

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-1-45-62

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТЕРМОУПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ
ПОЛОГИХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ ИЗГИБА ***

© 2023 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 30.10.2022

Сформулирована динамическая задача термоупруговязкопластического деформирования пологих композитных оболочек при использовании уточненной теории изгиба. Тангенциальные перемещения по толщине конструкций аппроксимированы полиномами третьего и более высоких порядков, а прогиб не зависит от поперечной координаты. Нормальные поперечные напряжения в композиции имеют линейное распределение по толщине. Температура в поперечном направлении искривленных панелей аппроксимирована полиномом 7-го порядка. Геометрическая нелинейность задачи учитывается в приближении Кармана. Конструкции многонаправленно армированы непрерывными волокнами. Материалы композиции изотропны; их пластическое поведение описывается теорией течения с изотропным упрочнением, а функция нагружения зависит от температуры и скорости деформирования. Численное решение связанной нелинейной двумерной начально-краевой задачи получено на базе явной схемы. Исследованы упруговязкопластический, термоупругопластический и термоупруговязкопластический отклики металлокомпозитной цилиндрической полой оболочки прямоугольной в плане формы при ортогональной 2D-структуре армирования. Конструкция фронтально нагружается воздушной взрывной волной. Продемонстрировано, что искривленные металлокомпозитные панели при таком нагружении обязательно нужно рассчитывать учитывая возникающий в них температурный отклик и чувствительность пластических свойств материалов композиции к скорости их деформирования. При этом необходимо применять уточненную теорию изгиба пологих оболочек, а не ее простейший вариант – теорию Амбарцумяна. Более интенсивный термомеханический отклик искривленной панели наблюдается при ее динамическом нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности. В отдельных точках конструкции температура кратковременно может повышаться на 200 °С. Обнаружено, что при динамическом нагружении пологих оболочек со стороны любой лицевой поверхности наблюдается их прощелкивание в сторону вогнутости тонкостенных конструкций.

Ключевые слова: пологие оболочки, многонаправленное армирование волоками, связанная термоупруговязкопластичность, динамическое нагруже-

* Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации 121030900260-6).

ние, уточненная теория изгиба, геометрическая нелинейность, явная численная схема.

Введение

Тонкостенные конструкции из композиционных материалов (КМ) все более активно используются в современной инженерии [1–8]. В процессе эксплуатации они часто подвергаются высокоинтенсивному термосиловому нагружению [5–9], при котором материалы фаз композиции деформируются пластически [5, 7, 9–11]. Поэтому актуальна проблема моделирования неізотермического упругопластического деформирования силовых элементов типа КМ-оболочек и пластин, находящаяся в настоящее время на стадии становления [5, 7, 9, 12–14].

Теплофизические и механические характеристики материалов компонентов композиции могут существенно зависеть не только от температуры [10, 15], но и от скорости их деформирования (особенно пластические свойства вязких металлов и сплавов [15, 16]). В [14] была разработана модель неізотермического упруговязкопластического деформирования материала, армированного в разных направлениях непрерывными волокнами, и выполнены динамические расчеты неупругого поведения изгибаемых пластин из такого материала.

Для моделирования волновых процессов в динамически нагружаемых тонкостенных элементах КМ-конструкций и учета их плохого сопротивления поперечным сдвигам традиционно используют неклассические теории Тимошенко – Рейсснера [5–7, 17, 18], Амбарцумяна [14, 19] или Редди [20, 21]; реже применяют уточненные теории [5, 6, 22, 23].

В [14] продемонстрировано, что при расчетах динамически нагружаемых гибких армированных пластин температуру по их толщине целесообразно аппроксимировать полиномом 7-го порядка. Изгибное поведение КМ-пластин в [14] описывалось теорией Амбарцумяна [19]. Однако известно, что при высокоскоростном нагружении конструкций основным источником тепловыделения в них является диссипация механической энергии, зависящая как от скорости деформаций, так и от уровня достигаемых напряжений [24]. Частота поперечных осцилляций искривленных панелей существенно больше, чем пластин таких же характерных размеров, изготовленных из таких же материалов. Следовательно, скорость деформаций гибких пологих оболочек значительно больше скорости деформаций аналогичных пластин. А значит, тепловыделение в искривленных панелях может оказаться много большим, чем в пластинах, поэтому результаты [14] уже нельзя будет переносить на все тонкостенные элементы КМ-конструкций. Используя разные теории изгиба пластин и оболочек (Тимошенко – Рейсснера, Редди, Амбарцумяна и др.), скорости деформаций и внутренние силы по толщине таких КМ-конструкций можно аппроксимировать с разной степенью точности. Так, в [23] показано, что для адекватного моделирования изотермического неупругого динамического поведения искривленных КМ-панелей нужно применять уточненные теории изгиба. Таким образом, использование уточненной теории может привести к существенным поправкам при расчете диссипации механической энергии в искривленных КМ-панелях и, как следствие, – к значительным поправкам расчетных полей температур и механических откликов пологих КМ-оболочек.

Для решения нелинейных динамических задач изгиба пластин и оболочек используют явные [5, 14, 23] или неявные [9, 25] схемы численного интегрирования.

Настоящая статья посвящена моделированию неізотермического упруговязкопластического динамического деформирования пологих КМ-оболочек в рамках уточненной теории изгиба [23]. Связанная нелинейная термомеханическая начальнo-краевая задача интегрируется численно при использовании явной схемы [14, 23].

1. Формулировка задачи

Исследуется термомеханическое поведение полой оболочки толщиной $2h$. С конструкцией связана ортогональная система координат x_i , причем срединная поверхность – отсчетная ($|x_3| \leq h$), а координатные линии x_1, x_2 – линии главной кривизны поверхности $x_3 = 0$ (рис. 1, на котором искривленность элемента панели не изображена по причине ее малости). Оболочка усилена K семействами непрерывных волокон с плотностями армирования ω_k ($1 \leq k \leq K$). В поперечном направлении Ox_3 структура армирования (возможно, и пространственная) однородна.

С каждым k -м семейством арматуры связана локальная ортогональная система координат $x_i^{(k)}$ так, что ось $Ox_i^{(k)}$ направлена вдоль траектории волокна и ее ориентация в пространстве $Ox_1x_2x_3$ задается углами сферической системы координат θ_k, φ_k (рис. 2). Направляющие косинусы $l_{ij}^{(k)}$ между осями $Ox_i^{(k)}$ и Ox_j ($i, j = 1, 3, 1 \leq k \leq K$) вычисляются по формулам (2.21) из [14]:

$$\begin{aligned} l_{11}^{(k)} &= \sin \theta_k \cos \varphi_k, & l_{12}^{(k)} &= \sin \theta_k \sin \varphi_k, & l_{13}^{(k)} &= \cos \theta_k, \\ l_{21}^{(k)} &= -\sin \varphi_k, & l_{22}^{(k)} &= \cos \varphi_k, & l_{23}^{(k)} &= 0, \\ l_{31}^{(k)} &= -\cos \theta_k \cos \varphi_k, & l_{32}^{(k)} &= -\cos \theta_k \sin \varphi_k, & l_{33}^{(k)} &= \sin \theta_k, \quad 1 \leq k \leq K. \end{aligned} \quad (1)$$

