УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-1-36-44

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ В ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ НА МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ*

Бабешко В.А.[1,2], **Евдокимова О.В.**[2], **Бабешко О.М.**[1], **Евдокимов В.С.**[1], **Зарецкая М.В.**[1]

[1]*Кубанский государственный университет, Краснодар, Российская Федерация*
[2]*Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

babeshko41@mail.ru

Поступила в редакцию 30.10.2022

Получено точное решение контактных задач для жесткого или деформируемого штампов в полосе конечной ширины. Предполагается, что полоса расположена на многослойном основании конечной толщины. Применяется ранее разработанный авторами универсальный метод моделирования. С его помощью решения сложных граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводятся применением преобразования Галеркина к решению отдельных дифференциальных уравнений, среди которых самыми простыми являются уравнения Гельмгольца. В более ранней публикации авторов при исследовании задачи для деформируемого штампа в полосе пришлось ограничиться асимптотическим решением, справедливым лишь для полос большой относительной ширины. Решение для полосы любых конечных размеров сдерживалось невозможностью построения точного решения контактной задачи для жесткого штампа в полосе любой конечной ширины. В результате точного решения интегрального уравнения Винера – Хопфа в полосе конечной ширины для случая многослойной среды эту контактную задачу удалось решить. Примененный для решения подход состоит в построении точного операторного уравнения бесконечной системы алгебраических уравнений для полос большой ширины, использовании операторной формулы функций от матриц и исследовании построенного решения в диапазоне малой относительной ширины полосы. Полученное таким способом решение совпадает с решением, найденным другим методом, а именно методом сингулярного интеграла для случая малой относительной ширины полосы. Построенное решение приближает к проблемам исследования контактных задач с деформируемым штампом для материалов сложных реологий, описания трещин нового типа в ограниченных телах, моделирования наночастиц, исследования тектонических плит ограниченных размеров.

Ключевые слова: контактная задача, блочный элемент, деформируемый штамп, интегральное уравнение Винера – Хопфа, многослойная среда.

*Выполнено при финансовой поддержке РНФ, проект №22-29-00213.

Введение

В статье авторов [1] при исследовании контактной задачи для деформируемого штампа в полосе пришлось ограничиться асимптотическим решением, справедливым лишь для полос большой относительной ширины. В то же время, более детальный анализ решения, полученного в [1], показал, что фактически решена проблема построения соотношений для вычисления резонансных частот, возникающих в динамических контактных задачах с деформируемым штампом. Именно вычисление неизвестных функционалов, выполненное в [1], приводит к формулам, знаменатели которых представляют собой соотношения для вычисления резонансных частот, выражаемых посредством параметра k. Существование таких резонансов было предсказано в [2, 3] академиком И.И. Воровичем.

В настоящей статье устраняется ограничение на ширину полосы и впервые строится точное решение интегрального уравнения Винера – Хопфа на любом конечном отрезке. Этот результат является важным при исследовании явлений и процессов в трещинах нового типа [4], в модели самосборки наночастиц [5], в сейсмологии.

В развитие подходов, использованных в [6], разработан метод, позволяющий строить точное решение уравнения Винера – Хопфа на конечном отрезке для случая, когда преобразование Фурье-ядра является мероморфной функцией. Такое ядро возникает в тех случаях, когда рассматривается контактная или смешанная задача, поставленная на многослойной среде.

Изучению и решению интегральных уравнений Винера – Хопфа и их систем посвящено большое количество публикаций [7–16]. Для исследования случаев конечного отрезка разработаны приближенные аналитические и асимптотические методы [17], а также численные методы [18, 19]. Авторам не известны работы, в которых было бы построено точное решение уравнения Винера – Хопфа на конечном отрезке для случая многослойной среды.

