

УДК 519.6:539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-85-2-164-177

МОМЕНТНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

© 2023 г. **Абу Даввас Я., Модин И.А., Чекмарев Д.Т.**

*Национальный исследовательский Нижегородский государственный
университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

4ekm@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 06.02.2023

Представлена реализация нового 8-узлового конечного элемента для решения трехмерных статических задач теории упругости. Идея такого конечного элемента базируется на проецировании ажурной схемы метода конечного элемента в пространство более низкой размерности. Полученная в результате схема 8-узлового конечного элемента в виде гексаэдра имеет ряд особенностей по сравнению со схемой классического 8-узлового полилинейного элемента – это одна точка интегрирования в элементе по сравнению с восемью точками в классическом элементе, а также наличие четырех параметров, позволяющих регулировать сходимость вычислительного процесса. В таком конечном элементе напряжения, а также их моменты (три изгибающих и один крутящий) считаются постоянными в пределах элемента. Непрерывность полей перемещений сохраняется только в узлах конечных элементов. Это обстоятельство не является недостатком и свойственно многим новым численным схемам метода конечного элемента (достаточно упомянуть активно развивающееся в последнее время направление разрывного метода Галеркина). Обсуждаются вопросы применения нового конечного элемента при решении проблемы завышенной сдвиговой жесткости (сдвигового заклипания) ряда известных схем метода конечного элемента. Также рассматривается проблема неустойчивости типа «песочные часы» (hourglass instability), характерной для схем метода с сокращенным интегрированием и ряда других численных схем, в частности, популярной при решении динамических задач теории упругости и пластичности схемы Уилкинса. Описана реализация методики численного решения трехмерных статических задач теории упругости на базе предложенного конечного элемента в рамках традиционной техники метода с использованием векторно-матричной формы записи. Приводятся результаты решения тестовых статических задач теории упругости.

Ключевые слова: метод конечного элемента, трехмерная задача, неустойчивость типа «песочные часы», ажурная схема, статика.

* Выполнено при поддержке РФФ (проект №22-79-10076).

Введение

Идея построения нового конечного элемента описана в [1]. Этот конечный элемент базируется на применении ажурных схем метода конечного элемента (МКЭ). Как известно, классическая схема на базе 4-узлового конечного элемента в виде тетраэдра с линейной аппроксимацией перемещений в элементе обладает завышенной сдвиговой жесткостью [2–5], следствием чего является медленная сходимость численных решений. В некоторых исследованиях [6, 7] показано, что сходимость схем МКЭ может быть связана с взаимным расположением конечных элементов в расчетной сетке. Было установлено, что быструю сходимость обеспечивает схема с «ажурным» расположением конечных элементов, когда между расчетными элементами имеются регулярные промежутки. В частности, хороший результат показала схема, в которой в каждой ячейке гексаэдрической сетки находится один расчетный 4-узловой элемент в виде тетраэдра (рис. 1), а остальные 4 элемента в расчетах не участвуют. Иначе ее можно интерпретировать как схему 4-узлового гексаэдрического конечного элемента. Такая схема была подробно исследована применительно к трехмерным динамическим задачам теории упругости и пластичности в статьях [8, 9]. Итоги исследований показали, что у ажурной схемы отсутствуют нежелательные эффекты завышенной сдвиговой жесткости [2–5] и неустойчивости типа «песочные часы» [3, 10, 11]. Она превосходит традиционные схемы по экономичности. В частности, на одинаковых сетках она имеет в 5 раз меньше элементов и в 2 раза меньше узлов по сравнению с классической схемой линейного 4-узлового конечного элемента, при этом она превосходит последнюю по точности. Применительно к задачам статики ажурная схема описана в [12].

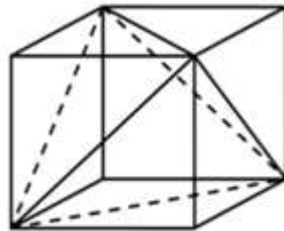


Рис. 1. Ячейка ажурной сетки

Можно обобщить трехмерный вариант ажурной схемы (линейный конечный элемент в виде тетраэдра, вписанный в центр гексаэдрической ячейки) на случай произвольной размерности. Получим линейный конечный элемент в виде n -мерного симплекса, вписанного в n -мерный куб. При этом оказывается, что не для любой размерности можно построить удачную ажурную схему. Так, при $n = 2$ у треугольника, вписанного в квадрат таким образом, что его вершины совпадают с вершинами квадрата, центр не совпадает с центром квадрата. Следовательно, ажурная схема на треугольниках будет иметь очевидную асимметрию и более низкий порядок точности. При $n = 3$ удачная схема возможна (центр вписанного тетраэдра совпадает с центром куба). При $n = 4, 5, 6$ невозможно симметрично вписать симплекс в n -мерный куб. Следующая удачная размерность – $n = 7$.