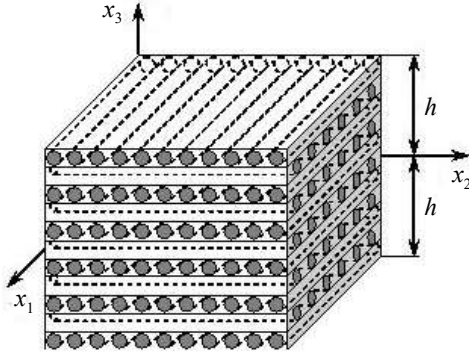


Рис. 1. Элемент полой оболочки с ортогональным 2D-армированием

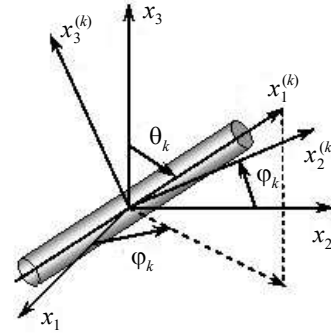


Рис. 2. Взаимная ориентация локальной и глобальной систем координат

Внешние касательные силы на лицевых поверхностях конструкции ($x_3 = \pm h$) пренебрежимо малы, поэтому, согласно [23], перемещения точек гибкой полой КМ-оболочки U_i и осредненные деформации ее композиции ε_{ij} при использовании уточненной теории изгиба можно аппроксимировать выражениями (здесь геометрическая нелинейность моделируется в приближении Кармана):

$$\begin{aligned} U_i(t, \mathbf{r}) &= u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \\ U_3(t, \mathbf{r}) &= w(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3); \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t, \mathbf{r}) = & \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i) - x_3 \partial_i \partial_j w + \sum_{m=0}^M \frac{x_3^{m+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{m+1} - \frac{x_3^2}{m+3} \right) (\partial_i \varepsilon_{j3}^{(m)} + \partial_j \varepsilon_{i3}^{(m)}) + \\ & + \frac{\delta_{ij} w}{R_i} + \frac{1}{2} \partial_i w \partial_j w, \quad \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = (h^2 - x_3^2) \sum_{m=0}^M \frac{x_3^m}{h^2} \varepsilon_{i3}^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

где u_i – тангенциальные перемещения точек срединной поверхности в направлениях x_i ; w – прогиб; R_i – главные радиусы кривизны отсчетной поверхности; t_0 – начальный момент времени t ; ∂_i – оператор дифференцирования по координате x_i ($i = 1, 2$); G – область, занимаемая конструкцией в плане; M – целое число, задающее количество слагаемых в частных суммах по степеням x_3 ; δ_{ij} – символ Кронекера. При $M = 0$ из (2), (3) получаются кинематические соотношения теорий Редди [20, 21] и Амбарцумяна [19]. В (2) и (3) определению подлежат двумерные функции w , u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$).

Приведенные двумерные уравнения движения КМ-панели при учете выражений (2) имеют вид [23]:

$$\begin{aligned} 2h\rho\ddot{w} = & \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\ \rho\ddot{u}_i^{(l)} = & \sum_{j=1}^2 \partial_j (M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w - \\ & - h^l [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}] \partial_i w + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{k=1}^K \rho_k \omega_k, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k, \quad M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \\ u_s^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_s(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad l M_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \\ = \frac{h^l}{2} [(\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)})(1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)})(1 + (-1)^l)], \\ i, j = \overline{1, 3}, \quad s = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1; \end{aligned} \quad (5)$$

ρ_0, ρ_k – объемные плотности материалов связующего и волокон k -го семейства; σ_{ij} – осредненные напряжения в композиции; $\sigma_{33}^{(\pm)}$ – известные из граничных условий напряжения σ_{33} на лицевых поверхностях конструкции ($x_3 = \pm h$); точка – производная по времени t . Неизвестные функции w , u_i , $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($0 \leq m \leq M$) в равенствах (2), (3) однозначно выражаются через новые кинематические переменные $u_i^{(l)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq l \leq M+1$), введенные в (5) при помощи матричного равенства (14) в [23], коэффициенты которого не зависят от решения исследуемой задачи. Внешними объемными нагрузками в (4) пренебрегли. Правые части в равенствах (4) и выражения для $l M_{33}^{(l-1)}$ в (5) получены в предположении, что нормальное напряжение $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$ в гибкой полой КМ-оболочке с приемлемой для практических приложений точностью можно аппроксимировать так [18, 23]:

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad \mathbf{x} \in G, |x_3| \leq h, t \geq t_0. \quad (6)$$

К равенствам (3), (4) и (6) нужно добавить определяющие уравнения, которые связывают между собой скорости осредненных деформаций $\dot{\epsilon}_{ij}$ и напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$, а также и температуру Θ в композиции панели. В рассматриваемый момент времени t эти соотношения целесообразно записать в матричной форме [14]:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + \mathbf{p}, \quad (7)$$

где

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\dot{\sigma}_{11} \ \dot{\sigma}_{22} \ \dot{\sigma}_{33} \ \dot{\sigma}_{23} \ \dot{\sigma}_{31} \ \dot{\sigma}_{12})^T, \quad \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\dot{\epsilon}_{11} \ \dot{\epsilon}_{22} \ \dot{\epsilon}_{33} \ 2\dot{\epsilon}_{23} \ 2\dot{\epsilon}_{31} \ 2\dot{\epsilon}_{12})^T; \quad (8)$$

6×6 -матрица \mathbf{B} и шестикомпонентный вектор-столбец \mathbf{p} определяются формулами (2.18) в [14]; символ T – операция транспонирования. Элементы матрицы $\mathbf{B} = (b_{ij})$ и вектора $\mathbf{p} = (p_i)$ зависят не только от характеристик материалов композиции и структуры армирования (от плотностей ω_k и направляющих косинусов (1), то есть от углов θ_k, φ_k), но и от их текущего термоупруговязкопластического состояния. Конкретные выражения для элементов b_{ij} и p_i ($i, j = \overline{1, 6}$) здесь не приводятся в силу их громоздкости.

Согласно структуре вектор-столбцов $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ и $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}$ (8), из третьего равенства системы (7) можно определить скорость поперечной линейной деформации

$$\dot{\epsilon}_{33} = b_{33}^{-1}(\dot{\sigma}_{33} - p_3 - b_{31}\dot{\epsilon}_{11} - b_{32}\dot{\epsilon}_{22} - 2b_{34}\dot{\epsilon}_{23} - 2b_{35}\dot{\epsilon}_{31} - 2b_{36}\dot{\epsilon}_{12}), \quad (9)$$

где скорость напряжения $\dot{\sigma}_{33}$ получается путем дифференцирования выражения (6) по t , а скорости $\dot{\epsilon}_{ij}$ в правой части определяются дифференцированием по времени соотношений (3), то есть выражаются через двумерные функции w, \dot{w}, \dot{u}_i и $\dot{\epsilon}_{i3}^{(m)}$ ($i = \overline{1, 2}$ и $0 \leq m \leq M$).

Температуру Θ по толщине конструкции аппроксимируем полиномом L -го порядка:

$$\Theta(t, \mathbf{r}) - \Theta^0 = \sum_{l=0}^L \Theta_l(t, \mathbf{x}) x_3^l, \quad \mathbf{x} \in G, |x_3| \leq h, t \geq t_0, \quad (10)$$

где Θ_l ($0 \leq l \leq L$) – двумерные функции, подлежащие определению; $\Theta^0 = \text{const}$ – температура естественного состояния полой оболочки.

