УДК 539.3 DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-1-26-35

ВЕТВЛЕНИЕ РАВНОВЕСИЙ СЖАТОЙ УПРУГОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ВНУТРЕННИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

Пешхоев И.М., Соболь Б.В.

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Российская Федерация

peshkhoev@rambler.ru

Поступила в редакцию 01.11.2022

Рассматривается задача о потере устойчивости и послекритическом поведении сжатой ортотропной прямоугольной пластины на нелинейно-упругом основании, содержащей непрерывно распределенные поля дислокаций и дисклинаций и находящейся под действием малой нормальной нагрузки. Составляющие сжимающих усилий равномерно распределены по краям и действуют параллельно главным направлениям упругости. Задача сформулирована в виде аналога системы нелинейных уравнений Кармана для ортотропной пластины, содержащих функцию, называемую мерой несовместности, которая выражается через плотности краевых дислокаций и клиновых дисклинаций. Система уравнений учитывает малое поперечное давление и реакцию упругого основания в виде многочлена третьей степени от прогиба. Рассматриваются следующие краевые условия: все края пластины свободно защемлены или подвижно шарнирно оперты; два противоположных края пластины свободно защемлены или подвижно шарнирно оперты, а два других свободны от нагрузок. Функция напряжений ищется в виде двух составляющих: функции напряжений, вызванных наличием внутренних источников, определяемой из линейной краевой задачи, и функции напряжений, вызванных внешним воздействием сжимающих нагрузок и нелинейно-упругого основания, которая определяется из нелинейной краевой задачи. Нелинейная краевая задача исследуется методом Ляпунова – Шмидта. Для решения линеаризованного уравнения, из которого определяется критическое значение сжимающей нагрузки, применяется вариационный метод в сочетании с разностным методом. Строится система уравнений разветвления метода Ляпунова – Шмидта, которая исследуется численными методами. Исследовано послекритическое поведение пластины и выведены асимптотические формулы для новых равновесий в окрестности критической нагрузки. Для различных значений сжимающих нагрузок, параметров ортотропности пластины и параметра интенсивности внутренних напряжений установлены соотношения между значениями параметров основания, при которых сохраняется ее несущая способность в окрестности классического значения критической нагрузки.

Ключевые слова: упругая ортотропная пластина, ветвление равновесий, критическая нагрузка, внутренние напряжения, нелинейно-упругое основание, метод Ляпунова – Шмидта.

Введение

В статье Г.Г. Ростовцева [1] приведен вывод уравнений типа Кармана равновесия упругой ортотропной пластинки под действием нормальной нагрузки. В статье Л.М. Зубова [2] построена модификация системы нелинейных уравнений Кармана для упругой пластинки, учитывающая наличие внутренних источников напряжений в виде дислокаций и дисклинаций. Метод Ляпунова – Шмидта для исследования ветвления решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах был применен Л.С. Срубщиком и В.А. Треногиным [3] для исследования влияния малой нормальной нагрузки на послекритическое поведение сжатой параллельно осям упругой пластины. В статье Е. Рейсснера [4] исследовано влияние нелинейно-упругого основания на послекритическое поведение безмоментного плосконапряженного состояния в случае бесконечной пластины с малыми несовершенствами. В [5, 6] исследованы устойчивость и послекритическое поведение сжатой равномерно распределенными по краям усилиями упругой прямоугольной пластины с дислокациями и дисклинациями, лежащей на нелинейно-упругом основании. Та же задача для неравномерно сжатой упругой пластины рассмотрена в [7]. В [8] рассматриваются бесконечно малые деформации пластины из гиперупругих материалов с учетом неоднородно распределенных начальных напряжений. В статье [9] исследована задача об устойчивости двухслойной круговой пластины с предварительно напряженным слоем. В [10] исследуются изгибные деформации трехслойной пластины с учетом поверхностных и межфазных напряжений и выведены формулы для параметров жесткости пластины. В монографии [11] содержится обзор некоторых результатов применения методов Ляпунова – Шмидта к нелинейным задачам, полученных российскими математиками. Двумерная модель, описывающая многослойные анизотропные деформации пластин, предложена в [12]. В настоящей статье исследуется влияние малой нормальной нагрузки на ветвление равновесий сжатой упругой ортотропной прямоугольной пластины на нелинейно-упругом основании, содержащей источники внутренних напряжений в виде дислокаций и дисклинаций.