Возникла идея строить численные схемы МКЭ для задач «неудачной» размерности путем проецирования ажурных схем более высокой «удачной» размерности. При этом есть все основания полагать, что положительные свойства исходных схем

сохранятся. Впервые эта идея была реализована в [13], где на базе трехмерной ажурной схемы было построено параметрическое семейство схем МКЭ для решения плоских задач теории упругости. В [1] аналогичный подход был предложен для построения трехмерных схем МКЭ.

1. Трехмерная ажурная схема МКЭ и построение двумерной моментной схемы

Дадим краткое описание трехмерной ажурной схемы [8] и построения на ее основе двумерной моментной схемы. Задачу теории упругости сформулируем как вариационную. Пусть изотропное линейно-упругое тело занимает объем V . На границе $\partial V = S_u \cup S_p$ заданы граничные условия: кинематические на S_u и статические на S_p . Считаем известными поля внешних массовых \mathbf{F} и поверхностных \mathbf{P} сил. Численная схема строится на основе конечно-элементной аппроксимации вариационного принципа виртуальных перемещений:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \rho F_i \delta u_i dV + \int_{S_p} P_i \delta u_i dS = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность среды, \mathbf{F} – внешняя массовая сила, \mathbf{P} – внешняя поверхностная сила, \mathbf{u} – поле перемещений; тензоры малых деформаций ε_{ij} и напряжений σ_{ij} связаны с вектором перемещений соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2)$$

и законом Гука

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (3)$$

где λ, μ – параметры Ламе. Из (1)–(3) следует система статических уравнений Ламе теории упругости в перемещениях:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F} = 0. \quad (4)$$

Для построения численного метода расчетная область V покрывается гексаэдрической сеткой, расчетные элементы (тетраэдры) располагаются в центрах гексаэдров, как это показано на рис. 1. Все экстенсивные характеристики (масса, объем, внутренняя энергия) боковых тетраэдров присоединяются к центральному тетраэдру.

Отметим, что для конечных элементов с линейной интерполяцией функций в элементе построенная схема решения задачи (1)–(3) идентична численным схемам, построенным вариационно-разностным [14, 15] или интегро-интерполяционным [16] методами (см. [17]). Схемы МКЭ, как правило, не записываются в явной конечно-разностной форме (в виде равенства сеточного оператора нулю). Для дальнейшего изложения потребуется такая запись. Используя описанный в [17] метод построения конечно-разностных представлений КЭ схем на равномерных сетках, получим для ажурной схемы ее запись в виде, аналогичном системе уравнений Ламе (4):

$$(\lambda + \mu) \begin{pmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{pmatrix} + \mu D_\Delta \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = 0. \quad (5)$$

Здесь D_{ij}, D_Δ – сеточные операторы, аппроксимирующие соответственно вторые

частные производные и оператор Лапласа. Операторы строятся следующим образом. Базисные операторы, аппроксимирующие первые частные производные в элементе $(d_m^+ \approx \partial/\partial x^m)$ на равномерной ортогональной сетке $x_i^1 = x_0^1 + h_1 i$, $x_j^2 = x_0^2 + h_2 j$, $x_k^3 = x_0^3 + h_3 k$, записываются в виде

$$\begin{aligned}(d_1^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i+1,j,k} - f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k+1}), \\(d_2^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k+1}), \\(d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j,k+1} - f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k}).\end{aligned}\quad (6)$$

Операторы $d_m^- \approx \partial/\partial x^m$

$$\begin{aligned}(d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k-1}), \\(d_2^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j,k-1}), \\(d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3} (-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j,k-1} + f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k})\end{aligned}\quad (7)$$

равны сопряженным к (6) операторам, взятым со знаком минус. Операторы D_{ij} определим через суперпозиции операторов (6) и (7):

$$D_{ij} = \frac{1}{2} (d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^-), \quad D_\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}.$$

Построение двумерной схемы. Численную схему решения двумерной задачи теории упругости (плоская деформация) получим путем проецирования трехмерной схемы (5) на плоскость $x_1 O x_2$. Полагая, что трехмерная расчетная область имеет вид $\Omega \times [0, h_3]$, где Ω – область в R^2 , возьмем один ряд ячеек по координате x_3 и наложим на решение ограничения: $u_3 = 0$; u_1, u_2 не зависят от x_3 . При этом разностная схема (5) примет вид:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_1 + D_{33}u_1) + \rho F_1 &= 0, \\(\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu(D_{11}u_2 + D_{22}u_2 + D_{33}u_2) + \rho F_2 &= 0.\end{aligned}\quad (8)$$

В (8) операторы d_m^+, d_m^-, D_{ij} получаются проецированием рассмотренных выше операторов на двумерную сетку, при этом операторы

$$\begin{aligned}(d_3^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1} + f_{i,j} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j}), \\(d_3^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (-f_{i-1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j})\end{aligned}\quad (9)$$

