\left(\frac{2}{3}\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_z^{0(2)} \right) (\hat{u}' - \xi_0\hat{w}'') \right]'' - \right. \\ \left. - \kappa^2 \left(\frac{2}{3}\hat{\rho}(\hat{u} - \xi_0\hat{w}') \right)' \right\} + \frac{1}{8}\varepsilon^4\tau\{\xi_0^3[\hat{\sigma}_z^{0(3)}\hat{w}''']\} = 0. \quad (15)$$

Задача содержит два малых параметра – геометрический $\varepsilon = h/R_0$ и силовой $\tau = \sigma_0/E_0$. Удерживая в уравнениях (14), (15) только слагаемые порядков ε , $\varepsilon\tau$ (включающие продольную жесткость), ε^3 (включающие цилиндрическую жесткость) и отбрасывая члены порядка $\varepsilon^2\tau$, $\varepsilon^3\tau$ и $\varepsilon^4\tau$, получим (сократив при этом уравнения на общий множитель ε) следующие уравнения:

$$\left[\hat{g} \left(2\nu\hat{w} - \frac{1}{6}\varepsilon^2\xi_0^2\hat{w}'' \right) + \xi_0(2\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_z^{0(0)})\hat{u}' \right]' + \kappa^2\hat{\rho} \left(\frac{2}{\xi_0}\hat{u} - \frac{1}{6}\varepsilon^2\hat{w}' \right) - \hat{P}_z = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{\xi_0} \left[(2\hat{g} + \tau\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}) + \frac{1}{6}\varepsilon^2\hat{g} \right] \hat{w} - \frac{1}{6}\varepsilon^2\xi_0^2[\hat{g}(\hat{u}' - \xi_0\hat{w}'')]'' + 2\nu\hat{g}\hat{u}' - \\ - \xi_0\tau(\hat{\sigma}_z^{0(0)}\hat{w}')' - \frac{2\kappa^2}{\xi_0}\hat{\rho}\hat{w} - \frac{1}{6}\varepsilon^2\kappa^2(\hat{\rho}(\hat{u} - \xi_0\hat{w}'))' + \xi_0\hat{P}_z' + \hat{P}_r = 0. \quad (17)$$

Замыкают постановку краевой задачи об отыскании функций \hat{u} , \hat{w} соответствующие безразмерные граничные условия при $\xi = 0$ и $\xi = 1$. Эта краевая задача может быть исследована численно, например, методом пристрелки, при произвольных законах неоднородности для материальных характеристик \hat{g} , ν , $\hat{\rho}$ и ПН $\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}$, $\hat{\sigma}_z^{0(0)}$.

Интересно отметить, что уравнения (16), (17) содержат члены не выше третьей степени по малому геометрическому параметру ε с учетом того, что физический малый параметр τ соответствует второй степени геометрического, то есть $\tau \approx \varepsilon^2$ при принятых допущениях. Учитывая, что диапазон изменения уровней ПН в линейной теории обычно принимается $\tau = 10^{-6} \div 10^{-3}$, соответствующий этим уровням геометрический параметр ε изменяется в приблизительном диапазоне от 10^{-3} до $1/32$, что описывает достаточно широкий класс тонких цилиндрических оболочек, для которых

общепринятым диапазоном изменения параметра относительной толщины ε является ($10^{-3} \div \varepsilon^*$), при этом граница между тонкими и толстыми оболочками весьма условна и, как правило, определяется значениями $1/30 < \varepsilon^* < 1/20$ [26, 27].

Рассмотрим задачу идентификации законов неоднородности $\hat{\sigma}_z^{0(0)}$ и $\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}$ по дополнительной информации о полях перемещений \hat{u} , \hat{w} , заданных в конечном наборе точек при некоторой частоте колебаний. Материальные характеристики считаются известными и могут зависеть от осевой координаты, что позволяет задать функциональный градиент произвольного вида вдоль оси цилиндра. Режим зондирующего нагружения определяется заданием одной из величин периодической нагрузки \hat{P}_r , \hat{P}_z либо их сочетания. По измеренным значениям смещений можно построить гладкие аналитические функции одной переменной ξ с помощью сплайн-интерполяции и далее вычислить их производные, входящие в формулы (16), (17).