Вывод уравнений равновесия и постановка задачи

Уравнения равновесия ортотропной пластины с внутренними напряжениями следуют из результатов исследований Л.М. Зубова [2]. Соотношения теории Кармана для упругих пластинок в случае ортотропной пластины можно записать в виде [1, 13]:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T} \cdot \nabla W) + Q = 0, \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{E_1 h}(T_X - \nu_1 T_Y) & \dfrac{1}{2Gh} S_{XY} \\ \dfrac{1}{2Gh} S_{XY} & \dfrac{1}{E_2 h}(T_Y - \nu_2 T_X) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -D_1\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \nu_2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial Y^2}\right) & -2D_k \dfrac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \\ -2D_k \dfrac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} & -D_2\left(\dfrac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \nu_1 \dfrac{\partial^2 W}{\partial X^2}\right) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$E_1\nu_2 = E_2\nu_1, \quad D_1 = \frac{E_1 I}{1-\nu_1\nu_2}, \quad D_2 = \frac{E_2 I}{1-\nu_1\nu_2}, \quad D_k = GI, \quad I = \frac{h^3}{12},$$

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\nabla W \otimes \nabla W, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T\right). \tag{3}$$

Здесь

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_X & S_{XY} \\ S_{XY} & T_Y \end{pmatrix}$$

– тензор мембранных усилий, $\mathbf{M}$ – тензор изгибающих моментов на единицу длины, $Q(X, Y)$ – поперечная нагрузка, $\mathbf{H}$ – тензор деформаций,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial X} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial X} + \dfrac{\partial u}{\partial Y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial X} + \dfrac{\partial u}{\partial Y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial Y} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\nabla W \otimes \nabla W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial W}{\partial X}\right)^2 & \dfrac{\partial W}{\partial X}\dfrac{\partial W}{\partial Y} \\ \dfrac{\partial W}{\partial X}\dfrac{\partial W}{\partial Y} & \left(\dfrac{\partial W}{\partial Y}\right)^2 \end{pmatrix}$$

– линейная и нелинейная части тензора деформаций, $\mathbf{u} = (u, v)$ – вектор перемещений в плоскости пластины, $W(X, Y)$ – прогиб пластины, D_1, D_2, D_k – жесткости изгиба и жесткость кручения для главных направлений упругости (главные жесткости), E_1, E_2, ν_1, ν_2, G – модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений. Здесь и далее нижние индексы обозначают частные производные по соответствующим переменным. Оси X, Y соответствуют главным направлениям. Формулы (2) описывают зависимость компонент тензора деформации $\mathbf{H}$ от компонент тензора мембранных усилий $\mathbf{T}$ и зависимость компонент тензора изгибающих моментов $\mathbf{M}$ от прогиба W [13].

Повторяя выкладки из [2], рассмотрим уравнение несовместности деформаций

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) = \mu, \tag{4}$$

где $\mu = \nabla \cdot \mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha} + \beta$ называется мерой несовместности, а $\boldsymbol{\alpha}$ и β – соответственно заданные плотности краевых дислокаций и клиновых дисклинаций,

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

– дискриминантный тензор на плоскости. Запишем выражение тензора усилий $\mathbf{T}$ через функцию напряжений Эри:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} F_{YY} & -F_{XY} \\ -F_{XY} & F_{XX} \end{pmatrix}.$$

Подставим в уравнение (4) вместо линейного тензора деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ выражение

$$\mathbf{H} - \frac{1}{2}\nabla W \otimes \nabla W$$

и, учитывая (2) и выражения тензора усилий через функцию напряжений, получим уравнение несовместности деформаций (4) в виде

$$\frac{1}{E_2}F_{XXXX}+\left(\frac{1}{G}-\frac{2\nu_1}{E_1}\right)F_{XXYY}+\frac{1}{E_1}F_{YYYY}+\frac{h}{2}[W,W]=\mu h,$$
$$[F,W]=W_{XX}F_{YY}+W_{YY}F_{XX}-2W_{XY}F_{XY}. \tag{5}$$

Из второго уравнения (1) с учетом (2) следует

$$-\left(D_1W_{XXXX}+2D_3W_{XXYY}+D_2W_{YYYY}\right)+[F,W]+Q=0,\quad D_3=D_1\nu_2+2D_k. \tag{6}$$

Получена система уравнений равновесия (5), (6) ортотропной пластины с дислокациями и дисклинациями, находящейся под действием заданной поперечной нагрузки Q.