аппроксимируют с точностью до множителя оператор второй смешанной производной $\partial^2/(\partial x^1 \partial x^2)$. Наличие в схеме операторов (9) допускает физическую интерпретацию как учет изгибающего момента в конечном элементе, поэтому такой КЭ можно назвать моментным. При этом момент является постоянным в пределах конечного элемента. Очевидно, что допущения об одновременном постоянстве первых и вторых

производных в двумерной задаче приводят к противоречию. Таким образом, невозможно построить двумерное поле перемещений, удовлетворяющее всем свойствам конечного элемента. Однако с точки зрения исходной трехмерной схемы МКЭ никакого противоречия нет и поле перемещений восстанавливается. Отметим только, что непрерывность поля перемещений сохраняется только на ребрах расчетных элементов (тетраэдров) и схему типа (8) можно применять и для решения задачи плоского напряженного состояния, проводя соответствующие корректировки уже двумерной задачи. Так, в геометрически и физически линейном случае достаточно скорректировать значение упругой постоянной λ .

Размер элемента h_3 по оси x_3 в построенной численной схеме превращается в регулируемый параметр схемы. Таким образом, в результате проецирования в двумерное пространство ажурной схемы получено однопараметрическое семейство численных схем МКЭ решения плоской задачи теории упругости, близких к схеме билинейного КЭ. Настройка параметра h_3 , можно изменять влияние моментной составляющей в элементе и тем самым регулировать сходимость численных решений.

2. Трехмерная схема МКЭ решения задач теории упругости на основе семимерной ажурной схемы

Обобщая принятый подход, можно построить семейство 8-узловых схем МКЭ решения трехмерных задач теории упругости, близких к схеме 8-узлового полилинейного КЭ. Отметим, что следующей «удачной» размерностью для построения ажурных схем является семимерная. При $n = 7$ в куб, содержащий 128 вершин, можно вписать правильный симплекс с 8 вершинами исходного куба таким образом, что центры куба и симплекса совпадут. Примером является следующий набор вершин симплекса, вписанного в единичный 7-мерный куб:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Все ребра этого симплекса имеют одинаковую длину. Отметим также, что наборы из первых трех координат системы векторов образуют множество вершин единичного трехмерного куба.

Семимерная ажурная схема. Для построения семимерной задачи рассмотрим гипотетическую задачу «теории упругости» в 7-мерном пространстве. Определим 7-мерный «тензор деформаций» через обобщение соотношений Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

Связь напряжений и деформаций установим на основе «закона Гука»:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 7.$$

В результате 7-мерные уравнения равновесия «теории упругости» в перемещениях запишутся в виде (4), где градиент, дивергенция и оператор Лапласа опреде-

лены, соответственно, в семимерном пространстве. Ажурная схема МКЭ на основе линейного конечного элемента на равномерной ортогональной сетке $x_i^1 = x_0^1 + h_1 i_1, \dots, x_{i_7}^7 = x_0^7 + h_7 i_7$ примет вид, аналогичный (5):

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} D_{11}u_1 + \dots + D_{17}u_7 \\ \dots \\ D_{71}u_1 + \dots + D_{77}u_7 \end{vmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_7 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_7 \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Для построения трехмерной схемы поступим аналогично рассмотренному выше случаю двумерной схемы. Полагая во всех узлах $u_4 = u_5 = u_6 = u_7 = 0$, а также, что u_1, u_2, u_3 зависят только от x_1, x_2, x_3 , получим после проецирования в R^3 схему МКЭ в виде

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{vmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \mu (D_{44} + D_{55} + D_{66} + D_{77}) \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

В (12) операторы $D_{ij} = (1/2)(d_i^+ d_j^- + d_j^+ d_i^-)$, $D_{\Delta} = D_{11} + D_{22} + D_{33}$ выражаются через базисные операторы $d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+$ и сопряженные к ним (взятые со знаком минус $d_1^-, d_2^-, d_3^-, d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-$, определенные на 8-узловых шаблонах. При этом операторы d_1^+, d_2^+, d_3^+ и d_1^-, d_2^-, d_3^- аппроксимируют первые производные по соответствующим координатам, а операторы $d_4^+, d_5^+, d_6^+, d_7^+$ и $d_4^-, d_5^-, d_6^-, d_7^-$ аппроксимируют с точностью до положительного множителя операторы дифференцирования $\partial^2 / (\partial x^1 \partial x^2)$, $\partial^2 / (\partial x^1 \partial x^3)$, $\partial^2 / (\partial x^2 \partial x^3)$, $\partial^3 / (\partial x^1 \partial x^2 \partial x^3)$. Наличие в схеме дополнительных операторов можно интерпретировать как учет в конечном элементе трех изгибающих и крутящего моментов. Подобные аппроксимации моментных составляющих имеют место и в традиционной схеме полилинейного 8-узлового конечного элемента (см., например, [18]).