Рассмотрим случай свободного от нагрузки правого торца. Заметим, что в первое уравнение входит только закон неоднородности $\hat{\sigma}_z^{0(0)}$. Интегрируя уравнение (16) по осевой координате и удовлетворяя граничному условию $\hat{N}_z|_{\xi=1} = 0$, где $\hat{N}_z(\xi) = 2N_z(L\xi)/(hR_0E_0)$, выразим

$$\hat{\sigma}_z^{0(0)} = - \frac{2\hat{g}(v\hat{w} + \xi_0\hat{u}' - (1/12)\varepsilon^2\xi_0^2\hat{w}'') + \int_1^\xi [\kappa^2\hat{\rho}((2/\xi_0)\hat{u} - (1/6)\varepsilon^2\hat{w}') - \hat{P}_z]d\xi}{\tau\xi_0\hat{u}'}. \quad (18)$$

Далее из второго уравнения (17) можно выразить закон неоднородности $\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}$; входящий при этом в выражение член $(\hat{\sigma}_z^{0(0)}\hat{w}')'$ можно также найти приближенно с помощью сплайн-интерполяции.

4. Вычислительные эксперименты

Сравнение с классическим и КЭ решениями. С целью верификации разработанной модели тонкостенного цилиндра проведено сравнение решения задачи в постановке (10)–(12) (далее – модель I) с двумя другими решениями:

– аналитическое классическое решение одномерного (1D) уравнения, описывающего прогиб цилиндрической оболочки длиной L при действии внутренней нормальной нагрузки q_r и осевого усилия N_z (модель II) [26]:

$$(Dw'')'' + \frac{Ehw}{R_0^2} = \frac{1}{R_0} \left(q_r - \frac{vN_z}{R_0} \right), \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \quad (19)$$

– решение 2D-задачи для модели толстостенного цилиндра в предположении осесимметричного характера деформации [24] (модель III).

Сравнение описанных моделей проведено в случае статики при отсутствии ПН. Геометрические и физические параметры для модели III приняты такими же, как для оболочки; функция $w(z)$ из моделей I–II сравнивалась с функцией $w^*(z) = u_r(r, z)|_{r=R_0}$ – радиальной составляющей вектора перемещений в срединной поверхности цилиндра в рамках модели III. Для уравнения (19) рассмотрено два типа граничных условий – при жестко защемленных обоих торцах цилиндра $w(0) = w'(0) = w(L) = w'(L) = 0$ и в случае консольного закрепления при свободном правом торце $w(0) = w'(0) = 0$, $(Dw'')(L) = 0$, $(Dw''')(L) = 0$. Граничные условия приведены для модели II; аналогичные формы граничных условий для модели I приведены в размерном виде в формулах (12).

Исследована цилиндрическая оболочка с параметрами $L = 0,75$ м, $\nu = 0,28$,

$E = 198$ ГПа, $\rho = 7884$ кг/м³; в качестве нагрузки рассмотрено внутреннее давление $q_r = \sigma(R_0 - 0,5h)$, $\sigma = 5 \cdot 10^{-5}E$; $q_z = 0$. На рис. 2, 3 представлены результаты расчетов зависимости прогиба срединной поверхности оболочки от пространственной координаты и частоты. Приняты следующие обозначения: черная сплошная линия – 1D-решение, модель I; точки – классическое 1D-решение, модель II; красный пунктир – 2D-решение, модель III.

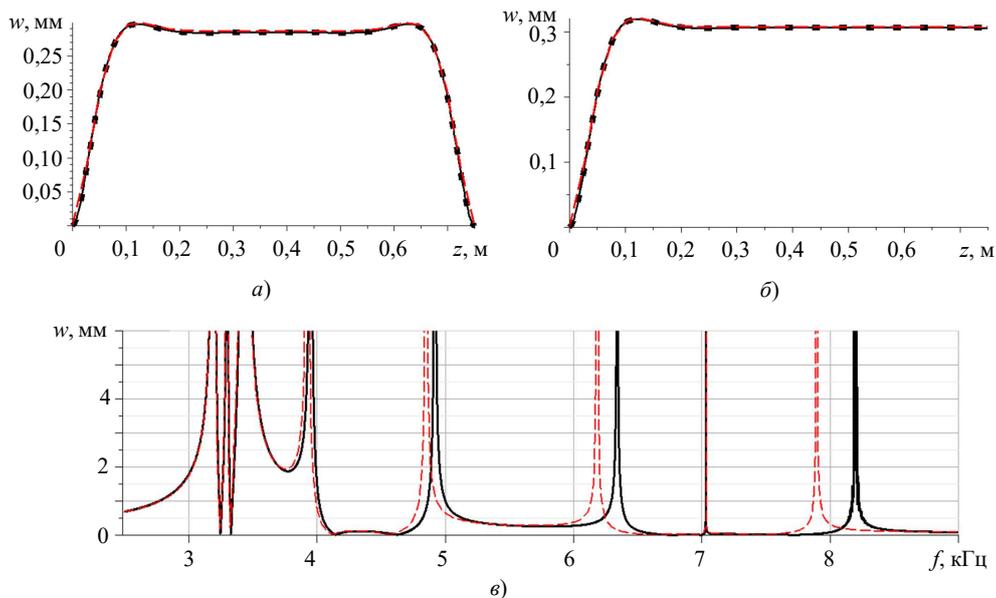


Рис. 2. Сравнение функции прогиба срединной поверхности для различных моделей при защемленных торцах (а), консольном закреплении (б), АЧХ для моделей I, III (в)