Рассмотрим лежащую на нелинейно-упругом основании ортотропную прямоугольную пластину, которая сжимается усилиями P_1 и P_2 вдоль осей X и Y, находится под действием малой поперечной нагрузки $\xi Q(X, Y)$, $\xi << 1$, и содержит поля непрерывно распределенных дислокаций и дисклинаций с плотностью $\mu(X, Y)$. С учетом вышесказанного уравнения равновесия можно записать в виде:

$$\begin{cases} D_1W_{XXXX}+2D_3W_{XXYY}+D_2W_{YYYY}+K_1W-K_3W^3=[F,W]+\xi Q, \\ \dfrac{1}{E_2}F_{XXXX}+\left(\dfrac{1}{G}-\dfrac{2\nu_1}{E_1}\right)F_{XXYY}+\dfrac{1}{E_1}F_{YYYY}=-\dfrac{h}{2}[W,W]+h\mu. \end{cases} \tag{7}$$

Здесь функция $W(X, Y)$ – прогиб, $F(X, Y)$ – функция напряжений, h – толщина пластины, $K_1W-K_3W^3$ – реакция основания [14, 15], K_1, K_3 – параметры основания; начало координат X, Y располагается в центре пластины и оси параллельны ее краям. Рассматриваются краевые условия свободного защемления или шарнирного опирания краев пластины, при этом усилия P_1 и P_2 равномерно распределены по краям $X = \pm a/2$ и $Y = \pm b/2$ соответственно. Рассматриваются также случаи, когда два параллельных края пластины $Y = \pm b/2$ свободны от нагрузок, а два других свободно защемлены или шарнирно оперты. В этих случаях сжимающая нагрузка приложена только к краям $X = \pm a/2$. Предполагается, что энергия деформации упругого основания положительна, то есть выполняется условие

$$\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{K_1W^2}{2}-\frac{K_3W^4}{4}\right)dXdY>0.$$

Переходя с помощью замены $F = \Phi - P_1Y^2/2 - P_2X^2/2$ к однородным краевым условиям и затем к безразмерным переменным по формулам $X = ax$, $Y = by$, $\delta = b/a$, $\Phi(X, Y) = D_1 f(x,y)$, $W(X, Y) = w(x,y)h$, $K_1 = k_1D_1/a^4$, $K_3 = k_3D_1/(h^2a^4)$, $P_1 = p_1D_1/a^2$, $P_2 = p_2D_1/a^2$, $\alpha = 6(1-\nu_1\nu_2)$, $2c_1 = E_2/G - 2\nu_2$, $c_2 = D_2/D_1$, $c_3 = D_3/D_1$, $\alpha = 6(1-\nu_1\nu_2)$, $\mu=\overline{\mu}h^2/a^4$, $Q(X,Y)=hD_1q(x,y)/b^4$, получим в области $\Omega = \{(x, y), |x| < 1/2, |y| < 1/2\}$ систему уравнений и краевые условия на границе $\partial\Omega$:

$$\begin{cases} \delta^4w_{xxxx}+2c_3\delta^2w_{xxyy}+c_2w_{yyyy}+\delta^4k_1w-\delta^4k_3w^3-\delta^2r[f_\mu,w]+ \\ \quad +\delta^4p_1w_{xx}+\delta^2p_2w_{yy}=\delta^2[f,w]+\xi q(x,y), \\ \delta^4f_{xxxx}+\delta^2 2c_1f_{xxyy}+c_2f_{yyyy}=-c_2\alpha\delta^2[w,w], \end{cases} \tag{8}$$

$$\left.[w,w_x,f,f_x]\right|_{|x|=1/2}=0,\quad \left.[w,w_y,f,f_y]\right|_{|y|=1/2}=0, \tag{9}$$

$$\left.[w,w_{xx},f,f_x]\right|_{|x|=1/2}=0,\quad \left.[w,w_{yy},f,f_y]\right|_{|y|=1/2}=0, \tag{10}$$

$$\left[w, w_x, f, f_x\right]\Big|_{|x|=1/2} = 0, \quad \left[w_{yy} + \nu_1 w_{xx}, w_{yyy} + (2-\nu_1) w_{xxy}, f, f_y\right]\Big|_{|y|=1/2} = 0, \qquad (11)$$

$$\left[w, w_{xx}, f, f_x\right]\Big|_{|x|=1/2} = 0, \quad \left[w_{yy} + \nu_1 w_{xx}, w_{yyy} + (2-\nu_1) w_{xxy}, f, f_y\right]\Big|_{|y|=1/2} = 0. \qquad (12)$$

В случае краевых условий (11) или (12) в первом уравнении (8) $p_2 = 0$. Через f_μ обозначено решение краевой задачи

$$\delta^4 f_{xxxx} + \delta^2 2c_1 f_{xxyy} + c_2 f_{yyyy} = 2c_2 \alpha \delta^4 \overline{\mu}, \quad [f, f_x]\Big|_{|x|=1/2} = 0, \quad [f, f_y]\Big|_{|y|=1/2} = 0. \qquad (13)$$

В уравнениях (8) rf_μ – функция напряжений, вызванных наличием внутренних источников, коэффициент r называется параметром интенсивности внутренних напряжений; f – функция напряжений, вызванных внешним воздействием (сжимающих нагрузок, малого поперечного давления и нелинейно-упругого основания).