Таким образом, в результате проецирования получено 4-параметрическое семейство численных схем МКЭ решения трехмерной задачи теории упругости. Параметры h_4, h_5, h_6, h_7 можно настраивать, изменяя влияние моментных составляющих в элементе. Отметим, что при увеличении этих параметров влияние моментных составляющих в элементе убывает и при $h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = \infty$ мы получаем из схемы (12) схему, записанную в форме (5), но с сеточными операторами, определенными на 8-узловом шаблоне. Такая схема соответствует схеме полилинейного 8-узлового элемента с использованием техники сокращенного интегрирования [19] (одна точка интегрирования в элементе), а также (применительно к задачам динамики) идентична разностной схеме Уилкинса [20]. Соответственно при больших значениях указанных параметров получается схема МКЭ с присущим таким схемам недостатком в виде неустойчивости типа «песочные часы».

Необходимо отметить, что и ранее предпринимались попытки построения моментных схем МКЭ, основанные на других подходах, например [15].

3. Реализация трехмерной моментной схемы МКЭ

Рассмотрим реализацию моментного элемента в традиционной технике МКЭ с использованием векторно-матричной формы записи. Поскольку в исходном конечном элементе (7-мерном) используется линейная аппроксимация неизвестных функций, то и матрица жесткости, и якобиан отображения на стандартный элемент являются

постоянными в пределах элемента. Поэтому нет необходимости строить отображение конечных элементов на стандартный кубический элемент и матрицу жесткости построим для произвольного тетраэдра, как это делается, например, в [18].

Тензор деформаций в элементе имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & \varepsilon_{16} & \varepsilon_{17} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & \varepsilon_{26} & \varepsilon_{27} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & \varepsilon_{36} & \varepsilon_{37} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2}(d_i^+ u_j + d_j^+ u_i), & j \leq 3, \\ \frac{1}{2}d_i^+ u_j, & j > 3, \end{cases}$$

а тензор напряжений

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \sigma_{14} & \sigma_{15} & \sigma_{16} & \sigma_{17} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \sigma_{24} & \sigma_{25} & \sigma_{26} & \sigma_{27} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \sigma_{34} & \sigma_{35} & \sigma_{36} & \sigma_{37} \end{bmatrix}.$$

Последние 4 столбца соответствуют трем изгибающим и одному крутящему моментам конечного элемента. Интегралы от компонент тензора напряжений определяют силы, приложенные к узлам элемента, в результате чего формируются уравнения равновесия узлов.

Вычисление производных в произвольном гексаэдрическом элементе производится по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} \approx d_i^+ f = \frac{\det V_i}{\det V}, \quad (13)$$

где матрица V имеет вид

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & x_6^1 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & x_7^1 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & x_8^1 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

а матрицы V_i получаются из матрицы V заменой столбца соответствующей координаты на столбец значений функций, например,

$$V_1 = \begin{bmatrix} 1 & f_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & f_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_3 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & h_7 \\ 1 & f_4 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & 0 \\ 1 & f_5 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & h_7 \\ 1 & f_6 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & 0 \\ 1 & f_7 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & 0 \\ 1 & f_8 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & h_7 \end{bmatrix}, \dots, V_7 = \begin{bmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & f_1 \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & h_5 & h_6 & f_2 \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & x_3^3 & h_4 & 0 & h_6 & f_3 \\ 1 & x_4^1 & x_4^2 & x_4^3 & h_4 & h_5 & 0 & f_4 \\ 1 & x_5^1 & x_5^2 & x_5^3 & h_4 & h_5 & 0 & f_5 \\ 1 & x_6^1 & x_6^2 & x_6^3 & h_4 & 0 & h_6 & f_6 \\ 1 & x_7^1 & x_7^2 & x_7^3 & 0 & h_5 & h_6 & f_7 \\ 1 & x_8^1 & x_8^2 & x_8^3 & 0 & 0 & 0 & f_8 \end{bmatrix} \quad (15)$$

и т.п. Операторы (13) могут быть представлены в виде линейных комбинаций значений функций в узлах элемента:

$$d_i^+ f = \sum_{j=1}^8 \beta_j^i f_j. \quad (16)$$

Для формирования численной схемы МКЭ используется векторно-матричная форма записи. Векторы узловых перемещений конечного элемента, деформаций и напряжений запишем соответственно в виде

$$\mathbf{u}^T = (u_1^1, u_1^2, u_1^3, \dots, u_8^1, u_8^2, u_8^3),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{14}, \gamma_{24}, \gamma_{34}, \gamma_{15}, \gamma_{25}, \gamma_{35}, \gamma_{16}, \gamma_{26}, \gamma_{36}, \gamma_{17}, \gamma_{27}, \gamma_{37}),$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{14}, \sigma_{24}, \sigma_{34}, \sigma_{15}, \sigma_{25}, \sigma_{35}, \sigma_{16}, \sigma_{26}, \sigma_{36}, \sigma_{17}, \sigma_{27}, \sigma_{37}).$$

В матричной форме соотношения Коши, закон Гука и полная потенциальная энергия конечного элемента имеют вид:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{q},$$