Расчеты задачи в рамках модели I велись с помощью метода пристрелки; решение для модели III получено с помощью МКЭ и описано в [24]. На рис. 2 представлены результаты сравнения функции прогиба срединной поверхности для моделей I–III при $h = 0,01$ м, $R_0 = 0,25$ м ($\xi_0 = 1/3$, $\varepsilon = 1/25$). Отметим хорошее согласование всех трех рассмотренных моделей. Расчеты показали, что различие между 1D- и 2D-моделями растет при увеличении толщины стенки цилиндра; это объясняется неприменимостью одномерной модели оболочки для исследования деформирования толстостенных цилиндров. Все результаты расчета прямой задачи представлены в размерном виде.

Проведен анализ АЧХ для функции прогиба срединной поверхности и резонансных частот в рамках моделей I, III для защемленной обоими торцами однородной оболочки (рис. 2в). Характеристики измерены на срединной поверхности цилиндра при $z = L/2$.

Из полученных результатов видно, что резонансные частоты для 1D- и 2D-моделей разнятся сильнее с увеличением толщины оболочки. Отметим близость АЧХ в низкочастотной области.

Неоднородный ФГ цилиндр. Рассмотрим в качестве материала неоднородный ФГМ с градиентом вида

$$E = E_0 \left(1 + \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right) \left(1 + \frac{z}{2L} \right).$$

В расчетах для модели I вычислялись соответствующие интегральные характеристики (8)–(10), а для модели III закон неоднородности задавался в явном виде по обеим координатам z, y . На рис. 3 приведены АЧХ для моделей I (черная линия), III (красная линия). Остальные параметры оболочки соответствуют описанным.

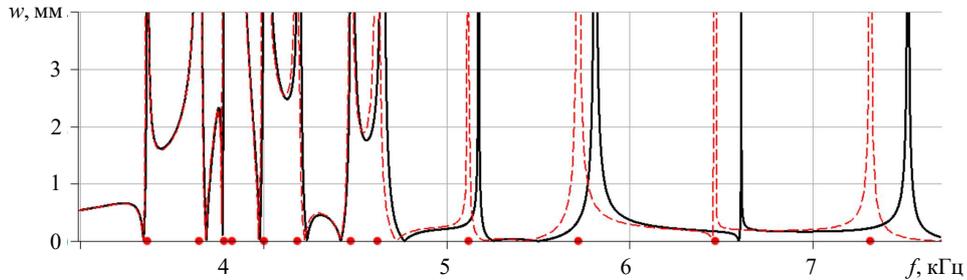


Рис. 3. АЧХ для ФГ оболочки для моделей I, III.

Из рисунка видно, что в сравнении с однородным случаем (рис. 2в) рассмотренный частотный диапазон содержит большее число резонансов, что обусловлено более высоким средним значением жесткости оболочки. При этом 1D- и 2D-модели достаточно близки по АЧХ в том же низкочастотном диапазоне, что и для однородной оболочки; существенное расхождение резонансов наблюдается на частотах выше 4 кГц.

Анализ влияния ПНДС на динамические характеристики. Рассмотрим ПНДС трех типов: ПНДС (1) – ПН отсутствуют, ПНДС (2) – осевое растяжение при $\sigma_z^0 = \sigma_{\max}$, ПНДС (3) – раздувание при $\sigma_\phi^0 = \sigma_{\max}$. В таблице 1 приведены результаты анализа влияния постоянных величин ПН, которые в качестве модельного примера приняты равными величине $\sigma_{\max} = 0,4 \cdot 10^9$ Па (далее будет использоваться как максимально допустимый уровень ПН), на первые шесть собственных частот (СЧ) колебаний.

Таблица 1
Влияние постоянных компонент ПН на собственные частоты (Гц)

№ СЧ	ПНДС (1)	ПНДС (2)	ПНДС (3)
1	2948,22	2960,26	2950,29
2	3193,99	3219,89	3197,14
3	3263,87	3316,59	3266,96
4	3298,58	3317,82	3301,68
5	3427,05	3509,23	3430,03
6	3573,36	3664,06	3575,92

Из таблицы видно, что влияние постоянной компоненты ПН σ_z^0 существенно больше, чем влияние компоненты σ_ϕ^0 . На рис. 4 приведены АЧХ для тонкой однородной оболочки (модель I) для ПНДС (1) – тонкая линия, ПНДС (2) – толстая линия, ПНДС (3) – штриховая линия.