Анализ справочных данных показывает [10, 15], что удельную теплоемкость k -го компонента композиции c_k можно аппроксимировать квадратичной зависимостью от температуры:

$$c_k(\Theta - \Theta^0) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}(\Theta - \Theta^0) + c_2^{(k)}(\Theta - \Theta^0)^2, \quad 0 \leq k \leq K, \quad (11)$$

где $c_0^{(k)}, c_1^{(k)}, c_2^{(k)}$ – коэффициенты разложения ($k = 0$ – связующая матрица, $k \geq 1$ – волокна k -го семейства).

Известно, что с приемлемой для инженерных приложений точностью метрику в полой оболочке можно отождествить с метрикой в прямоугольной декартовой системе координат [19]. Поэтому в качестве двумерных уравнений теплового баланса исследуемой КМ-конструкции, соответствующих представлению (10), можно использовать равенства [14]:

$$\begin{aligned} \rho \dot{U}^{(m)} = & -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \overline{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \quad \mathbf{x} \in G, t \geq t_0, 0 \leq m \leq L-2; \quad (12) \\ & - \sum_{l=0}^L (-1)^l h^{l-1} (l\lambda_{33}^{(-)} + h\alpha^{(-)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(-)}(\Theta_\infty^{(-)} - \Theta^0) + q_\infty^{(-)}(t, \mathbf{x}), \end{aligned}$$

$$\sum_{l=0}^L h^{l-1} (\lambda_{33}^{(+)} + h\alpha^{(+)}) \Theta_l(t, \mathbf{x}) = \alpha^{(+)} (\Theta_{\infty}^{(+)} - \Theta^0) - q_{\infty}^{(+)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, t \geq t_0; \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & C_0 \sum_{i=0}^L H(i+m) \Theta_i + \frac{C_1}{2} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L H(i+j+m) \Theta_i \Theta_j + \\ & + \frac{C_2}{3} \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^L \sum_{l=0}^L H(i+j+l+m) \Theta_i \Theta_j \Theta_l = U^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, t \geq t_0, 0 \leq m \leq L-2, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} U^{(m)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad Q_i^{(m)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} q_i(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 \quad (i = \overline{1, 3}), \\ \bar{Q}_3^{(m)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \partial_3 q_3(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3 = h^m [q_3^{(+)} - (-1)^m q_3^{(-)}] - m Q_3^{(m+1)}(t, \mathbf{x}), \\ W^{(m)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} x_3^m dx_3, \quad C_l(\mathbf{x}) = \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^K c_l^{(k)} \rho_k \omega_k(\mathbf{x}) \quad (l = 0, 1, 2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$H(s) = \frac{h^{s+1}}{s+1} [1 - (-1)^{s+1}], \quad \lambda_{33}^{(\pm)} = \lambda_{33} \Big|_{\Theta = \Theta(t, \mathbf{x}, \pm h)}, \quad q_3^{(\pm)} = q_3(t, \mathbf{x}, \pm h) = q_{\infty}^{(\pm)};$$

U – удельная внутренняя энергия композиции; $\Theta_{\infty}^{(\pm)}$ – температура окружающей среды со стороны нижней (–) и верхней (+) лицевых поверхностей конструкции; $\alpha^{(\pm)}$ – коэффициенты теплоотдачи на тех же поверхностях; $q_{\infty}^{(\pm)}$ – заданные тепловые потоки через те же поверхности; λ_{33} – коэффициент поперечной теплопроводности композиции, рассчитываемый по структурным соотношениям (3.2) из [14]; q_i – компоненты вектора осредненного теплового потока в композиции оболочки, связанные с градиентом температуры Θ законом Фурье для анизотропного материала (см. (3.1) и (3.2) в [14]); ρ определено в (5).

Уравнения (12) при учете (15) – это приведенные двумерные уравнения теплопроводности композиции оболочки. Соотношения (13) представляют собой тепловые граничные условия II и III рода, заданные на лицевых поверхностях панели и преобразованные с использованием разложения температуры (10). Равенства (14) – это выражения для двумерных функций $U^{(m)}$ (см. (12) и (15)) через коэффициенты представления (10) при учете аппроксимации (11).

Для завершения постановки рассматриваемой термомеханической задачи необходимо сформулировать граничные и начальные условия. На той части кромки оболочки Γ_{σ} , где заданы силовые граничные условия, в рамках используемой теории изгиба выполняются равенства в силовых факторах (5) [23]:

$$\begin{aligned} & n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) = P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}), \\ & \sum_{j=1}^2 n_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 0 \leq l \leq M+1, \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma}, t \geq t_0, \end{aligned} \quad (16)$$

а на другой части кромки Γ_u , где заданы перемещения, – равенства в обобщенных кинематических переменных (5) с учетом (2) [23]:

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad i = 1, 2, 0 \leq l \leq M+1, \mathbf{x} \in \Gamma_u, t \geq t_0, \quad (17)$$

где

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad (j = \overline{1, 3}, i = 1, 2), \quad (18)$$

$$n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma;$$

p_j – внешние распределенные силы, заданные на торцевой поверхности КМ-панели и действующие по направлениям x_j ($j = \overline{1, 3}$); U_{*3} – прогиб, заданный на кромке Γ_u ; U_{*i} – заданные на торцевой поверхности тангенциальные перемещения в направлениях x_i ($i = 1, 2$); γ – угол, который определяет направление внешней нормали к контуру $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$, ограничивающему область G , отсчитываемый от направления Ox_1 .

Если на торцевой поверхности конструкции заданы тепловые граничные условия общего вида, то на контуре Γ граничные условия для двумерных уравнений теплового баланса (12) с учетом (10), (15) и (18) имеют вид [14]:

$$Q_1^{(m)} n_1 + Q_2^{(m)} n_2 - \alpha_* \sum_{l=0}^L H(l+m) \Theta_l = -\alpha_* H(m) (\Theta_\infty^* - \Theta^0) + Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}), \quad (19)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq t_0, \quad 0 \leq m \leq L-2,$$

где

$$Q_\infty^{(m)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h q_\infty^*(t, \mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad 0 \leq m \leq L-2;$$

α_* , Θ_∞^* , q_∞^* имеют тот же смысл, что и аналогичные величины в равенствах (13), только на торцевой поверхности оболочки.

При $t = t_0$ необходимо использовать начальные условия (см. (2), (5) и (15)) [14, 23]:

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad u_i^{(m)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(m)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(m)}(\mathbf{x}), \\ U^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = U_0^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq m \leq M+1, \quad 0 \leq l \leq L-2, \quad (20)$$

где

$$u_{0i}^{(m)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad v_{0i}^{(m)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^m dx_3, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq m \leq M+1; \quad (21)$$

U_{0j} , V_{0j} ($j = \overline{1, 3}$) – заданные в начальный момент времени t_0 перемещения и скорости точек искривленной панели; $U_0^{(l)}$ – известные двумерные функции, определяемые по формуле (14) с учетом (15), где под Θ_l необходимо понимать коэффициенты разложения (10) заданной начальной температуры $\Theta(t_0, \mathbf{r}) = \Theta_0^*(\mathbf{r})$.