Интегральное уравнение Винера – Хопфа на отрезке

Интегральное уравнение контактной задачи для уравнения Винера – Хопфа возникает при решении граничной задачи на многослойной среде конечной толщины при наличии смены граничных условий на границах полосы шириной $2a$. Оно приводится к виду [17]:

$$\int_{-a}^{a} k(x-\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x), \quad |x| \le a, \quad k(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(u)\exp(-iux)\,du,$$
$$K(u) = P^{-1}(u)R(u), \quad K(u) = A|u|^{-1}[1+o(1)], \quad |u| >> 1. \tag{1}$$

Предполагается, что мероморфная функция $K(u)$, являющаяся преобразованием Фурье-ядра, обладает следующими свойствами. Четные целые функции $R(u)$ и $P(u)$ имеют первый порядок и конечный тип, обладают счетными множествами нулей, которые предполагаются однократными, имеющими точки сгущения на бесконечности в окрестности мнимых полуосей. Асимптотическое представление нулей и полюсов верхней полуплоскости, свойственное многослойной среде, запишется в виде [17]:

$$\xi_s = ir(s+0{,}5)(1+o(1)), \quad s \to \infty, \quad z_m = ir\,m(1+o(1)), \quad m \to \infty, \quad r = \text{const} > 0. \tag{2}$$

Используя приведенные нули, построим четные целые функции $R(u, z)$, $P(u, \xi)$ в форме бесконечных произведений [20]. Последние будут иметь вид:

$$\begin{gathered}
R(u,z)=R_{\mp}(u,z)R_{\pm}(u,z),\\
R_{\pm}(u,z)=T_{\mp}\exp\,(\mp iu)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{u}{z_s}\right)\exp(u/\pm z_s),\\
T_{\mp}=\mathrm{const},\\
P(u,\xi)=P_{\mp}(u,\xi)P_{\pm}(u,\xi),\\
P_{\pm}(u,\xi)=S_{\mp}\exp\,(\mp iu)\prod_{s=1}^{\infty}\left(1\pm\frac{u}{\xi_s}\right)\exp(u/\pm \xi_s),\\
S_{\mp}=\mathrm{const}.
\end{gathered}\tag{3}$$

После деления $R(u, z)$ на $P(u, \xi)$ получится мероморфная функция, обозначенная $K(u) = P^{-1}(u, \xi)R(u, z)$. Ее нулями являются $\pm z_m$, а полюсами $\pm\xi_s$. С помощью этих функций построим мероморфные функции вида:

$$K_{\pm}(u)=P_{\pm}^{-1}(u,\xi)R_{\pm}(u,z),$$

представляющие собой результат факторизации мероморфной функции $K(u)$.

Построение общего вида решения интегрального уравнения

Применяя универсальный метод моделирования [7], преобразуем интегральное уравнение (1), поменяв порядок интегрирования, и будем искать его решение в форме обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого представим интегральное уравнение в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P^{-1}(u)\,R(u)\,\Phi(u)\exp\,(-iux)du=f(x).\tag{4}$$

С учетом свойств ядра, вычислив обращения Фурье, получим представление

$$\prod_{n=1}^{\infty}R_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x)=f_0(x),\quad f_0(x)=\prod_{m=1}^{\infty}P_m\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)f(x).$$

Слева стоит дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами бесконечного порядка, а справа – подвергнутая дифференциальной операции часть, свидетельствующая о неоднородности дифференциального уравнения.

В соответствии с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами общее решение однородного дифференциального уравнения, отыскиваемое в классических функциях, имеет вид

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}(x),$$

где каждая функция является решением дифференциальных уравнений вида

$$R_n\left(i\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi_{0n}(x)=-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+z_n^2\right)\varphi_{0n}(x)=0.$$

Примем частные решения в виде

$$\varphi_{0n}(x) = C_n^+ \exp(iz_n(a+x)) + C_n^- \exp(iz_n(a-x)).$$

Взяв их сумму, получим общее решение всего дифференциального уравнения, характеристическим уравнением для которого является функция $R(u, z)$

$$\varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^+ \exp(iz_n(a+x)) + C_n^- \exp(iz_n(a-x))].$$

Учет правой части неоднородного уравнения будем осуществлять из условия удовлетворения решения интегральному уравнению. С этой целью упростим правую часть интегрального уравнения, представив ее с помощью преобразования Фурье, положив

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\eta) \exp(-i\eta x) d\eta.$$