Метод решения

Пусть гильбертово пространство E^2 – замыкание множества вектор-функций $f = (f_1, f_2)$, $g = (g_1, g_2)$ с нормой, определяемой скалярным произведением $\langle f, g\rangle_{E^2} = \iint_\Omega (f_1 g_1 + f_2 g_2)\, dxdy$; E^1 – замыкание линейного множества бесконечно дифференцируемых в области Ω вектор-функций $u = (w, f)$, $v = (w_1, f_1)$ с компонентами, удовлетворяющими одному из краевых условий (9)–(12), с конечной нормой, порожденной скалярным произведением $\langle u, v\rangle_{E^1} = \sum\limits_{i+j\le 4} \langle \partial^{i+j} u / \partial x^i \partial y^j, \partial^{i+j} v / \partial x^i \partial y^j \rangle_{E^2}$. Считая функцию $\overline{g}$ достаточно гладкой в области Ω, запишем краевую задачу (8) с одним из краевых условий (9)–(12) как нелинейное операторное уравнение

$$\mathrm{M}_0 = \Pi u + \mathrm{T} u + \xi \mathrm{R}, \quad u = (w, f) \in E^1, \qquad (14)$$

$$\mathrm{M}_0 u = \begin{pmatrix} \delta^4 w_{xxxx} + 2c_3 \delta^2 w_{xxyy} + c_2 w_{yyyy} + \delta^4 k_1 w - \delta^2 r [f_\mu, w] + \delta^4 p_1 w_{xx} + \delta^2 p_2 w_{yy} \\ -(\delta^4 f_{xxxx} + \delta^2 2c_1 f_{xxyy} + c_2 f_{yyyy}) \end{pmatrix},$$

$$\Pi u = \begin{pmatrix} \delta^2 [f, w] \\ c_2 \alpha \delta^2 [w, w] \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T} u = \begin{pmatrix} \delta^4 k_3 w^3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad R = (q, 0) \in \mathrm{E}^2.$$

Из публикаций И.И. Воровича [16] и Н.Ф. Морозова [17] следует, что операторы M_0, Π и T действуют из пространства E^1 в E^2. При $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $r = 0$, $\xi = 0$ уравнение (14) имеет тривиальное решение $u_* = (\omega_*, f_*) = (0, 0)$. Точка бифуркации (p_1^0, p_2^0, r^0) уравнения определяется в [18] как собственное число краевой задачи $\mathrm{M}_0 u = 0$, которая получена линеаризацией уравнения (14) на тривиальном решении. Пусть $p_1 = p_1^0 + \lambda_1$, $p_2 = p_2^0 + \lambda_2$, $r = r^0 + \lambda_3$, $w = w_* + \omega = \omega$, $f = f_* + \psi = \psi$. Запишем уравнение для малых возмущений λ_1, λ_2, λ_3, $u = (\omega, \psi)$ в виде

$$\mathrm{M}_0 u = \Pi u + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathrm{C}_i u + \mathrm{T} u + \xi \mathrm{R}, \qquad (15)$$

$$\mathrm{C}_1 u = \begin{pmatrix} -\delta^2 \omega_{xx} \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathrm{C}_2 u \equiv \begin{pmatrix} -\delta^2 \omega_{yy} \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathrm{C}_3 u \equiv \begin{pmatrix} \delta^2 [\omega, F_\mu] \\ 0 \end{pmatrix}, \; \mathrm{C}_i : E^1 \to E^2, \; i = 1, 2, 3.$$

Линеаризованное уравнение $\mathrm{M}_0 u = 0$ сводится к краевой задаче на собственные значения

$$\delta^4\omega_{xxxx} + 2c_3\delta^2\omega_{xxyy} + c_2\omega_{yyyy} + \delta^4 k_1\omega - \delta^2 r[f_\mu, \omega] + \delta^2 p_2\omega_{yy} = -\delta^4 p_1\omega_{xx}, \quad (16)$$