2. Метод расчета

Решение сформулированной нелинейной начально-краевой задачи строится при помощи явной численной схемы, поэтому искомые функции определяются в дискретные моменты времени $t_{n+1} = t_n + \tau$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), где $\tau = \text{const} > 0$ – шаг по времени. Как и в [14, 23], предполагаем, что при $t = t_m$ уже известны значения функций:

$$w^m(\mathbf{x}) = w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_l^{(p)m}(\mathbf{x}) = u_l^{(p)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{33}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) = \sigma_{33}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}),$$

$$\begin{aligned}
U^{(r)}(\mathbf{x}) &= U^{(r)}(t_n, \mathbf{x}), \quad q_i(\mathbf{r}) = q_i(t_n, \mathbf{r}), \quad \Theta_s(\mathbf{x}) = \Theta_s(t_m, \mathbf{x}), \quad \dot{\Theta}_s(\mathbf{x}) = \dot{\Theta}_s(t_{n-1}, \mathbf{x}), \\
q_\infty^{(\pm)}(\mathbf{x}) &= q_\infty^{(\pm)}(t_n, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(\mathbf{r}) = \bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \quad \chi^{(k)}(\mathbf{r}) = \chi^{(k)}(t_m, \mathbf{r}), \\
l &= 1, 2; \quad i, j = \overline{1, 3}; \quad m = n-1, n; \quad 0 \leq p \leq M+1; \quad 0 \leq r \leq L-2, \\
0 \leq s \leq L, \quad 0 \leq k \leq K, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,
\end{aligned} \tag{22}$$

где $\sigma_{ij}^{(k)}$ и $\bar{\varepsilon}_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензоров напряжений и деформаций в k -м компоненте композиции, которые связаны с осредненными напряжениями σ_{ij} и деформациями ε_{ij} в композиции структурными формулами из [14]; $\chi^{(k)}$ – параметр Оджвиста в том же материале.

Для численного интегрирования механической составляющей исследуемой термоупруговязкопластической задачи производные по t заменяем их конечными разностями на трехточечном шаблоне $\{t_{n-1}, t_n, t_{n+1}\}$, что позволяет разработать явную схему шагов по времени [23]. Так, замена вторых производных по t от неизвестных функций в левых частях уравнений (4) их конечно-разностными аналогами при учете обозначений, подобных (22), приводит к соотношениям:

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\tau^2} \left(w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w^n \right) - \sum_{i=1}^2 R_i^{-1} M_{ii}^{(0)} + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}, \\
\frac{\rho}{\tau^2} \left(u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left(M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w^n \right) - h^l \left[\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w^n \\
&- l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w^n + R_i^{-1} M_{i3}^{(l)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq M+1, \quad n = 1, 2, 3, \dots
\end{aligned} \tag{23}$$

Равенства (5) и (22) позволяют вычислить в данный момент времени t_n внешние напряжения $\sigma_{33}^{(\pm)}$ и все силовые факторы $M_{ij}^{(l)}$ в правых частях уравнений (23). Следовательно, при учете граничных условий (16)–(18) из (23) по явной схеме можем определить функции w и $u_i^{(l)}$ в момент времени t_{n+1} . Затем, используя формулы (14) и (15) из [23], получаем функции u_i и $\varepsilon_{i3}^{(m)}$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M$), определяющие перемещения точек оболочки и деформации композиции при $t = t_{n+1}$ (см. (2) и (3)).

Для интегрирования теплофизической составляющей рассматриваемой связанной задачи также используем явную численную схему, но на двухточечном шаблоне по времени $\{t_n, t_{n+1}\}$. После замены производных по времени в левых частях уравнений (12) их конечными разностями при учете обозначений, аналогичных (22), получим равенства:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\tau} \left(U^{(m)} - U^{(m)} \right) &= -\partial_1 Q_1^{(m)} - \partial_2 Q_2^{(m)} - \bar{Q}_3^{(m)} + W^{(m)}, \\
\mathbf{x} \in G, \quad 0 \leq m \leq L-2, \quad n = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{24}$$

Соотношения (15) при учете предположений (22) позволяют в данный момент времени t_n рассчитать правые части в уравнениях (24). Используя при этом граничные условия (19), из равенств (24) по явной схеме получаем значения $U^{(m)}$ в следующий момент времени t_{n+1} . Затем при $t = t_{n+1}$ из уравнений (13) и (14), в которых правые части уже определены, при учете выражений (15) вычисляем коэффициенты $\Theta_i(\mathbf{x})$

($0 \leq l \leq L$) разложения температуры (10). Если материалы фаз композиции термочувствительны (то есть $c_1^{(k)} \neq 0$ и/или $c_2^{(k)} \neq 0$ ($0 \leq k \leq K$) в соотношении (11)), то система уравнений (13) и (14) нелинейна. Линеаризовать равенства (14) можно, используя метод переменных теплофизических параметров, который подобен методу переменных параметров упругости. В остальном численный метод (23) и (24) с учетом равенств (3), (5), (9) и (15), а также структурных формул механики композитов, полученных в [14] (см. (7), (9) и (15)), реализуется совершенно так же, как описано в [14, 23].

Для начала расчета по предложенной численной схеме нужно знать функции $w_0, u_i^{(m)}$ и $U^{(l)}$ ($0 \leq l \leq L - 2$), которые определяются из начальных условий (20) с учетом (21), а также функции w_1 и $u_i^{(m)}$ (см. (23) при $n = 1$). Если при $t = t_0$ внешние нагрузки отсутствуют ($\sigma_{33}^{(\pm)} = 0$) и КМ-панель покоится в естественном состоянии, то, используя начальные условия (20) и уравнения движения (4), по формуле Тейлора получим $w_1 \approx 0$ и $u_i^{(m)} \approx 0$ ($i = 1, 2, 0 \leq m \leq M + 1$) с точностью порядка τ^3 [23].

В [14] установлено, что шаг по времени Δ в уравнениях (23) и (24) следует выбирать из требования выполнения необходимого условия устойчивости Куранта [5].

3. Обсуждение результатов расчетов

Исследуем неизотермическое упруговязкопластическое динамическое поведение гибкой пологой цилиндрической металлокомпозитной оболочки толщиной $2h = 2$ см. В плане конструкция имеет прямоугольную форму, то есть $G: |x_1| \leq a, |x_2| \leq b, a = 3b, 1/R_1 = 0, R_2 = R = \text{const}; b = 50$ см. Стрела подъема панели над продольными кромками (в направлении Ox_1) $f = 10$ см. Радиус R такой конструкции определяется как $R = (b^2 + f^2)/(2f)$ [23], причем имеем $0 < f < 0,4b$, что действительно характеризует оболочку как пологую [19]. По всем кромкам панель жестко закреплена (см. (17) и (18) при $U_{*i} = 0, \mathbf{x} \in \Gamma = \Gamma_u$). До начального момента времени $t = t_0 = 0$ конструкция покоится в естественном состоянии при температуре $\Theta_0^* = \Theta^0 = 20$ °C (см. (20) и (21) при $U_{0i} = 0, V_{0i} = 0, i = \overline{1, 3}$). При $t > t_0$ на оболочку действует избыточное давление $p(t)$, вызванное приходом воздушной взрывной волны [25]:

$$p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\beta(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\beta = -\frac{\ln 0,01}{t_{\min} - t_{\max}} > 0, \quad t_{\min} > t_{\max}, \quad (26)$$