С учетом линейности дифференциального уравнения можно решать его для правой части вида

$$F(\eta) \exp(-i\eta x). \tag{5}$$

Построенное решение, зависящее от η, интегрированием по этому параметру позволяет получить решение интегрального уравнения (4) для произвольной правой части $f(x)$. Обозначив частное решение дифференциального уравнения в виде $\varphi_*(x) = A\exp(-i\eta x)$ и построив его преобразование Фурье $\Phi_*(u)$, искомое решение $\Phi(u)$ интегрального уравнения в преобразованиях Фурье запишем в форме

$$\Phi(u) = \Phi_0(u) + \Phi_*(u).$$

В результате подстановки решения в такой форме в интегральное уравнение (4) и с учетом метода, изложенного в гл. VI монографии [17], получаем представление частного решения в виде

$$\Phi_*(u) = \frac{iF(\eta)}{K(\eta)(u-\eta)}.$$

Построение бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

Будем искать решение интегрального уравнения (4) для правой части (5) в виде

$$\varphi(x) = F(\eta)\exp(-i\eta x) + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^+ \exp(iz_n(a+x)) + C_n^- \exp(iz_n(a-x))]. \tag{6}$$

Внесем его в интегральное уравнение (4), предварительно вычислив представление ядра по вычетам и получив выражение [17]

$$k(x) = i\sum_{s=1}^{\infty} b_s \exp(i\xi_s |x|), \quad b_s = [P'(\xi_s)]^{-1} R(\xi_s).$$

В результате вычислений и приравнивания левой части интегрального уравнения к правой, с учетом свойства (3) приходим к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений вида [17]:

$$[\mathbf{A} \pm \mathbf{B}(a)]\mathbf{X}(\pm) = \mathbf{D}(\pm), \quad \mathbf{A} = \left\| \frac{1}{\xi_r - z_m} \right\|, \quad \mathbf{B}(a) = \left\| \frac{\exp(i2az_m)}{\xi_r + z_m} \right\|, \tag{7}$$

$$\mathbf{D}(\pm)=\left\{\frac{1}{K(\eta)}\left[\frac{\exp(ia\eta)}{\eta+\xi_r}\pm\frac{\exp(-ia\eta)}{\eta-\xi_r}\right]\right\},$$

$$\mathbf{X}(\pm)=\{x_m(\pm)\},\quad x_m(\pm)=C_m^+\pm C_m^-.$$

Знаки в системе уравнений берутся в соответствии с этажностью. При любом $a > 0$ операторы **A** и **B** действуют непрерывно в пространстве бесконечных последовательностей C_ν с нормой $\|\mathbf{X}\| = \max|m^\nu x_m|$, $0 < \nu \le 0{,}5$ [17].

Построенная бесконечная система уравнений изучалась в [17] для больших значений параметра $a \gg 1$. Здесь принято во внимание с учетом свойств нулей z_m экспоненциальное убывание всех членов матрицы-функции $\mathbf{B}(a)$.

Применение обратной матрицы

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, построенная в [17], имеет вид

$$\mathbf{A}^{-1}=\|\tau_{gr}\|,\quad \tau_{gr}=\frac{1}{K'_+(-z_g)(\xi_r-z_g)[K_+^{-1}(-\xi_r)]}.$$

Оператор $\mathbf{A}^{-1}$ действует в пространстве C_ν.

Для дальнейшего исследования остановимся на выборе случая верхнего этажа в уравнении (7), случай нижнего этажа изучается аналогично. Подействуем для случая верхнего этажа слева обратной матрицей на уравнение (7), получим уравнение второго рода вида

$$\mathbf{X}=-A^{-1}\mathbf{B}(a)\mathbf{X}+A^{-1}\mathbf{D}. \tag{8}$$

Достаточно легко оценивается норма оператора, имеющая вид

$$\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\|=\max_g\left|g^\nu\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tau_{gr}\frac{\exp(i2az_m)}{\xi_r+z_m}m^{-\nu}\right|, \tag{9}$$

которая стремится к нулю при $a\to\infty$ и возрастает до бесконечности при $a\to 0$.

В силу свойства рядов экспонент представляемая в вертикальных скобках функция (9) является не только непрерывной функцией параметра a, но также и целой функцией [21]. Отсюда следует, что найдется нижняя граница параметра $a = a_0$, такая, что на интервале $(a_0,\infty]$ будет иметь место соотношение $\|A^{-1}\mathbf{B}(a)\|<1$. Тогда в этом интервале изменения параметра a на конечном отрезке $[-a, a]$ методом последующих приближений можно построить точное решение интегрального уравнения Винера – Хопфа, которое имеет вид

$$\mathbf{X}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(A^{-1}\mathbf{B}(a)\right)^n A^{-1}\mathbf{D}. \tag{10}$$