где функция ω удовлетворяет одному из краевых условий (9)–(12) для w (в случае краевых условий (11) или (12) полагаем $p_2 = 0$). Вариационно-разностный метод решения задачи на собственные значения (16) обоснован в [5] для случая изотропной пластины ($c_3 = c_2 = 1$) и применим для случая ортотропной пластины. Пусть p_1^0 – собственное значение задачи (16) при заданных значениях параметров p_2, r, и k_1 и ему отвечают две собственные функции ω_1 и ω_2. Тогда собственные вектор-функции уравнения $\mathrm{M}_0 u = 0$ имеют вид $\varphi_1 = (\omega_1, \psi_1)$, $\varphi_2 = (\omega_2, \psi_2)$, при этом $\psi_1 = \psi_2 = 0$. Строим оператор Шмидта [18] в виде

$$\mathrm{M}_1 u = \mathrm{M}_0 u + \sum_{i=1}^{2} a_i\mu_i\varphi_i, \ \ \mu_i = \langle u, \varphi\rangle_{E^1}, \quad a_i \iint\limits_{\Omega} \omega_i^2 dxdy = 1, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

Нелинейное уравнение (14) с учетом (17) приводится к уравнению

$$\mathrm{M}_1 u = \Pi u + \sum_{i=1}^{2} a_i\mu_i\varphi_i + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \mathrm{C}_i u + \mathrm{T}u + \xi \mathrm{R}. \quad (18)$$

Решение уравнения (18) будем искать в виде ряда

$$u = \sum_{i+j+k+l+m+n\geq 1} u_{ijklmn}\, \mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n, \quad u_{ijklmn} = (\omega_{ijklmn}, \psi_{ijklmn}),$$

и, приравнивая нулю выражения при степенях $\mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n$, выведем уравнения для определения коэффициентов $\mathrm{M}_1 u_{ijklmn} = f_{ijklmn}$. Функции f_{ijklmn} находятся с помощью правой части (18) и при последовательном решении задачи $\mathrm{M}_1 u_{ijklmn} = f_{ijklmn}$ выражаются через собственные функции ω_1 и ω_2 задачи (16). Учитывая разложение решения u в ряд, из второго уравнения (17) получим систему уравнений разветвления [18]

$$\sum_{i+j+k+l+m+n>0} L_{ijklmn}^{(t)} \mu_1^i \mu_2^j \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n = \mu_t, \quad L_{ijklmn}^{(t)} = \langle f_{ijklmn}, \varphi_t \rangle_{E^2}, \quad t = 1, 2. \quad (19)$$

Если $\overline{\mu}(x, y)$ – четная по обеим переменным (нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной), то и функция внутренних напряжений $f_\mu(x, y)$ (решение задачи (13)) четная по обеим переменным (нечетная по одной переменной и четная или нечетная по другой переменной). Поэтому будем считать, что собственному значению p_1^0 задачи (16) соответствует одна собственная функция $\omega(x, y)$, четная по обеим переменным. В этом случае мы имеем одно уравнение разветвления (19) в виде

$$\sum_{i+j+k+l+m+n>0} L_{ijklmn}\, \mu_1^i \lambda_1^k \lambda_2^l \lambda_3^m \xi^n = \mu, \quad L_{ijklmn} = \langle f_{ijklmn}, \varphi \rangle_{E^2}, \quad \varphi = (\omega, 0).$$

Полагая, что $\overline{g}(x, y)$ – четная функция, с учетом выражений для f_{ijklmn} по формулам (19) находим коэффициенты уравнения разветвления для степеней до третьего порядка включительно (нулевые значения пропущены):

$$L_{10000} = a_1 \iint\limits_{\Omega} \omega_1^2 dxdy = 1, \quad L_{00001} = \iint\limits_{\Omega} \overline{g}\omega_1 dxdy, \quad L_{11000} = \delta^2 \iint\limits_{\Omega} \omega_{1,x}^2 dxdy,$$

$$L_{10100} = \delta^2 \iint\limits_{\Omega} \omega_{1,y}^2 dxdy, \quad L_{10010} = \delta^2 \iint\limits_{\Omega} [\omega_1, F_\mu]\, \omega_1 dxdy,$$

$$L_{30000} = -\frac{\delta^2}{\alpha c_2}\iint\limits_{\Omega} \overline{\Delta}^{\,2}(\psi_{20000})\psi_{20000}dxdy + k_3\delta^2 \iint\limits_{\Omega} \omega_1^4 dxdy,$$
$$\overline{\Delta}^2(f) = \delta^4 f_{xxxx} + \delta^2 2c_1 f_{xxyy} + c_2 f_{yyyy}.$$

Функция ψ_{20000} является решением задачи $-\overline{\Delta}^2(f) = c_2\alpha\delta^2[\omega_1,\omega_1]$ с краевыми условиями $f = f_n = 0$ на границе прямоугольника Ω. Уравнение разветвления имеет вид

$$\Phi(\mu) = b\mu^3 + \Lambda\mu + d\xi = 0, \quad b = L_{30000},$$
$$\Lambda = L_{11000}\lambda_1 + L_{10100}\lambda_2 + L_{10010}\lambda_3, \quad d_1 = L_{00001}. \tag{20}$$

Уравнения вида (20) впервые были получены в [19–21].