где $\mathbf{K} = \int_V B^T C B dV$ – матрица жесткости, \mathbf{q} – вектор узловых сил. Матрицы $\mathbf{C}_{18 \times 18}$ и $\mathbf{B}_{18 \times 24}$ выражаются соответственно через константы Ламе (закон Гука) и коэффициенты операторов (16):

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & | & & \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & | & & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & | & & \\ \hline & & & & \mu & \\ & & 0 & | & \dots & \\ & & & | & & \mu \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & 0 & 0 & \dots & \beta_8^1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^2 & 0 & \dots & 0 & \beta_8^2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^3 & \dots & 0 & 0 & \beta_8^3 \\ \beta_1^2 & \beta_1^1 & 0 & \dots & \beta_8^2 & \beta_8^1 & 0 \\ 0 & \beta_1^3 & \beta_1^2 & \dots & 0 & \beta_8^3 & \beta_8^2 \\ \beta_1^3 & 0 & \beta_1^1 & \dots & \beta_8^3 & 0 & \beta_8^1 \\ \beta_1^4 & 0 & 0 & \dots & \beta_8^4 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^4 & 0 & \dots & 0 & \beta_8^4 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^4 & \dots & 0 & 0 & \beta_8^4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_1^7 & 0 & 0 & \dots & \beta_8^7 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1^7 & 0 & \dots & 0 & \beta_8^7 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1^7 & \dots & 0 & 0 & \beta_8^7 \end{pmatrix}.$$

Далее идут стандартные для техники МКЭ этапы построения глобальной матрицы жесткости, корректировки матрицы системы с учетом приложенных внешних нагрузок и кинематических граничных условий, решения полученной системы.

4. Численные результаты

Для иллюстрации работоспособности методики рассмотрим результаты решения статических задач теории упругости.

Изгиб бруса квадратного сечения. Рассматривается геометрически и физически линейная задача об изгибе бруса квадратного сечения под действием распределенной нагрузки.

Брус длиной $L = 10$ см квадратного сечения $H_1 = H_2 = 1$ см зашпелен на торцах (рис. 2). Давление $p = 10$ МПа равномерно распределено на участке поверхности от 4 до 6 см. Механические свойства материала: плотность $\rho = 7,8$ г/см³, модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

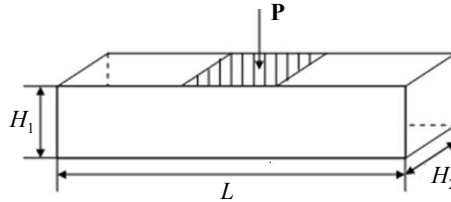


Рис. 2. Брус квадратного сечения

Для нахождения численного решения были использованы две схемы МКЭ: моментная и ажурная. Использовалась равномерная сетка $4 \times 4 \times 40$ конечных элементов. Элементы моментной схемы имели форму куба со стороной $h_1 = h_2 = h_3 = 0,25$ см. Элементы ажурной схемы – правильные тетраэдры, вписанные в эти кубы. На рис. 3 приведена форма деформированного бруса (решение на основе ажурной схемы, перемещения увеличены в 10 раз).

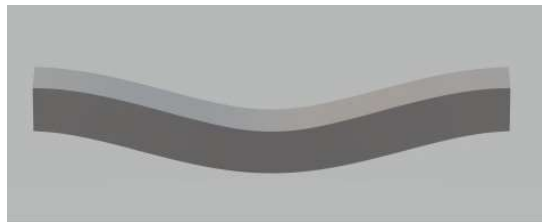


Рис. 3. Деформированный брус

На рис. 4 приведены графики прогибов на оси бруса, полученные с использованием ажурной схемы и моментной схемы с различными значениями настраиваемых параметров. Значения параметров принимались равными и выражались через безразмерный параметр θ : $h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = \theta h_1$. Приведены решения, соответствующие различным значениям параметра θ .

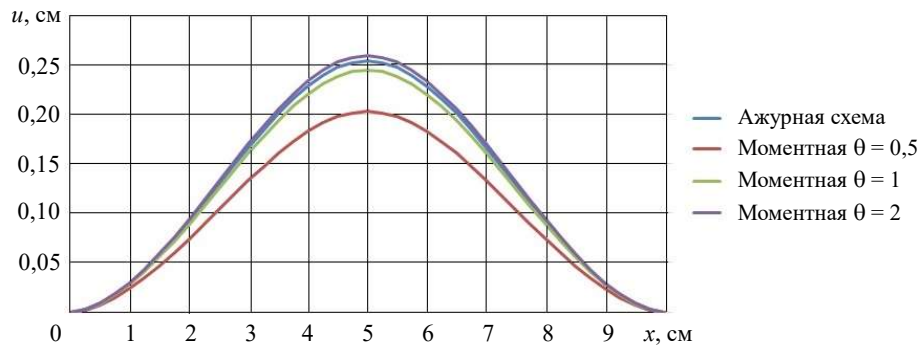


Рис. 4. Прогибы на оси бруса

При значении параметра $\theta = 1,4$ наблюдалось практически полное совпадение решений моментной и ажурной схем.