которое прикладывается к нижней ($x_3 = -h$) или верхней ($x_3 = h$) лицевой поверхности панели (см. (4), (6) и (23)), при этом принимается

$$\sigma_{33}^{(-)}(t) = \begin{cases} -p(t), & p_{\max} > 0, \\ 0, & p_{\max} < 0, \end{cases} \quad \sigma_{33}^{(+)}(t) = \begin{cases} 0, & p_{\max} > 0, \\ p(t), & p_{\max} < 0. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь t_{\max} – момент времени t , при котором давление $p(t)$ достигает максимального по модулю значения $|p_{\max}|$; t_{\min} – момент времени, при превышении которого допустимо пренебречь $|p(t)|$ по сравнению с $|p_{\max}|$ (так, выражение (26) соответствует

условию $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$. Используя данные экспериментов [25], в расчетах примем $t_{\max} = 0,1$ мс, $t_{\min} = 2$ мс и $|p_{\max}| = 30$ МПа. Из соотношений (27) следует, что при $p_{\max} > 0$ КМ-оболочка нагружена давлением (25) с нижней (вогнутой) лицевой поверхности, а при $p_{\max} < 0$ – со стороны верхней (выпуклой) лицевой поверхности.

Теплообмен с окружающей средой через лицевые поверхности конструкции осуществляется в условиях естественной конвекции ($q_{\infty}^{(\pm)} = 0$ и $\alpha^{(\pm)} = 30$ Вт/(м²·К) [26]) при температуре воздуха $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. (13)). На кромках пологой оболочки задана температура $\Theta_{\infty}^{(\pm)} = \Theta^0$ (см. (19) при $\alpha_* \rightarrow \infty$).

Цилиндрическая панель изготовлена из магниевое сплава ВТ65 [15], пластические свойства которого сильно чувствительны к скорости деформирования, и армирована высокопрочной стальной проволокой У8А [10]. Упругопластическое поведение этих материалов при активном нагружении в условиях постоянства скорости деформации $\dot{\varepsilon}$ и температуры Θ определяется диаграммой с линейным упрочнением:

$$\sigma = \begin{cases} E_k \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)} / E_k, \\ \sigma_s^{(k)} \text{sign } \varepsilon + E_s^{(k)} (\varepsilon - \varepsilon_s^{(k)} \text{sign } \varepsilon), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(k)}, \end{cases} \quad 0 \leq k \leq K,$$

где σ и ε – осевое напряжение и соответствующая деформация при растяжении и сжатии; $E_k = E_k(\Theta)$ и $E_s^{(k)} = E_s^{(k)}(\Theta, \dot{\varepsilon})$ – модули Юнга и линейного упрочнения k -го компонента композиции; $\sigma_s^{(k)} = \sigma_s^{(k)}(\Theta, \dot{\varepsilon})$ – условный предел текучести того же компонента. Физико-механические характеристики материалов фаз рассматриваемой металлокомпозиции приведены в таблице, где ν – коэффициент Пуассона, λ – коэффициент теплопроводности, α – коэффициент линейного теплового расширения, c – удельная теплоемкость, а в скобках указаны значения температуры (Θ , °С), при которых была определена соответствующая характеристика. Во второй и третьей частях таблицы (при $\dot{\varepsilon} = 0,417$ с⁻¹ и $\dot{\varepsilon} = 104,0$ с⁻¹) приведены только те значения величин, которые отличны от данных, представленных в первой части (при $\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с⁻¹). Как и в статье [14], здесь предполагаем, что в рассматриваемом диапазоне $\dot{\varepsilon}$ можно не учитывать зависимости теплофизических и упругих параметров материалов от скорости деформирования $\dot{\varepsilon}$ [15, 16]. Зависимости физико-механических характеристик от Θ аппроксимируем линейно по табличным данным. Зависимости параметров пластичности от $\dot{\varepsilon}$ аппроксимируем так же, как и в [14].

Таблица

Физико-механические характеристики материалов фаз композиции [10, 15]

Характеристика материала	Магниевый сплав ВМ65	Стальная проволока У8А
1	2	3
$\dot{\varepsilon} = 5 \cdot 10^{-4}$ с ⁻¹		
ρ , кг/м ³	1800,0 (20) 1796,2 (100)	7800,0 (20) 7791,8 (100)
E , ГПа	43,0 (20) 38,5 (100)	210,0 (20) 195,0 (100)
ν	0,330 (20) 0,334 (100)	0,300 (20) 0,305 (100)
σ_s , МПа	267 (20) 219 (100)	3968 (20) 3971 (200)
E_s , ГПа	0,379 (20) 0,367 (100)	6,973 (20) 5,014 (200)

Таблица (продолжение)

1	2	3
λ , Вт/(м·К)	117,23 (20)	42,7 (20)
	121,42 (100)	41,7 (100)
$\alpha \cdot 10^6$, К ⁻¹	20,9 (20)	12,3 (20)
	22,6 (100)	13,2 (100)
c , кДж/(кг·К)	1,032 (20)	0,485 (20)
	1,054 (100)	0,488 (100)
$\dot{\epsilon} = 0,417 \text{ с}^{-1}$		
σ_s , МПа	306 (20)	–
	243 (100)	–
E_s , ГПа	0,589 (20)	–
	0,596 (100)	–
$\dot{\epsilon} = 104,0 \text{ с}^{-1}$		
σ_s , МПа	385 (20)	4100 (20)
	340 (100)	4075 (200)
E_s , ГПа	1,010 (20)	7,035 (20)
	0,625 (100)	6,158 (200)

Дискретизация задачи проводилась так: по координатам x_1 и x_2 использовалась регулярная сетка с шагами $\Delta x_1 = \Delta x_2 = b/50 = 1$ см; шаг по времени $\tau = 0,25$ мкс. Требуемые условия устойчивости построенной численной схемы при этом выполняются (см. (6.3) в [14]).

Панель усилена двумя семействами проволок ($K = 2$), которые уложены по направлениям Ox_1 и Ox_2 (см. рис. 1) с плотностями армирования $\omega_1 = 0,1$ и $\omega_2 = 0,3$ соответственно. Углы армирования при такой структуре задаются значениями (см. (1) и рис. 2): $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi/2$.

В [14] было проанализировано динамическое поведение гибкой металлокомпозитной пластины с теми же характерными размерами (a , b , h , но при $f = 0$) и с той же структурой армирования, что и у рассматриваемой цилиндрической панели. При этом в равенствах, аналогичных (2) и (3), в [14] задавалось $M = 0$ (теория изгиба Амбарцумяна [19]), а в разложении (10) варьировался порядок полинома ($L \geq 2$). Там было продемонстрировано, что в гибких КМ-пластинах, нагружаемых воздушной взрывной волной, температуру тонкостенной конструкции целесообразно аппроксимировать формулой (10) при задании $L = 7$.