Результаты численных расчетов

П р и м е р. Для сжатой вдоль свободных краев квадратной ортотропной пластины ($p_2 = 0$) с двумя свободно защемленными краями с параметром основания $k_1 = 100$ и параметром интенсивности внутренних напряжений $r^0 = 70$ (в (13) $\overline{\mu}(x,y) = 1$) найдено критическое значение потери устойчивости $p_0 = 48{,}13$, которому соответствует собственная функция $\omega(x,y)$. Коэффициенты уравнений разветвления (20) равны: $b = -0{,}379 + 0{,}147k_3$, $\Lambda = 3{,}47\lambda_1 - 0{,}457\lambda_3$, $\lambda_1 = p_1 - p_1^0$, $\lambda_3 = r - r^0$, $d_1 = -0{,}587$. Параметры ортотропности пластины: $c_1 = 0{,}449$; $c_2 = 0{,}0835$; $c_3 = 0{,}207$; $\nu_1 = 0{,}46$; $\nu_2 = 0{,}038$. Обозначим через $S_\varepsilon^+(p_1^0, r^0)$ $\left(S_\varepsilon^-(p_1^0, r^0)\right)$ множество точек (p_1, r), удовлетворяющих условиям $\Lambda > 0$ ($\Lambda < 0$) и $|\lambda_1| + |\lambda_3| < \varepsilon$.

Рассматривая (20) вместе с условием потери устойчивости $\partial\Phi/\partial\mu = 0$, приходим к следующему утверждению: критические значения (p_s, r_s) определяются из уравнения

$$3{,}47\left(p_1^s - p_1^0\right) - 0{,}457\left(r^s - r^0\right) = -\frac{\left(12\sqrt{3}d\xi b^2\right)^{2/3}}{4b}. \tag{21}$$

При этом, если $k_3 > k_3^* = 2{,}578$ $(k_3 < k_3^*)$, то в малой полуокрестности $S_\varepsilon^-\left(p_1^0, r^0\right)$ $\left(S_\varepsilon^+\left(p_1^0, r^0\right)\right)$ существуют два новых решения нелинейного уравнения (14) с асимптотическими представлениями:

$$\widetilde{u} = \pm\sqrt{\frac{-\Lambda_s}{3b}}\varphi_1 + \xi u_{00001} + o\left(|\Lambda_s|\right), \quad \Lambda_s = 3{,}47\left(p_1^s - p_1^0\right) - 0{,}457\left(r^s - r^0\right), \tag{22}$$

где u_{00001} определяется из уравнения $M_1 u_{00001} = R$.

При отсутствии внутренних источников напряжений $(\overline{\mu}(x,y) = 0)$ для $k_3 > k_3^*$ получим $\Lambda_s = 3{,}47\left(p_1^s - p_1^0\right) < 0$, что означает снижение несущей способности пластины на «размягченном» [19–21] упругом основании в результате наличия малого поперечного давления ($\xi > 0$).

Заключение

Исследована устойчивость и ветвление равновесий по одной собственной форме сжатой упругой ортотропной прямоугольной пластины с внутренними источниками напряжений, лежащей на нелинейно-упругом основании. Выведены асимптотические формулы для новых состояний равновесия в окрестности критической нагрузки.

Список литературы

1. Ростовцев Г.Г. Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости. *Труды Ленинградского ин-та инженеров гражданского воздушного флота*. 1940. Т. 20. С. 37–60.

2. Зубов Л.М. Уравнения Кармана для упругой пластинки с дислокациями и дисклинациями. *Доклады РАН*. 2007. Т. 412. №3. С. 343–346.

3. Срубщик Л.С., Треногин В.А. О выпучивании гибких пластин. *Прикладная математика и механика*. 1968. Т. 32. №4. С. 721–727.

4. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. 49. Iss. 1. P. 45–57. DOI: 0.1002/SAPM197049145.