Деформирование диска под действием внешнего давления. Продемонстрируем влияние параметров моментной схемы на эффект неустойчивости типа «песочные часы».

К круглому диску, закрепленному по контуру, приложено постоянное равномерно распределенное по поверхности давление. Расчетная схема задачи приведена на рис. 5. Здесь $H = 1,5$ см, $R = 14,85$ см. Свойства материала: $\rho = 7,8$ г/см³, $E = 210$ ГПа, $\nu = 0,3$. Граничные условия: жесткое закрепление по контуру диска, на одной свободной поверхности задавалось давление $p = 17$ МПа. Осесимметричная задача решалась как трехмерная. Расчетная область (четверть диска) покрывалась кусочно-регулярной сеткой из трех блоков в виде топологических параллелепипедов. Задача решалась на сетке 28 ячеек вдоль радиуса и 6 ячеек по толщине диска. Каждый из блоков покрывался сеткой 14×14 четырехугольных ячеек в плане. По толщине диска сетка равномерная.

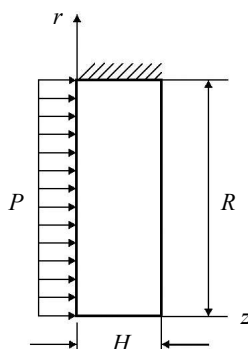


Рис. 5. Расчетная схема

Задача решалась с использованием моментной схемы с двумя разными значениями регулируемых параметров. Как и в предыдущей задаче, воспользуемся безразмерным параметром. Поскольку сетка неравномерная, за основу возьмем размеры ячейки в центре пластины, по форме близкой к прямоугольному параллелепипеду: $h_1 = h_2 \approx 0,5$ см, $h_3 = 0,25$ см. Параметры схемы принимались в виде $h_4 = h_5 = h_6 = h_7 = \theta h_3$ при значениях параметра $\theta = 1$ и $\theta = 40$. На рис. 6, 7 представлен вид деформированного диска при $\theta = 1$ и $\theta = 40$. На обоих рисунках перемещения увеличены в 20 раз.

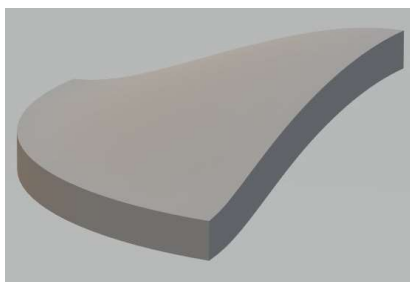


Рис. 6. Деформированный диск ($\theta = 1$)

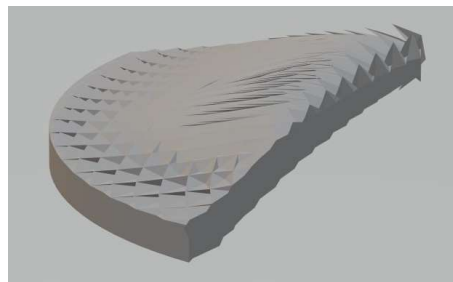


Рис. 7. Деформированный диск ($\theta = 40$)

На рис. 7 отчетливо видны искажения сетки, обусловленные неустойчивостью типа «песочные часы».

Заключение

Рассмотрена методика численного решения трехмерных статических задач теории упругости и пластичности на базе нового моментного конечного элемента. Особенности конечного элемента являются: отсутствие эффектов запираания (завышенной сдвиговой жесткости) и неустойчивости типа «песочные часы» при правильном подборе регулируемых параметров, одна точка интегрирования в элементе, наличие регулируемых параметров численной схемы. Вопрос оптимального подбора параметров схемы h_4, h_5, h_6, h_7 требует дополнительного изучения. Отмеченные особенности моментного конечного элемента и результаты тестирования показывают перспективность принятого подхода к построению эффективных методик численного решения задач теории упругости и пластичности, а также других задач механики сплошных сред и математической физики.