Из результатов следует, что ПНДС начального растяжения вносит значительно больший вклад в АЧХ, чем ПНДС начального раздувания по отношению к начально ненапряженному состоянию.

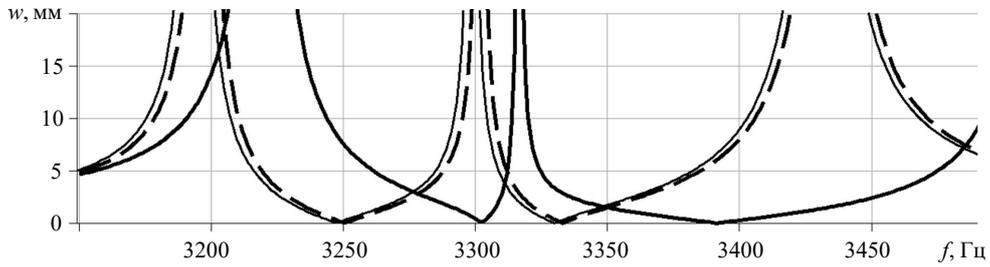


Рис. 4. АЧХ для тонкой однородной оболочки при ПНДС трех типов

На рис. 5 приведены некоторые формы колебаний неоднородной оболочки с параметрами $\xi_0 = 1/3$, $\varepsilon = 0,16$ при наличии и отсутствии ПН осевого растяжения $\sigma_z^0 = \sigma_{\max}$ (ПНДС (1): 1D – тонкая черная линия, 2D – тонкая красная штриховая линия; ПНДС (2): 1D – толстая черная линия, 2D – толстая красная штриховая линия) для моделей I, III при частотах $f = \{3400, 3600, 4600, 5700\}$ Гц.

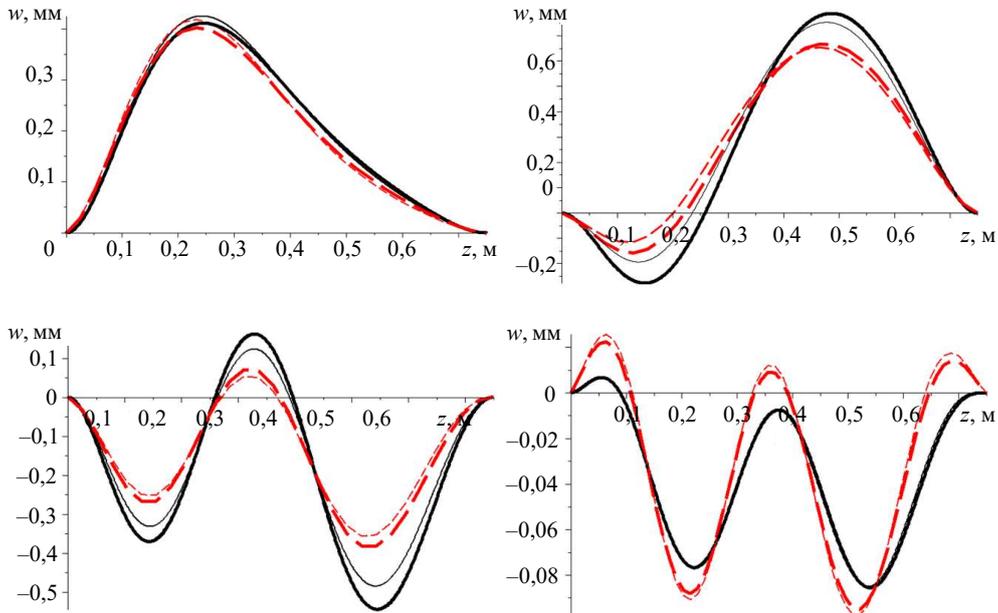


Рис. 5. Формы колебаний неоднородной оболочки для моделей I, III для ПНДС (1) и ПНДС (2)

Отметим, что с увеличением относительной толщины цилиндра погрешность 1D-модели I по сравнению с 2D-моделью III растет, что отражается на АЧХ; для случаев относительно толстой стенки цилиндра ($\varepsilon > 0,1$) погрешность 1D-модели (в амплитудах АЧХ) может превышать поправки, которые вносят ПН в АЧХ, для обеих моделей, как видно из рис. 5.