Представление точного решения интегрального уравнения

Рассмотрим оператор $A^{-1}\mathbf{B}(a)\mathbf{X}$, имеющий вид

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tau_{gr}\frac{\exp(i2az_m)}{\xi_r+z_m}x_m=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{K_+(z_m)\exp(iz_m a)}{K'_+(-z_g)(z_m+z_g)}x_m=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma_{mg}x_m\exp(iz_m a),$$

$$\frac{K_+(z_m)}{K'_+(-z_g)(z_m+z_g)}=\sigma_{mg}.$$

Как функция переменного a, он представляет числовой ряд экспонент с комплексными показателями и называется рядом Дирихле [21], а как равномерно сходящийся ряд целых функций, представляет целую функцию параметра a. В результате получим для коэффициентов разложения представление вида

$$\mathbf{X} = \frac{A^{-1}\mathbf{D}}{1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)}. \tag{11}$$

Из теоремы единственности для интегрального уравнения для всех a на положительной оси следует, что знаменатель в (11) не имеет нулей, в противном случае нарушалась бы единственность решения. Таким образом, мероморфную функцию параметра a можно аналитически продолжить на весь полуинтеравал $(0, \infty]$.

Следуя методам функционального анализа [22], операторное представление формулы (11) можно записать в виде

$$\mathbf{X} = \left[1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)\right]^{-1} A^{-1}\mathbf{D}. \tag{12}$$

Нетрудно проверить, что построенное решение представляет собой точное решение уравнения (8) для всех значений параметра a.

Действительно, подействовав оператором $\left[1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)\right]$ слева на равенство (12), получим соотношение

$$\left[1 + A^{-1}\mathbf{B}(a)\right]\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{D}.$$

Это свидетельствует об удовлетворении решения интегральному уравнению, эквивалентному бесконечной системе алгебраических уравнений на любом конечном отрезке. Из найденного решения можно получить предельный случай для малых $a \ll 1$. Так, взяв $f(x) = \Delta = \text{const}$ и произведя преобразования в формуле (11), выделив главный член при $a \to 0$, получаем асимптотическое представление решения в виде

$$\varphi(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{a^2 - x^2}\,\ln a}. \tag{13}$$

Оно совпадает с результатом решения исходного интегрального уравнения (1) методом малых отрезков, разработанным в [17]. Для этого случая интегральное уравнение (1) преобразуется к виду

$$\int_{-a}^{a} \ln(x - \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = \Delta.$$

Его решение совпадает с (13).

Заключение

Построенное решение может быть применено для решения в полосе конечной ширины контактной задачи с деформируемым штампом способом, который изложен в [1]. Этот способ детально описан в указанной статье и может быть применен без дополнительных построений.

Список литературы

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О контактных задачах с деформируемым штампом. *Проблемы прочности и пластичности*. 2022. Т. 84. №1. С. 25–34. DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-1-25-34.

2. Ворович И.И. Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы. *Докл. АН СССР*. 1979. Т. 245. №4. С. 817–820.

3. Ворович И.И. Резонансные свойства упругой неоднородной полосы. *Докл. АН СССР*. 1979. Т. 245. №5. С. 1076–1079.

4. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об интегральных уравнениях трещин нового типа. *Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика, механика, астрономия.* 2022. Т. 9. №3 С. 405–416. https://doi.org/10.21638/spbu01.2022.302.

5. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной механической модели самоорганизации наночастиц. *Изв. РАН. МТТ.* 2022. №6. С. 72–78. DOI: 10.31857/S0572329922060034.

6. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Фрактальные свойства блочных элементов и новый универсальный метод моделирования. *Докл. РАН*. 2021. Т. 499. №1. С. 30–35. DOI: 10.31857/S2686740021040039.

7. Sautbekov S., Nilsson B. Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener–Hopf method. *AIP Conference Proceedings*. 2009. Vol. 1106. Iss. 1. P. 110–117. https://doi.org/10.1063/1.3117085.

8. Нобл Б. *Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. М.: ИЛ, 1962. 280 с.

9. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Applied Mathematics Letters*. 1994. Vol. 7. Iss. 5. P. 43–47. https://doi.org/10.1016/0893-9659(94)90070-1.

10. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*. 1987. Vol. 39. Iss. 1-2. P. 25–55. https://doi.org/10.1080/03091928708208804.