Список литературы

1. Чекмарев Д.Т. Об одном способе построения двумерных 4-узловых и трехмерных 8-узловых конечных элементов для решения задач теории упругости. *Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки*. 2013. Т. 155. №3. С. 150–158.
2. OhyaY., Youshida N. FEM model of Biot's equations free from volume locking and hourglass instability. *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*. 12–17 Oct. 2008. Beijing, China.
3. Sun E.Q. Shear locking and hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS, and ANSYS.MSC. *Software Users Meeting*. 2006. 9 p.
4. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde C.E. Overcoming volumetric locking in material point methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2018. Vol. 333. P. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
5. Telikicherla R.M., Moutsanidis G. Treatment of near-incompressibility and volumetric locking in higher order material point methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2022. Vol. 395. Article No 114985. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114985>.
6. Горельский В.А., Зелепугин С.А., Смолин А.Ю. Исследование влияния дискретизации при расчете методом конечных элементов трехмерных задач высокоскоростного удара. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1997. Т. 37. №6. С. 742–750.
7. Крутова К.А., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т. О влиянии взаимного расположения конечных элементов на точность численного решения задач теории упругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75. №4. С. 312–322. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-4-312-322>.
8. Spirin S.V., Chekmarev D.T., Zhidkov A.V. Solving the 3D elasticity problems by rare mesh FEM scheme. In: *Finite Difference Methods, Theory and Applications*. 2015. P. 379–384. https://doi.org/10.1007/978-3-319-20239-6_42.
9. Жидков А.В., Крутова К.А., Миронов А.А., Чекмарев Д.Т. Численное решение трехмерных динамических упругопластических задач с использованием ажурной схемы метода конечных элементов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2017. Т. 79. №3. С. 327–337. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2017-79-3-327-337>.
10. Reese S., Wriggers P. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2000. Vol. 48. Iss. 1. P. 79–109. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<79::AID-NME869>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<79::AID-NME869>3.0.CO;2-D).
11. Chekmarev D.T., Dawwas Ya.A. Solving the hourglass instability problem using rare mesh variation-difference schemes. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2099. P. 012003-1–012003-9. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012003.
12. Жидков А.В., Спиринов С.В., Чекмарев Д.Т. Ажурная схема метода конечных элементов решения статических задач теории упругости. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2012. Т. 154. Кн. 4. С. 26–32.

13. Чекарев Д.Т., Гладильщикова К.М. Об одном классе двумерных схем МКЭ. *Проблемы прочности и пластичности*. 2006. Вып. 68. С. 229–235. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2006-68-1-229-235>.
14. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П., Савченков В.И. *Численные методы в теории упругости и теории оболочек*. Красноярск: Изд-во КГУ, 1986. 384 с.
15. Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кибец А.И. О численной реализации вариационно-разностной моментной схемы решения нелинейных задач динамики нетонких оболочек при импульсных воздействиях. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения*. 1988. С. 66–73.
16. Самарский А.А., Фрязинов И.В. О разностных схемах решения задачи Дирихле в произвольной области для эллиптического уравнения с переменными коэффициентами. *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1971. Т. 11. №2. С. 385–410.
17. Баженов В.Г., Чекарев Д.Т. *Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом*. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. 118 с.
18. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science*. London: McGraw-Hill, 1971. 521 p.
19. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1971. Vol. 3. Iss. 2. P. 275–290. <https://doi.org/10.1002/nme.1620030211>.
20. Wilkins M. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics*. New York – Livermore, 1964. P. 212–264.

References

1. Chekmarev D.T. Ob odnom sposobe postroeniya dvumernykh 4-uzlovykh i trekhmernykh 8-uzlovykh konechnykh elementov dlya resheniya zadach teorii uprugosti [A method of constructing 2D 4-node and 3D 8-node finite elements for solving elasticity problems]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskie nauki [Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences]*. 2013. Vol. 155. Iss. 3. P. 150–158 (In Russian).
2. Ohya Y., Youshida N. FEM model of Biot's equations free from volume locking and hourglass instability. *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*. 12–17 Oct. 2008. Beijing, China.
3. Sun E.Q. Shear locking and hourglassing in MSC Nastran, ABAQUS, and ANSYS.MSC. *Software Users Meeting*. 2006. 9 p.
4. Coombs W.M., Charlton T.J., Cortis M., Augarde C.E. Overcoming volumetric locking in material point methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2018. Vol. 333. P. 1–21. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.01.010>.
5. Telikicherla R.M., Moutsanidis G. Treatment of near-incompressibility and volumetric locking in higher order material point methods. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2022. Vol. 395. Article No 114985. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.114985>.
6. Gorel'skii V.A., Zelepugin S.A., Smolin A.Yu. Investigation of the discretization effect in computing three-dimensional high impact problems by the finite element method. *Comput. Math. Math. Phys.* 1997. Vol. 37. Iss. 6. P. 722–730.
7. Krutova K.A., Spirin S.V., Chekmarev D.T. O vliyaniy vzaimnogo raspolozheniya konechnykh elementov na tochnost chislennogo resheniya zadach teorii uprugosti [On the effect of the arrangement of finite elements relatively to each other on the accuracy of the FE-analysis of elasticity problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Vol. 75. No 4. P. 312–322 (In Russian).
8. Spirin S.V., Chekmarev D.T., Zhidkov A.V. Solving the 3D elasticity problems by rare mesh FEM scheme. In: *Finite Difference Methods, Theory and Applications*. 2015. P. 379–384. https://doi.org/10.1007/978-3-319-20239-6_42.
9. Zhidkov A.V., Krutova K.A., Mironov A.A., Chekmarev D.T. Chislennoe reshenie trekhmernykh dinamicheskikh uprugoplasticheskikh zadach s ispolzovaniem azhurnoy skhemy metoda konechnykh elementov [Numerical solution of 3D elastic-plastic dynamical problems using rare mesh FEM scheme]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2017. Vol. 79. No 3. P. 327–337 (In Russian).