В статье [23] показано, что при изотермическом динамическом изгибе искривленных КМ-панелей для адекватного описания их механического поведения в соотношениях (2) и (3) следует задавать $M = 6$ или $M = 7$, а не $M = 0$, как в [14] (то есть нужно использовать уточненную теорию изгиба).

В настоящем исследовании изучается влияние применения уточненных выражений (2) и (3) (при $M = 7$) на расчетный термомеханический отклик гибкой полой оболочки при упруговязкопластическом деформировании фаз ее металлокомпозиции.

Согласно вышеизложенному, на рис. 3 приведены зависимости наибольших значений температуры $\Theta_m(t; M) = \max_{\mathbf{r}} \Theta(t, \mathbf{r}; M)$ в рассматриваемой цилиндрической КМ-панели. На основании результатов статьи [14] в разложении (10) при этом принято $L = 7$. Кривые 1 и 2 получены при $M = 0$ (теория Амбарцумяна) и $M = 7$ (уточненная теория) для полой оболочки, нагруженной снизу (рис. 3а) при

$p_{\max} = 30$ МПа (см. выражения (25)–(27)) и сверху (рис. 3б) при $p_{\max} = -30$ МПа. Кривые 2' приведены для сравнения и определены по уточненной теории изгиба, но без учета зависимости пластических свойств фаз композиции от скорости деформирования (термоупругопластический расчет). В последнем случае результаты получены по данным первой части таблицы (при $\dot{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$ – квазистатическое деформирование).

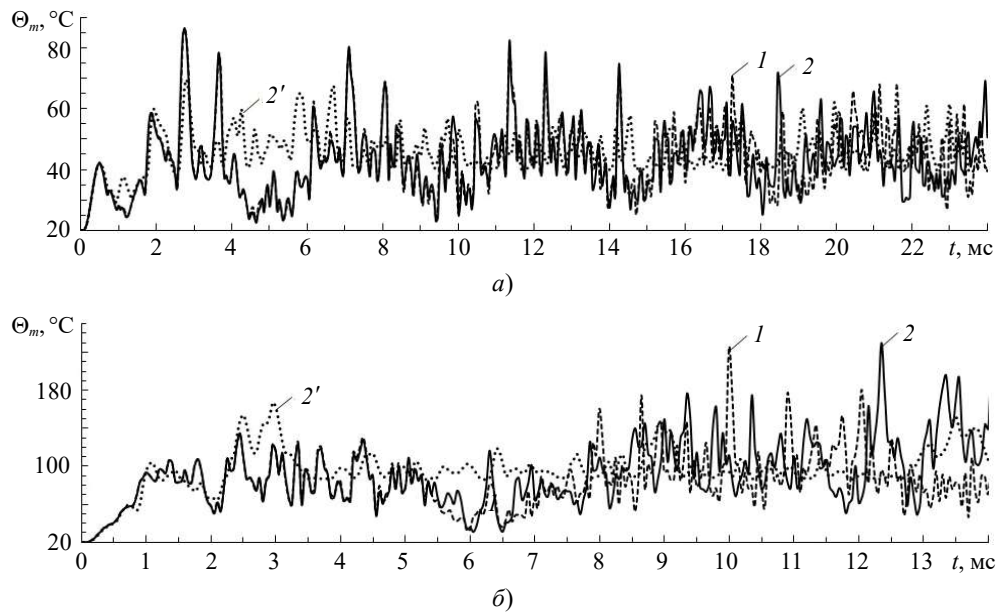


Рис. 3. Зависимость от времени максимальных значений температуры в полой металлокомпозитной оболочке, нагруженной снизу (а) и сверху (б)

Кривые 1 и 2' на рис. 3 (особенно на рис. 3б) существенно отличаются от кривых 2. Следовательно, для адекватного расчета температурного поля в рассматриваемой металлокомпозитной панели необходимо использовать уточненную теорию изгиба пологих оболочек и обязательно учитывать зависимость пластических свойств материалов компонентов композиции от скорости их деформирования. Поведение кривых 1 и 2 на рис. 3б свидетельствует о том, что использование теории Амбарцумяна (кривая 1) и уточненной теории изгиба (кривая 2) при нагружении КМ-конструкции сверху приводит к предсказанию разных моментов времени, в которые достигается расчетный максимум температуры $\Theta_{\max}(M) = \max_{t \geq t_0} \Theta_m(t; M)$. Так, на кривой 1 рис. 3б $\Theta_{\max}(0) = 224$ °С достигается при $t = 10$ мс, а на кривой 2 $\Theta_{\max}(7) = 230$ °С реализуется при $t = 12,4$ мс. Сравнение кривых 2 и 2' на рис. 3 показывает, что расчеты, проведенные без учета чувствительности пластических свойств компонентов композиции к скорости деформирования (кривые 2'), существенно занижают значения $\Theta_{\max}(7)$ по сравнению с результатами термоупруговязкопластической теории (кривые 2).

Как видно из поведения кривых 1 и 2 на рис. 3, локальный нагрев полой металлокомпозитной оболочки при действии на нее воздушной взрывной волны может быть весьма значительным (может превышать 200 °С). В [27] отмечается, что при ударном нагружении металлических образцов экспериментально обнаружен их нагрев в области локализованной пластической деформации до 1000–1700 К. По-

лученные расчетные значения для кривых 1 и 2 на рис. 3б уже сопоставимы с указанными экспериментальными данными. Следовательно, в отличие от результатов работы [14] (в отличие от КМ-пластин), пологие металлокомпозитные оболочки при их динамическом нагружении необходимо рассчитывать не только с учетом теплового отклика в них, но и с учетом термочувствительности всех теплофизических и механических характеристик компонентов композиции.

Выбор теории изгиба искривленной панели и учет теплового отклика в ней оказывает существенное влияние и на механическое поведение рассматриваемой конструкции. Так, на рис. 4 изображены осцилляции прогиба центральной точки полой металлокомпозитной оболочки $w_0(t) = w(t, 0, 0)$, рассчитанные при $p_{\max} = 30$ МПа (рис. 4а) и при $p_{\max} = -30$ МПа (рис. 4б). Кривые 1, 2 и 2' на рис. 4 определены при тех же условиях, что и на рис. 3, а кривые 2'' также приведены для сравнения и получены по уточненной теории изгиба, но без учета теплового отклика в конструкции (упруговязкопластический расчет). Видно, что даже на рассматриваемом малом интервале времени ($0 \leq t \leq 24$ мс) кривые 1, 2' и 2'' существенно отличаются от кривой 2, причем с течением времени это различие становится все большим, особенно при нагружении полой оболочки сверху (см. рис. 4б). Еще большее различие наблюдается при сравнении деформированных состояний компонентов композиции искривленной панели, рассчитанных по разным теориям (соответствующие зависимости здесь не приводятся).