Примеры реконструкции ПНДС. Рассмотрим консольно-закрепленную цилиндрическую оболочку с осевой неоднородностью, характеризуемой изменением $E = E_0 (1/2 + (z/L)^2)$. На рис. 6 приведены результаты реконструкции ПНДС, характеризуемого двумя законами неоднородности $\hat{\sigma}_z^{0(0)}$ и $\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}$, образованного в ре-

зультате приложения начальной нагрузки q_z^0, q_r^0 в двух случаях: 1) q_z^0, q_r^0 постоянны (рис. 6а); 2) q_z^0, q_r^0 переменны и изменяются по закону синуса: $q_\alpha^0(z) = \sin(\pi z/L)$ (рис. 6б). При этом максимальный уровень ПН не превышает $10^{-4}E_0$. Частота колебаний выбрана в окрестности первого резонанса, зондирующая нагрузка направлена вдоль оси цилиндра ($\hat{P}_z = \text{const}, \hat{P}_r = 0$). Процедура реконструкции основана на методике, изложенной в п. 3. На рисунке сплошная линия – точное решение, точки – реконструкция.

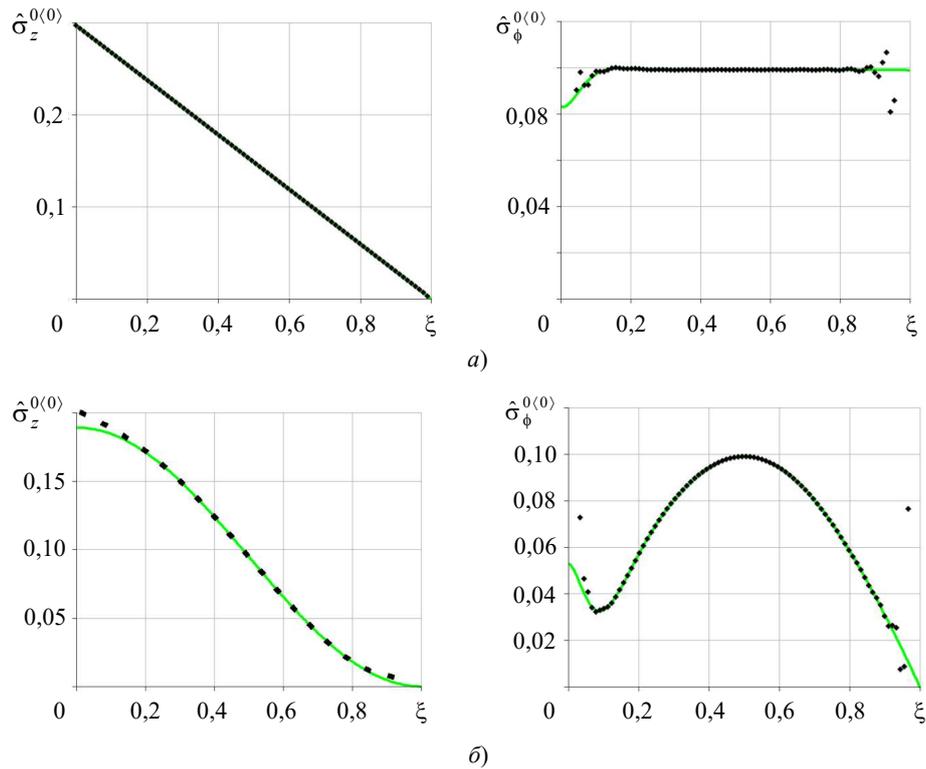


Рис. 6. Результаты реконструкции законов неоднородности напряжений при однородной (а) и неоднородной (б) начальной нагрузке

Отметим, что в окрестности торцов цилиндра наблюдается ухудшение точности восстановления; это связано с присутствием функций \hat{w} и \hat{u}' в знаменателях соответствующих выражений для $\hat{\sigma}_z^{0(0)}$ и $\hat{\sigma}_\phi^{0(0)}$.

Заключение

На основе линеаризованной модели ПН тела описана постановка задачи о колебаниях тонкостенного цилиндра с переменными материальными свойствами, рассматривалось неоднородное предварительное напряженное состояние. Проведены вычислительные эксперименты по анализу влияния законов неоднородности материальных модулей и компонент ПН на динамические характеристики оболочки – АЧХ и собственные частоты, осуществлен сравнительный анализ полученного решения с классическим и конечно-элементным решениями. Предложена методика исследования линейной обратной задачи об идентификации начального напряженного состояния

цилиндрической оболочки на основе данных измерений смещений для некоторого набора частот колебаний при определенном типе зондирующего периодического нагружения.