10. Reese S., Wriggers P. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2000. Vol. 48. Iss. 1. P. 79–109. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<79::AID-NME869>3.0.CO;2-D](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<79::AID-NME869>3.0.CO;2-D).
11. Chekmarev D.T., Dawwas Ya.A. Solving the hourglass instability problem using rare mesh variation-difference schemes. *Journal of Physics: Conference Series.* 2021. Vol. 2099. P. 012003-1–012003-9. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012003.
12. Zhidkov A.V., Spirin S.V., Chekmarev D.T. Azhurnaya skhema metoda konechnykh elementov resheniya staticheskikh zadach teorii uprugosti [A rare mesh finite element scheme for solving static elasticity problems]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientific Notes of Kazan University. Series: Physical and Mathematical Sciences]. 2012. Vol. 154. Book 4. P. 26–32 (In Russian).
13. Chekmarev D.T., Gladil'shikova K.M. Ob odnom klasse dvumernykh skhem MKE [On a class of 2-D FEM procedures]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of Strength and Plasticity]. 2006. Iss. 68. P. 229–235 (In Russian).
14. Abovskiy N.P., Andreev N.P., Deruga A.P., Savchenkov V.I. *Chislennyye metody v teorii uprugosti i teorii obolochek* [Numerical Methods in the Elasticity and Shell Theory]. Krasnoyarsk. KGU Publ. 1986. 384 p. (In Russian).
15. Bazhenov V.G., Zefirov S.V., Kibets A.I. O chislennoy realizatsii variatsionno-raznostnoy momentnoy skhemy resheniya nelineynykh zadach dinamiki netonkikh obolochek pri impulsnykh vozdeystviyakh [On the numerical implementation of the variational-difference moment scheme for solving nonlinear dynamic problems of non-thin shells under impulsive actions]. *Prikladnyye problemy prochnosti i plastichnosti. Metody resheniya* [Applied Problems of Strength and Plasticity. Solution Methods]. 1988. P. 66–73 (In Russian).
16. Samarskii A.A., Fryazinov I.V. On finite-difference schemes for solving the Dirichlet problem for an elliptic equation with variable coefficients in an arbitrary region. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics.* 1971. Vol. 11. Iss. 2. P. 109–139. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(71\)90167-4](https://doi.org/10.1016/0041-5553(71)90167-4).
17. Bazhenov V.G., Chekmarev D.T. *Reshenie zadach nestatsionarnoy dinamiki plastin i obolochek variatsionno-raznostnym metodom* [Solving Problems of Non-Stationary Dynamics of Plates and Shells by the Variational-Difference Method]. Nizhny Novgorod. NNGU Publ. 2000. 118 p. (In Russian).
18. Zienkiewicz O.C. *The Finite Element Method in Engineering Science.* London. McGraw-Hill. 1971. 521 p.
19. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too J. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1971. Vol. 3. Iss. 2. P. 275–290. <https://doi.org/10.1002/nme.1620030211>.
20. Wilkins M. Calculation of elastic-plastic flow. In: *Methods in Computational Physics. Vol. 3. Fundamental Methods in Hydrodynamics.* New York. Livermore. 1964. P. 212–264.

MOMENT FINITE ELEMENT FOR SOLVING 3D ELASTICITY PROBLEMS*

Abu Dawwas Ya., Modin I.A., Chekmarev D.T.

*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

4ekm@mm.unn.ru

Received by the Editor 2023/02/06

The implementation of a new 8-node finite element for solving 3D elasticity static problems is considered. The idea of this finite element is based on the projection of a rare mesh FEM scheme into a space of lower dimension. The resulting scheme of the 8-node hexahedral finite element has

*The research was supported by Russian Science Foundation (grant No 22-79-10076).

a number of features compared to the scheme of the classical 8-node polyline element. This is one integration point in the element compared to eight in the classical element, as well as the presence of four parameters that allow you to adjust the convergence of the computational process. In a given finite element, the stresses as well as their moments (three bending and one torsional) are assumed to be constant within the element. Also, the continuity of displacement fields is preserved only in the nodes of finite elements. This circumstance is not a disadvantage and is characteristic of many new numerical FEM schemes (suffice it to mention the recently actively developed direction of the discontinuous Galerkin method). The issues of using this finite element in solving the well-known problem of increased shear stiffness (shear locking) of a number of well-known FEM schemes are discussed. The problem of hourglass instability, which is typical for FEM schemes with reduced integration and a number of other numerical schemes, in particular, the Wilkins scheme, which is popular in solving dynamic elasticity and plasticity problems, is also considered. The implementation of a technique for the numerical solution of three-dimensional static problems of the theory of elasticity on the basis of a given finite element within the framework of the traditional FEM technique using a vector-matrix notation is described. The results of solving test static problems of elasticity theory are presented.

Keywords: FEM, three-dimensional problem, hourglass instability, rare mesh FEM scheme, statics.