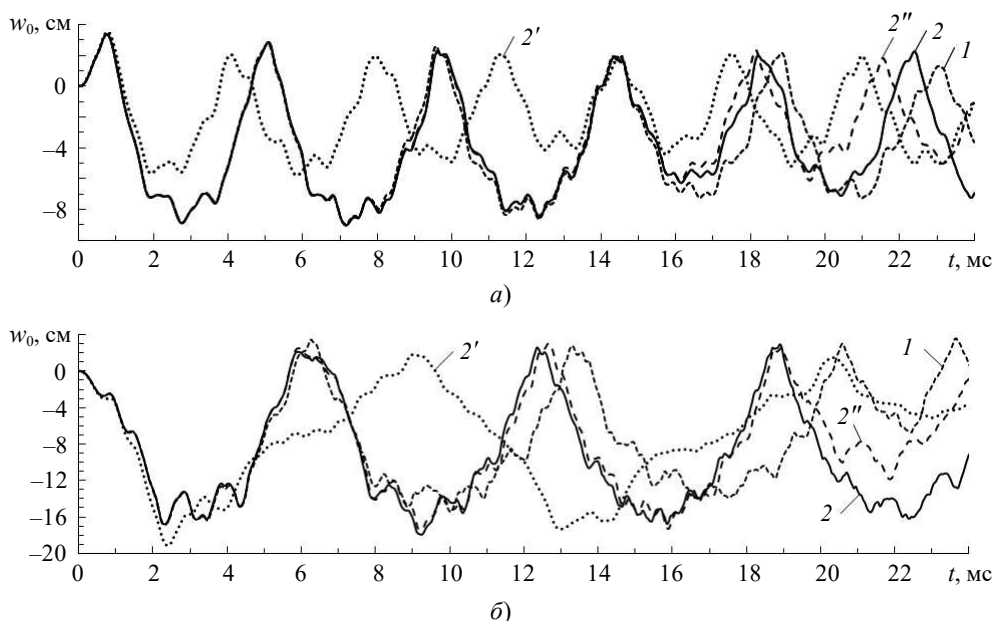


Рис. 4. Зависимость от времени прогиба центральной точки полой металлокомпозитной оболочки, нагруженной снизу (а) и сверху (б)

Таким образом, для адекватного описания механического отклика пологих металлокомпозитных оболочек, нагружаемых воздушной взрывной волной в поперечном направлении, необходимо учитывать возникающее при этом температурное поле, термочувствительность материалов фаз композиции и зависимость их пластических свойств от скорости деформирования, а расчеты нужно проводить по уточненной теории изгиба.

Заключение

Разработанная модель термоупруговязкопластического деформирования гибких искривленных панелей с многонаправленным армированием позволяет с разной степенью точности аппроксимировать температуру и тангенциальные перемещения по толщине таких КМ-конструкций, учитывая при этом термочувствительность физико-механических характеристик компонентов композиции и зависимость их свойств от скорости деформирования. Разработанный численный метод позволяет интегрировать поставленную нелинейную двумерную связанную динамическую задачу по явной схеме шагов по времени.

Проведенный сравнительный анализ результатов расчетов, выполненных при использовании упруговязкопластической, термоупругопластической и термоупруговязкопластической моделей деформирования компонентов композиции, а также при использовании простейшей неклассической теории изгиба Амбарцумяна и уточненной теории изгиба, показал, что для адекватного описания механического поведения металлокомпозитных пологих оболочек, динамически нагружаемых в поперечном направлении, необходимо учитывать температурный отклик в них, термочувствительность материалов фаз композиции и зависимость их пластических свойств от скорости деформирования. При нагружении искривленной металлокомпозитной панели воздушной взрывной волной со стороны вогнутой лицевой поверхности отдельные ее точки могут кратковременно дополнительно нагреваться на 70 °С, а при нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности – на 200 °С.

Более интенсивный термомеханический отклик пологой КМ-оболочки наблюдается при ее нагружении со стороны выпуклой лицевой поверхности. При нагружении такой конструкции со стороны любой из лицевых поверхностей наблюдается ее прощелкивание в сторону вогнутой лицевой поверхности. Максимальный прогиб при прощелкивании достигается уже после прекращения действия воздушной взрывной волны. Наибольшие значения температуры могут достигаться не обязательно в моменты времени, когда происходит прощелкивание пологой КМ-оболочки.

Список литературы

1. Mouritz A., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Composite Structures*. 2001. Vol. 53. Iss. 1. P. 21–42. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6).
2. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*. 2001. Vol. 32. Iss. 7. P. 901–910. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).
3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Progress in Aerospace Sciences*. 2005. Vol. 41. Iss. 2. P. 143–151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite. *Frontiers of Mechanical Engineering*. 2013. Vol. 8. Iss. 2. P. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: ННГУ, 2002. 400 с.
6. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam: Elsevier, 2013. 797 p.
7. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрияшин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. М.: Физматлит, 2014. 406 с.
8. Димитриенко Ю.И. *Механика композитных конструкций при высоких температурах*. М.: Физматлит, 2018. 447 с.

9. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2011. Vol. 46. Iss. 5. P. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
10. *Композиционные материалы*: Справочник. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
11. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 52. Iss. 12. P. 1579–1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
12. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 3. P. 483–508. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
13. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *International Journal of Plasticity*. 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
14. Янковский А.П. Моделирование термоупруговязкопластического деформирования гибких армированных пластин. *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. №1. С. 121–150. DOI: 10.31857/S003282352201009X.
15. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. М.: Машиностроение, 1965. 566 с.
16. Игумнов Л.А., Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Модель упругопластического течения при переменной скорости деформирования. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика*. 2013. №1(3). С. 120–129.
17. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells. *Quarterly of Applied Mathematics*. 1955. Vol. 13. Iss. 2. P. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
18. Богданович А.Е. *Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек*. Рига: Зинатне, 1987. 295 с.
19. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. М.: Наука, 1974. 446 с.
20. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2004. 855 p.
21. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. Саарбрюккен, Германия: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.
22. Куликов Г.М. Термоупругость гибких многослойных анизотропных оболочек. *Изв. РАН. МТТ*. 1994. №2. С. 33–42.
23. Янковский А.П. Уточненная модель вязкоупругопластического деформирования гибких армированных пологих оболочек. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №4. С. 462–474. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2019-81-4-462-474>.
24. Грешнов В.М. *Физико-математическая теория больших необратимых деформаций металлов*. М.: Физматлит, 2018. 231 с.
25. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Computers & Structures*. 1987. Vol. 26. Iss. 1-2. P. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).
26. Луканин В.Н., Шатров М.Г., Камфер Г.М. и др. *Теплотехника: Учеб. для вузов*. М.: Высшая школа, 2003. 671 с.
27. Зуев Л.Б., Данилов В.И. *Физические основы прочности материалов: Учеб. пособие*. Долгопрудный: ИД «Интеллект», 2013. 376 с.

References

1. Mouritz A., Gellert E., Burchill P., Challis K. Review of advanced composite structures for naval ships and submarines. *Compos. Struct.* 2001. Vol. 53. Iss. 1. P. 21–42. [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(00\)00175-6](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(00)00175-6).
2. Bannister M. Challenges for composites into the next millennium – a reinforcement perspective. *Compos. Part A: Appl. Sci. Manuf.* 2001. Vol. 32. Iss. 7. P. 901–910. [https://doi.org/10.1016/S1359-835X\(01\)00008-2](https://doi.org/10.1016/S1359-835X(01)00008-2).