5. Пешхоев И.М., Соболь Б.В. Выпучивание и послекритическое поведение сжатой прямоугольной пластины с внутренними напряжениями, лежащей на нелинейно-упругом основании. *Проблемы прочности и пластичности*. 2019. Т. 81. №2. С. 137–145. DOI: 10.32326/1814-9146-2019-81-2-137-145.

6. Пешхоев И.М., Соболь Б.В. Выпучивание сжатой упругой прямоугольной пластины со свободными краями. *Проблемы прочности и пластичности.* 2020. Т. 82. №2. С. 244–251. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-2-244-251.

7. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dislocations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams.* 2020. Vol. 134. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.

8. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic materials with initial stresses. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.

9. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two-layered circular plate with a prestressed layer. *Mathematics and Mechanics of Solids*. 2015. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. https://doi.org/10.1177/1081286515612527.

10. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. 2017. Vol. 81. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.

11. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. 2002. Vol. 550. P. 497–548. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6.

12. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates. *Acta Mechanica.* 2019. Vol. 230. P. 2891–2904. https://doi.org/10.1007/s00707-019-02405-y.

13. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. М.–Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. 463 с.

14. Amazigo J.S., Frank D. Dynamic buckling of on imperfect column on nonlinear foundation. *Qwarterly of Applied Mathematics*. 1973. Vol. 31. No 1. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/99711.

15. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA Journal.* 1977. Vol. 15. Iss. 11. P. 1638–1644. https://doi.org/10.2514/3.7463.

16. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. М.: Наука, 1989. 376 с.

17. Морозов Н.Ф. К нелинейной теории тонких пластин. *Докл. АН СССР*. 1957. Т. 114. №5. С. 968–671.

18. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М.: Наука, 1969. 528 с.

19. Koiter W.T. *Elastic Stability and Post Buckling Behavior in Nonlinear Problems.* Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. P. 257–275.

20. Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. *Advances in Applied Mechanics*. 1974. Vol. 14. P. 1–65. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9.

21. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. No 9. P. 1505–1510. https://doi.org/10.2514/3.3727.

References

1. Rostovtsev G.G. Raschet tonkoy ploskoy obshivki, podkreplennoy rebrami zhestkosti [Calculation of a thin flat skin reinforced with stiffeners]. *Trudy Leningradskogo instituta inzhenerov grazhdanskogo vozdushnogo flota*. 1940. Vol. 20. P. 37–60 (In Russian).

2. Zubov L.M. Uravneniya Karmana dlya uprugoy plastinki s dislokatsiyami i disklinatsiyami [Karman equations for an elastic plate with dislocations and dislocations]. *Doklady RAN* [*Doklady Physics*]. 2007. Vol. 412. No 3. P. 343–346 (In Russian).

3. Srubshchik L.S., Trenogin V.A. O vypuchivanii gibkikh plastin [About buckling of flexible plates]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [*Journal of Applied Mathematics and Mechanics*]. 1968. Vol. 32. No 4. P. 721–727 (In Russian).

4. Reissner E. On postbuckling behavior and imperfection sensitivity of thin elastic plates on a non-linear elastic foundation. *Studies in Applied Mathematics*. 1970. Vol. 49. Iss. 1. P. 45–57. DOI: 0.1002/SAPM197049145.

5. Peshkhoev I.M., Sobol B.V. Vypuchivanie i poslekriticheskoe povedenie szhatoy pryamo-ugolnoy plastiny s vnutrennimi napryazheniyami, lezhashchey na nelineyno-uprugom osnovanii [Buckling and postbuckling behavior compressedof the rectangular plate with internal stresses, lying on non-linear elastic foundation]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2019. Vol. 81. No 2. P. 137–145 (In Russian).

6. Peshkhoev I.M., Sobol B.V. Vypuchivanie szhatoy uprugoy pryamougolnoy plastiny so svobodnymi krayami [Buckling a compressed elastic rectangular platewith free edges]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2020. Vol. 82. No 2. P. 244–251 (In Russian).

7. Peshkhoev I.M., Stolyar A.M. Buckling of the nonuniformly compressed plate with dis-locations and disclinations. In: *Analysis of Shells, Plates, and Beams.* 2020. Vol. 134. P. 345–366. https://doi.org/10.1007/978-3-030-47491-1_18.

8. Altenbach H., Eremeyev V.A. On the effective stiffness of plates made of hyperelastic ma-terials with initial stresses. *Int. J. Non Linear Mech*. 2010. Vol. 45. Iss. 10. P. 976–981. DOI:10.1016/j.ijnonlinmec.2010.04.007.