Список литературы

1. Schajer G.S. *Practical Residual Stress Measurement Methods*. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2013. 328 p.
2. Li Q., Iu V.P., Kou K.P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 311. Iss. 1-2. P. 498–515. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018>.
3. Li W., Ma H., Gao W. A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*. 2019. Vol. 221. Article No 110830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.002>.
4. Pandey S., Pradyumna S. Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. *Composites Part B: Engineering*. 2018. Vol. 153. P. 325–336. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.121>.
5. Nguyen T.-K., Nguyen B.-D. A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2015. Vol. 17. Iss. 6. P. 613–631. <https://doi.org/10.1177/1099636215589237>.
6. Fazzolari F.A. Stability analysis of FGM sandwich plates by using variable-kinematics Ritz models. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 2016. Vol. 23. Iss. 9. P. 1104–1113. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121559>.
7. Ye R., Zhao N.A., Yang D., Cui J., Gaidai O., Ren P. Bending and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded soft core, using the new refined higher-order analysis model. *Journal of Sandwich Structures & Materials*. 2020. Vol. 23. Iss. 2. P. 680–710. <https://doi.org/10.1177/1099636220909763>.
8. Garg A., Belarbi M.-O., Chalak H.D., Chakrabarti A. A review of the analysis of sandwich FGM structures. *Composite Structures*. 2021. Vol. 258. Article No 113427. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113427>.
9. Bisheh H.K., Wu N. Wave propagation characteristics in a piezoelectric coupled laminated composite cylindrical shell by considering transverse shear effects and rotary inertia. *Composite Structures*. 2018. Vol. 191. P. 123–144. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.010>.
10. Talebitooti R., Choudari Khameneh A.M. Wave propagation across double-walled laminated composite cylindrical shells along with air-gap using three-dimensional theory. *Composite Structures*. 2017. Vol. 165. P. 44–64. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.068>.
11. Liang C., Wang Y.Q. Wave propagation in three-dimensional graphene aerogel cylindrical shells resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *Journal of Mechanics of Materials Structures*. 2020. Vol. 15. Iss. 4. P. 435–455. DOI: 10.2140/jomms.2020.15.435.
12. Liew K.M., Wang Q. Analysis of wave propagation in carbon nanotubes via elastic shell theories. *International Journal of Engineering Science*. 2007. Vol. 45. Iss. 2–8. P. 227–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.001>.
13. Bisheh H.K., Wu N. Wave propagation in smart laminated composite cylindrical shells reinforced with carbon nanotubes in hygrothermal environments. *Composites Part B: Engineering*. 2019. Vol. 162. P. 219–241. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.064>.
14. Wang Q., Varadan V.K. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Materials and Structures*. 2007. Vol. 16. Iss. 1. P. 178–190. DOI: 10.1088/0964-1726/16/1/022.
15. Liang C., Yaw Z., Lim C.W. Thermal strain energy induced wave propagation for imperfect FGM sandwich cylindrical shells. *Composite Structures*. 2023. Vol. 303. Article No 116295. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116295>.
16. Ватульян А.О., Дударев В.В., Недин Р.Д. *Предварительные напряжения: моделирование и идентификация*. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ, 2014. 206 с.
17. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of

inhomogeneous residual stress. *Engineering Structures*. 2017. Vol. 151. P. 391–405. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.08.007>.

18. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *International Journal of Solids and Structures*. 2018. Vol. 139-140. P. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>.

19. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on residual stress of welded hoop structure. *Applied Sciences*. 2020. Vol. 10. Iss. 8. P. 2838-1–2838-16. <https://doi.org/10.3390/app10082838>.

20. Jazdzewska M., Bartmanski M. Nanotubular oxide layer formed on helix surfaces of dental screw implants. *Coatings*. 2021. Vol. 11. Iss. 2. P. 115-1–115-10 <https://doi.org/10.3390/coatings11020115>.

21. Zhangabay N., Suleimenov U., Utelbayeva A. et al. Experimental research of the stress-strain state of prestressed cylindrical shells taking into account temperature effects. *Case Studies in Construction Materials*. 2023. Vol. 18. P. e01776-1–e01776-12. <https://doi.org/10.1016/j.csem.2022.e01776>.

22. Ma H., Jiao P., Li H., Cheng Zh., Chen Zh. Buckling analyses of thin-walled cylindrical shells subjected to multi-region localized axial compression: Experimental and numerical study. *Thin-Walled Structures*. 2023. Vol. 183. Article No 110330. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110330>.

23. Yurov V.O., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Oscillations of a non-uniform finite hollow cylinder under conditions of complex prestressed state. *Engineering Structures*. 2020. Vol. 221. Article No 111019. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111019>.

24. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yurov V.O. On estimating prestress state in an elastic cylinder. In: *Advanced Structured Materials*. Springer, 2022. Vol. 180. P. 195–210. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_12.

25. Гузь А.Н. *Упругие волны с начальными (остаточными) напряжениями*. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.

26. Биргер И.А. *Стержни, пластинки, оболочки*. М.: Физматлит, 1992. 392 с.

27. Александров А.В., Потапов В.Д. *Основы теории упругости и пластичности*. М.: Высшая школа, 1990. 400 с.

References

1. Schajer G.S. *Practical Residual Stress Measurement Methods*. Chichester, UK. John Wiley & Sons Ltd. 2013. 328 p.

2. Li Q., Iu V.P., Kou K.P. Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material sandwich plates. *J. Sound Vib.* 2008. Vol. 311. Iss. 1-2. P. 498–515. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.09.018>.

3. Li W., Ma H., Gao W. A higher-order shear deformable mixed beam element model for accurate analysis of functionally graded sandwich beams. *Composite Structures*. 2019. Vol. 221. Article No 110830. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.04.002>.

4. Pandey S., Pradyumna S. Analysis of functionally graded sandwich plates using a higher-order layerwise theory. *Compos. B. Eng.* 2018. Vol. 153. P. 325–336. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.08.121>.

5. Nguyen T.-K., Nguyen B.-D. A new higher-order shear deformation theory for static, buckling and free vibration analysis of functionally graded sandwich beams. *J. Sandw. Struct. Mater.* 2015. Vol. 17. Iss. 6. P. 613–631. <https://doi.org/10.1177/1099636215589237>.

6. Fazzolari F.A. Stability analysis of FGM sandwich plates by using variable-kinematics Ritz models. *Mech. Adv. Mater. Struct.* 2016. Vol. 23. Iss. 9. P. 1104–1113. <https://doi.org/10.1080/15376494.2015.1121559>.

7. Ye R., Zhao N.A., Yang D., Cui J., Gaidai O., Ren P. Bending and free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded soft core, using the new refined higher-order analysis model. *J. Sandw. Struct. Mater.* 2020. Vol. 23. Iss. 2. P. 680–710. <https://doi.org/10.1177/1099636220909763>.

8. Garg A., Belarbi M.-O., Chalak H.D., Chakrabarti A. A review of the analysis of sandwich FGM structures. *Composite Structures*. 2021. Vol. 258. Article No 113427. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113427>.