3. Soutis C. Fibre reinforced composites in aircraft construction. *Prog. Aerosp. Sci.* 2005. Vol. 41. Iss. 2. P. 143–151. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2005.02.004>.
4. Gill S.K., Gupta M., Satsangi P.S. Prediction of cutting forces in machining of unidirectional glass fiber reinforced plastics composite. *Front. Mech. Eng.* 2013. Vol. 8. Iss. 2. P. 187–200. <https://doi.org/10.1007/s11465-013-0262-x>.
5. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy [Nonlinear Problems of Dynamics Composites Designs]*. Nizhniy Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).
6. Vasiliev V.V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Amsterdam. Elsevier. 2013. 797 p.
7. Solomonov Yu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ya., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh cilindricheskikh obolochek [Applied Problems of Mechanics of Composite Cylindrical Shells]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2014. 408 p. (In Russian).
8. Dimitrienko Yu.I. *Mekhanika kompozitnykh konstruksiy pri vysokikh temperaturakh [Mechanics of Composite Structures at High Temperatures]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2019. 448 p. (In Russian)
9. Kazanci Z. Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses. *Int. J. Non Linear Mech.* 2011. Vol. 46. Iss. 5. P. 807–817. <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2011.03.011>.
10. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite Materials. Reference Book]*. Ed. D.M. Karpinos. Kiev. Naukova dumka Publ. 1985. 592 p. (In Russian).
11. Leu S.-Y., Hsu H.-C. Exact solutions for plastic responses of orthotropic strain-hardening rotating hollow cylinders. *Int. J. Mech. Sci.* 2010. Vol. 52. Iss. 12. P. 1579–1587. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.07.006>.
12. Vena P., Gastaldi D., Contro R. Determination of the effective elastic-plastic response of metal-ceramic composites. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 3. P. 483–508. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2007.07.001>.
13. Brassart L., Stainier L., Doghri I., Delannay L. Homogenization of elasto-(visco) plastic composites based on an incremental variational principle. *Int. J. Plast.* 2012. Vol. 36. P. 86–112. <https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.03.010>.
14. Yankovskii A.P. Modeling of thermoelastic-visco-plastic deformation of flexible reinforced plates. *Mechanics of Solids*. 2022. Vol. 57. No 7. P. 111–133. DOI: 10.3103/S0025654422070184.
15. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost, ustoychivost i kolebaniya v usloviyakh vysokikh terperatur [Calculations on Strength, Stability and Fluctuations in Conditions of High Temperatures]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1965. 567 p. (In Russian).
16. Igumnov L.A., Karimbayev T.D., Mamayev Sh. Model uprugoplasticheskogo techeniya pri peremennoy skorosti deformirovaniya [The model elastic-plastic flow at a strain variable rate]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika [Bulletin of the Nizhny Novgorod University n.a. N.I. Lobachevsky. Series: Mechanics]*. 2013. No 1 (3). P. 120–129 (In Russian).
17. Reissner E. On transverse vibrations of thin, shallow elastic shells. *Q. Appl. Math.* 1955. Vol. 13. Iss. 2. P. 169–176. <https://doi.org/10.1090/qam/69715>.
18. Bogdanovich A.E. *Nelineynye zadachi dinamiki cilindricheskikh kompozitnykh obolochek [Nonlinear Problems of the Dynamics of Cylindrical Composite Shells]*. Riga. Zinatne Publ. 1987. 295 p. (In Russian).
19. Ambardzumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The General Theory of Anisotropic Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1974. 446 p. (In Russian).
20. Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. Boca Raton. CRC Press. 2004. 855 p.
21. Andreev A.N. *Uprugost i termouprugost sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaya model i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and Thermo-Elasticity Layered Composite Shells. Mathematical Model and Some Aspects of the Numerical Analysis]*. Saarbrucken (Deutschland). Palmarium Academic Publishing. 2013. 93 p. (In Russian).
22. Kulikov G.M. Termouprugost gibkikh mnogosloinnykh anizotropnykh obolochek [Thermo-

elasticity flexible multilayered anisotropic shells]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1994. No 2. P. 33–42 (In Russian).

23. Yankovskii A.P. Utochnennaya model vyazkouprugoplasticheskogo deformirovaniya gibkikh armirovannykh pologikh obolochek [Refined model visco-elastic-plastic deformation reinforced flexible shallow shells]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2019. Vol. 81. No 4. P. 462–474 (In Russian).

24. Greshnov V.M. *Fiziko-matematicheskaya teoriya bolshikh neobratimyykh deformatsiy metallov [Physical and Mathematical Theory of Large Irreversible Deformations of Metals]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2018. 232 p. (In Russian).

25. Houlston R., DesRochers C.G. Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading. *Compos. Struct.* 1987. Vol. 26. Iss. 1-2. P. 1–15. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(87\)90232-X](https://doi.org/10.1016/0045-7949(87)90232-X).

26. Lukanin V.N., Shatrov M.G., Camfer G.M. et al. *Teplotekhnika: Uchebnik dlya vuzov [Heat Engineering: Textbook for Universities]*. Moscow. Vysshaya shkola Publ. 2003. 671 p. (In Russian).

27. Zuev L.B., Danilov V.I. *Fizicheskiye osnovy prochnosti materialov: Uchebnoye posobiye [Physical Foundations of the Strength of Materials: Textbook]*. Dolgoprudny. Intellect Publishing House. 2013. 376 p. (In Russian).

MODELING OF THERMO-ELASTIC-VISCO-PLASTIC DEFORMATION OF SHALLOW METAL-COMPOSITE SHELLS USING THE REFINED THEORY OF BENDING*

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the SB RAS,
Novosibirsk, Russian Federation*

lab4nemir@rambler.ru

Received by the Editor 2022/10/30

The dynamic problem of thermo-elastic-viscous-plastic deformation of shallow composite shells is formulated using the refined theory of bending. In this case, tangential displacements along the thickness of constructions are approximated by polynomials of the third and higher orders, and the deflection does not depend on the transverse coordinate. Normal transverse stresses in the composition have a linear distribution over the thickness. The temperature over the thickness of the curved panels is approximated by a 7th order polynomial. The geometric nonlinearity of the problem is taken into account in the Karman approximation. The constructions are multidirectionally reinforced with continuous fibres. The composition materials are isotropic; their plastic deformation is described by the flow theory with isotropic hardening, and the loading function depends on temperature and strain rate. The numerical solution of the coupled nonlinear two-dimensional initial-boundary value problem is obtained using an explicit scheme. Elastic-viscous-plastic, thermo-elastic-plastic and thermo-elastic-viscous-plastic response of a metal-composite cylindrical shallow shell of a rectangular shape with an orthogonal 2D-reinforcement structure has been studied. The construction is frontally loaded with an air blast wave. It has been demonstrated that curved metal-composite panels under such loading must be calculated, taking into account the temperature response that occurs in them and the sensitivity of the plastic properties of the composite materials to the rate of their deformation. In this case, it is necessary to apply the refined theory of bending of shallow shells, and not its simplest version, the Ambartsumian theory. A more intense

*This work was supported by Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under Project No. 121030900260-6.

thermomechanical response of a curved panel is observed when it is dynamically loaded from the convex front surface. In this case, at individual points of the construction, the temperature can briefly increase by 200 °C. It has been found that under dynamic loading of shallow shells from the side of any face-surface, they snapping towards the concavity of thin-walled structures.

Keywords: shallow shells, multidirectional fiber reinforcement, coupled thermo-elastic-viscous-plasticity, dynamic loading, refined bending theory, geometric nonlinearity, explicit numerical scheme.