11. Payandeh Najafabadi A.T., Kucerovsky D. Exact solutions for a class matrix Riemann – Hilbert problems. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 2014. Vol. 79. Iss. 1. P. 109–123. DOI: 10.1093/imamat/hxs044.

12. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener – Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM Journal on Applied Mathematics.* 1990. Vol. 50. No 3. P. 819–838. https://www.jstor.org/stable/2101888.

13. Anderson B.D., Moore J.B. *Optimal Filtering.* New York: Dover Publications, 2005. 368 p.

14. Fusai G., Abrahams I.D., Sgarra C. An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance and Stochastics*. 2006. Vol. 10. No 1. P. 1–26. https://doi.org/10.1007/s00780-005-0170-y.

15. Payandeh Najafabadi A.T., Kucerovsky D. On distribution of extrema for a class of Lévy processes. *Journal of Probability and Statistical Science*. 2011. Vol. 9. Iss. 2. P. 127–138. https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.05568.

16. Brockwell P.J., Davis R.A. *Introduction to Time Series and Forecasting*. New York: Springer, 2002. 449 p.

17. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. *Неклассические смешанные задачи теории упругости*. М.: Наука, 1974. 456 с.

18. Glushkov Ye.V., Kirillova Ye.V. A dynamic mixed problem for a packet of elastic layers. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 1998. Vol. 62. No 3. P. 419–425. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00053-7.

19. Glushkov Ye.V., Glushkova N.V. Diffraction of elastic waves by three-dimensional cracks of arbitrary shape in a plane. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1996. Vol. 60. No 2. P. 277–283. https://doi.org/10.1016/0021-8928(96)00035-4.

20. Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

21. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент*. М.: Наука, 1976. 537 с.

22. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* М.: Наука, 1977. 742 с.

References

1. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O kontaktnykh zadachakh s deformiruemym shtampom [On contact problems with deformable stamp]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2022. Vol. 84. No 1. P. 25–34 (In Russian).

2. Vorovich I.I. Spektralnye svoystva kraevoy zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnoy polosy [Spectral properties of the boundary value problem of elasticity theory for an inhomogeneous band]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [*Doklady Physics*]. 1979. Vol. 245. No 4. P. 817–820 (In Russian).

3. Vorovich I.I. Rezonansnye svoystva uprugoy neodnorodnoy polosy [Resonant properties of an elastic inhomogeneous band]. *Doklady Akademii Nauk SSSR* [*Doklady Physics*]. 1979. Vol. 245. No 5. P. 1076–1079 (In Russian).

4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob integralnykh uravneniyakh treshchin novogo tipa [On integral equations of cracks of a new type]. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika, mekhanika, astronomiya* [*Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy*]. 2022. Vol. 9. No 3. P. 405–416 (In Russian).

5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob odnoy mekhanicheskoy modeli samoorganizatsii nanochastits [On one mechanical model of self-organization of nanoparticles]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tel*a [*Solid Mechanics*]. 2022. No 6. P. 72–78 (In Russian).

6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Fractal properties of block elements and a new universal modeling method. *Doklady Physics.* 2021. Vol. 66. Iss. 8. P. 218–222. https://doi.org/10.1134/S1028335821080012.

7. Sautbekov S., Nilsson B. Electromagnetic scattering theory for gratings based on the Wiener–Hopf method. *AIP Conf. Proc*. 2009. Vol. 1106. Iss. 1. P. 110–117. https://doi.org/10.1063/1.3117085.

8. Noble B. *Methods Based on the Wiener – Hopf Technique for the Soluction of Partial Differential Equations.* London. Pergamon press. 1958. 258 p.

9. Chakrabarti A., George A.J. Solution of a singular integral equation involving two intervals arising in the theory of water waves. *Appl. Math. Lett*. 1994. Vol. 7. Iss. 5. P. 43–47. https://doi.org/10.1016/0893-9659(94)90070-1.

10. Davis A.M.J. Continental shelf wave scattering by a semi-infinite coastline. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 1987. Vol. 39. Iss. 1-2. P. 25–55. https://doi.org/10.1080/03091928708208804.

11. Payandeh Najafabadi A.T., Kucerovsky D. Exact solutions for a class matrix Riemann – Hilbert problems. *IMA J. Appl. Math*. 2014. Vol. 79. Iss. 1. P. 109–123. DOI: 10.1093/imamat/hxs044.