9. Eremeev V.V., Zubov L.M. Buckling of a two-layered circular plate with a prestressed layer. *Math.Mech. Solids.* 2015. Vol. 22. Iss. 4. P. 773–781. https://doi.org/10.1177/1081286515612527.

10. Altenbach H., Eremeyev V.A. Bending of a three-layered plate with surface stresses. In: *Analysis and Modelling of Advanced Structures and Smart Systems*. 2017. Vol. 81. P. 1–10. DOI: 10.1007/978-981-10-6895-9_1.

11. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov – Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. In: *Mathematics and its Applications*. 2002. Vol. 550. P. 497–548. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6.

12. Belyaev A.K., Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Two-dimensional linear models of multilayered anisotropic plates. *Acta Mech.* 2019. Vol. 230. P. 2891–2904. https://doi.org/10.1007/s00707-019-02405-y.

13. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki* [*Anisotropic Plates*]. Moscow. Leningrad. OGIZ Gostekhizdat Publ. 1947. 463 p. (In Russian).

14. Amazigo J.S., Frank D. Dynamic buckling of on imperfect column on nonlinear foundation. *Q. Appl. Math*. 1973. Vol. 31. No 1. P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1090/qam/99711.

15. Hansen J.S. Some two-mode buckling problems and their relation to catastrofe theory. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15. Iss. 11. P. 1638–1644. https://doi.org/10.2514/3.7463.

16. Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek* [*Mathematical Problems of the Nonlinear Theory of Gently Sloping Shells*]. Moscow. Nauka Publ. 1989. 376 p. (In Russian).

17. Morozov N.F. K nelineynoy teorii tonkikh plastin [On the nonlinear theory of thin plates]. *Doklady AN SSSR* [*Doklady Physics*]. 1957. Vol. 114. No 5. P. 968–671 (in Russian).

18. Vaynberg M.M., Trenogin V.A. *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy* [*Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations*]. Moscow. Nauka Publ. 1969. 528 p. (In Russian).

19. Koiter W.T. *Elastic Stability and Post Buckling Behavior in Nonlinear Problems*. Madison. Univ. of Wisconsin Press. 1963. P. 257–275.
20. Budiansky B. Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures. *Adv. Appl. Mech*. 1974. Vol. 14. P. 1–65. https://doi.org/10.1016/S0065-2156(08)70030-9.
21. Budiansky B., Hutchinson J.W. A survey of some buckling problems. *AIAA Journal*. 1966. Vol. 4. No 9. P. 1505–1510. https://doi.org/10.2514/3.3727.

RAMIFICATION OF EQUILIBRIA OF A COMPRESSED ELASTIC ORTHOTROPIC PLATE WITH INTERNAL STRESSES

Peshkhoev I.M., Sobol B.V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

peshkhoev@rambler.ru

Received by the Editor 2022/11/01

The problem of loss of stability and post-critical behavior of a compressed orthotropic rectangular plate on a nonlinearly elastic base containing continuously distributed fields of dislocations and disclinations and under the influence of a small normal load is considered. The compressive force components are evenly distributed along the edges and act parallel to the main directions of elasticity. The problem is formulated as an analogue of a system of nonlinear Karman equations for an orthotropic plate containing a function called the incompatibility measure, which is expressed in terms of the densities of edge dislocations and wedge disclinations. The system of equations takes into account the small transverse pressure and the reaction of the elastic base in the form of a polynomial of the third degree of deflection. The following boundary conditions are considered: the edges of the plate are freely pinched or movably pivotally supported; two opposite edges of the plate are freely pinched or movably pivotally supported, and the other two are free from loads. The stress function is sought in the form of two components: the stress function caused by the presence of internal sources, determined from the linear boundary value problem, and the stress function caused by the external impact of compressive loads and a nonlinear elastic base, which is determined from the nonlinear boundary value problem. The nonlinear boundary value problem is investigated by the Lyapunov – Schmidt method. To solve the linearized equation from which the critical value of the compressive load is determined, the variational method is used in combination with the difference method. A system of branching equations of the Lyapunov – Schmidt method is constructed, which is investigated by numerical methods. The post-critical behavior of the plate is investigated and asymptotic formulas for new equilibria in the vicinity of the critical load are derived. For various values of compressive loads, the orthotropy parameters of the plate and the intensity parameter of internal stresses, the relations between the values of the base parameters are established, at which its bearing capacity is preserved in the vicinity of the classical value of the critical load.

Keywords: elastic orthotropic plate, branching of equilibria, critical load, internal stresses, nonlinear elastic base, Lyapunov – Schmidt method.