9. Bisheh H.K., Wu N. Wave propagation characteristics in a piezoelectric coupled laminated composite cylindrical shell by considering transverse shear effects and rotary inertia. *Composite Structures*. 2018. Vol. 191. P. 123–144. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.02.010>.
10. Talebitooti R., Choudari Khameneh A.M. Wave propagation across double-walled laminated composite cylindrical shells along with air-gap using three-dimensional theory. *Composite Structures*. 2017. Vol. 165. P. 44–64. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.12.068>.
11. Liang C., Wang Y.Q. Wave propagation in three-dimensional graphene aerogel cylindrical shells resting on Winkler–Pasternak elastic foundation. *J. Mech. Mater. Struct.* 2020. Vol. 15. Iss. 4. P. 435–455. DOI: 10.2140/jomms.2020.15.435
12. Liew K.M., Wang Q. Analysis of wave propagation in carbon nanotubes via elastic shell theories. *Int. J. Eng. Sci.* 2007. Vol. 45. Iss. 2–8. P. 227–241. <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2007.04.001>.
13. Bisheh H.K., Wu N. Wave propagation in smart laminated composite cylindrical shells reinforced with carbon nanotubes in hygrothermal environments. *Compos. B. Eng.* 2019. Vol. 162. P. 219–241. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.10.064>
14. Wang Q., Varadan V.K. Application of nonlocal elastic shell theory in wave propagation analysis of carbon nanotubes. *Smart Mater. Struct.* 2007. Vol. 16. Iss. 1. P. 178–190. DOI: 10.1088/0964-1726/16/1/022.
15. Liang C., Yaw Z., Lim C.W. Thermal strain energy induced wave propagation for imperfect FGM sandwich cylindrical shells. *Composite Structures*. 2023. Vol. 303. Article No 116295. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116295>.
16. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. *Predvaritelnye napryazheniya: modelirovanie i identifikatsiya [Prestress: Modeling and Identification]*. Rostov-on-Don. YuFU Publ. 2014. 206 p. (In Russian).
17. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress. *Eng. Struct.* 2017. Vol. 151. P. 391–405. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.08.007>.
18. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe. *Int. J. Solids and Struct.* 2018. Vol. 139-140. P. 121–128. <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.01.026>.
19. Ma W., Zhang H., Zhu W., Xu F., Yang C. Study on residual stress of welded hoop structure. *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10. Iss. 8. P. 2838-1 – 2838-16. <https://doi.org/10.3390/app10082838>
20. Jazdzewska M., Bartmanski M. Nanotubular oxide layer formed on helix surfaces of dental screw implants. *Coatings*. 2021. Vol. 11. Iss. 2. P. 115-1–115-10 <https://doi.org/10.3390/coatings11020115>.
21. Zhangabay N., Suleimenov U., Utelbayeva A. et al. Experimental research of the stress-strain state of prestressed cylindrical shells taking into account temperature effects. *Case Stud. Constr. Mater.* 2023. Vol. 18. P. e01776-1–e01776-12. <https://doi.org/10.1016/j.cscm.2022.e01776>.
22. Ma H., Jiao P., Li H., Cheng Zh., Chen Zh. Buckling analyses of thin-walled cylindrical shells subjected to multi-region localized axial compression: Experimental and numerical study. *Thin Wall. Struct.* 2023. Vol. 183. Article No 110330. <https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.110330>.
23. Yurov V.O., Nedin R.D., Vatulyan A.O. Oscillations of a non-uniform finite hollow cylinder under conditions of complex prestressed state. *Eng. Struct.* 2020. Vol. 221. Article No 111019. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111019>.
24. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Yurov V.O. On estimating prestress state in an elastic cylinder. In: *Advanced Structured Materials*. Springer. 2022. Vol. 180. P. 195–210. https://doi.org/10.1007/978-3-031-18393-5_12.
25. Guz A.N. *Úprugie volny s nachalnymi (ostatochnymi) napryazheniyami [Elastic Waves with Initial (Residual) Stresses]*. Kiev. A.S.K. Publ. 2004. 672 p. (In Russian).
26. Birger I.A. *Sterzhni, plastinki, obolochki [Rods, Plates, Shells]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 1992. 392 p. (In Russian).
27. Aleksandrov A.V., Potapov V.D. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti [Fundamentals of Elasticity and Plasticity Theories]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 1990. 400 p. (In Russian).

**MODELLING AND ANALYSIS OF INITIAL STRESS STATE
IN A THIN-WALL CYLINDER WITH VARIABLE CHARACTERISTICS***

Vatulyan A.O., Nedin R.D., Yurov V.O.

*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation
Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center of the RAS,
Vladikavkaz, Russian Federation*

aovatulyan@sfedu.ru, rdn90@bk.ru, vyurov@sfedu.ru

Received by the Editor 2023/02/01

A linearized model of prestressed elastic body vibrations is described in terms of the nonsymmetric Piola stress tensor, and a weak statement of the original problem is given. With the help of the Lagrange variational principle, we construct a statement of the problem of steady axisymmetric oscillations of a thin-walled (shell-like) cylinder with variable material properties in the presence of an inhomogeneous prestress field. The motion equations, essential and natural boundary conditions are formulated. Integral characteristics are introduced that average the change in prestresses and material properties over the shell thickness. On the basis of the model presented, the problem on steady-state vibrations of a functionally graded prestressed cylindrical shell is numerically investigated via the shooting method; the influence of the laws of change in material modules and prestress components on dynamic characteristics (e.g., amplitude-frequency characteristics, natural vibration frequencies) is analyzed, a comparative analysis of the solutions is carried out depending on the thin-walled parameter. For the considered cylindrical shell with axial inhomogeneity, based on the acoustic sounding data, we study the inverse problem of restoring two laws of prestress inhomogeneity characterizing the nonuniform initial stress-strain state of tension or inflation. As additional information, we consider the measurement data of the displacement components on the cylinder's surface, given in a set of points at a certain frequency of steady-state oscillations; in such a case, the material characteristics are considered to be known and may depend on the axial coordinate, which makes it possible to set an arbitrary functional gradient along the axis of the cylinder. The mode of probing loading is determined by specifying the traction type and oscillation frequency. Explicit formulas for the desired laws of prestress inhomogeneity are obtained, and computational experiments are carried out to restore them. A high accuracy of reconstruction is revealed far from the ends of the cylinder when probing at a frequency in the vicinity of the first resonance.

Keywords: cylinder, shell, prestress, inhomogeneity, functionally graded material, weak statement, frequency response function, natural frequencies, inverse problem, reconstruction.

*The research was carried out within the framework of the Russian Science Foundation, grant #18-71-10045, <https://rscf.ru/project/18-71-10045/>, in Southern Federal University.