12. Abrahams I.D., Wickham G.R. General Wiener – Hopf factorization matrix kernels with exponential phase factors. *SIAM J. Appl. Math*. 1990. Vol. 50. No 3. P. 819–838. https://www.jstor.org/stable/2101888.

13. Anderson B.D., Moore J.B. *Optimal Filtering*. New York. Dover Publications. 2005. 368 p.

14. Fusai G., Abrahams I.D., Sgarra C. An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance Stoch.* 2006. Vol. 10. No 1. P. 1–26. https://doi.org/10.1007/s00780-005-0170-y.

15. Payandeh Najafabadi A.T., Kucerovsky D. On distribution of extrema for a class of Lévy processes. *Journal of Probability and Statistical Science*. 2011. Vol. 9. Iss. 2. P. 127–138. https://doi.org/10.48550/arXiv.1701.05568.

16. Brockwell P.J., Davis R.A. *Introduction to Time Series and Forecasting.* New York. Springer. 2002. 449 p.

17. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [*Nonclassical Mixed Problems of Elasticity Theory*]. Moscow. Nauka Publ. 1974. 456 p. (In Russian).

18. Glushkov Ye.V., Kirillova Ye.V. A dynamic mixed problem for a packet of elastic layers. *J. Appl. Math. Mech*. 1998. Vol. 62. No 3. P. 419–425. https://doi.org/10.1016/S0021-8928(98)00053-7.

19. Glushkov Ye.V., Glushkova N.V. Diffraction of elastic waves by three-dimensional cracks of arbitrary shape in a plane. *J. Appl. Maths Mechs*. 1996. Vol. 60. No 2. P. 277–283. https://doi.org/10.1016/0021-8928(96)00035-4.

20. Markushevich A.I. *Teoriya analiticheskikh funktsi*y [*Theory of Analytic Functions*]. Vol. 2. Moscow. Nauka Publ. 1968. 624 p. (In Russian).

21. Leontyev A.F. *Ryady eksponent* [*Rows of Exponents*]. Moscow. Nauka Publ. 1976. 537 p. (In Russian).

22. Kantorovich L.V., Akilov G.P. *Funktsionalnyy analiz* [*Functional Analysis*]. Moscow. Nauka Publ. 1977. 742 p. (In Russian).

EXACT SOLUTION OF CONTACT PROBLEMS IN A FINITE-WIDTH BAND ON A MULTILAYER MEDIUM*

Babeshko V.A.[1,2], Evdokimova O.V.[2], Babeshko O.M.[1], Evdokimov V.S.[1], Zaretskaya M.V.[1]

[1]*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*
[2]*Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation*

babeshko41@mail.ru

Received by the Editor 2022/10/30

In this paper, for the first time, an exact solution of contact problems for rigid or deformable stamps in a strip of finite width is obtained. It is assumed that the strip is located on a multilayer base of finite thickness. The universal modeling method previously developed by the authors is used. With its help, the solutions of complex boundary value problems for systems of partial differential equations are reduced, using the Galerkin transform, to solving individual differential equations, among which the Helmholtz equations are the simplest. In an earlier work of the authors published, when studying the problem for a deformable stamp in a strip, we had to limit ourselves to an asymptotic solution that is valid only for strips of large relative width. The solution for a strip of any finite size was constrained by the impossibility of constructing an exact solution to the contact problem for a rigid stamp in a strip of any finite width. As a result of the exact solution of the Wiener-Hopf integral equation in a finite-width band for the case of a multilayer medium, this contact problem was solved. The approach applied to the solution consists in constructing an exact operator equation of an infinite system of algebraic equations for large-width bands, using the operator formula of functions from matrices and investigating the constructed solution in the range of small relative bandwidth. The solution obtained in this way coincides with the solution obtained another method, namely, the singular integral method for the case of a small relative bandwidth. The constructed solution brings closer to the problems of research for materials of complex rheologies of contact problems with a deformable stamp, the description of cracks of a new type in limited bodies, modeling of nano particles, the study of tectonic plates of limited dimensions.

Keywords: contact problem, multilayer medium, Wiener-Hopf integral equation on segment, exact solution.

* The research was supported by Russian Science Foundation (project No 22-29-00213).