

УДК 539.4

DOI: 10.32326/1814-9146-2023-85-1-5-13

**МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ
ПОЛОС СКОЛЬЖЕНИЯ В МЕТАЛЛАХ***

© 2023 г.

Сарафанов Г.Ф.¹, Уткин А.А.²

¹*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального
исследовательского центра «Институт прикладной физики РАН»,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Нижегородский государственный педагогический университет
имени Козьмы Минина, Российская Федерация*

gf.sarafanov@yandex.ru

Поступила в редакцию 29.08.2022

Проведено теоретическое исследование процессов локализации пластической деформации в металлах. В рамках системы эволюционных уравнений для плотности дислокаций с учетом размножения и аннигиляции дислокаций установлена возможность бегущего решения для полосы скольжения. Показано, что исходная система имеет два состояния равновесия. Для суммарной плотности дислокаций и дислокационного заряда, нормированных на стационарное однородное решение для плотности дислокаций, – это состояния $(0,0)$ и $(1,0)$ на фазовой плоскости вышеуказанных переменных в безразмерном виде. Из анализа особых точек следует, что точка $(0,0)$ является устойчивым узлом, а состояние равновесия $(1,0)$ – седлом. В этом случае искомым решением исходной системы эволюционных уравнений является сепаратриса, идущая из точки $(0,0)$ в точку $(1,0)$, которая соответствует решению в виде волны перепада для плотности дислокаций, формирующей полосу скольжения, и импульса для дислокационного заряда. Показано, что дислокационный заряд распространяется во фронте полосы скольжения, который движется со скоростью $u = kV$ (V – дрейфовая скорость дислокаций, обусловленная внешней нагрузкой, коэффициент пропорциональности k удовлетворяет условию $0 < k < 1$). Из анализа существования автомодельных решений следует, что неодородные волновые решения имеют место только при $A = t_1/t_2 > 1$, где t_1 и t_2 – соответственно времена релаксации суммарной плотности дислокаций и дислокационного заряда к однородному состоянию. Оценки показывают, что при существующих процессах генерации и аннигиляции дислокаций $A > 1$, то есть удовлетворяются условия формирования полосы скольжения заданного типа. Рассмотрена устойчивость полученных волновых стационарных автомодельных решений. В предположении, что отклонения от стационарных решений для плотности дислокаций и дислокационного заряда ограничены заданной областью и, считая отклонения малыми, получаем задачу Штурма – Лиувилля на собственные функции и собственные значения с нулевыми крайними условиями на границе этой области. Соответствующее преобразование сводит задачу к уравнению типа уравнения Шредингера. Показано, что при определенных

* Выполнено при поддержке РФФ (проект №22-22-00749).

условиях спектр оператора Шредингера находится в левой полуплоскости, то есть отклонения плотности дислокаций и дислокационного заряда затухают по экспоненте с течением времени, и искомые стационарные решения асимптотически устойчивы. Рассмотрен вопрос, связанный с определением установившейся скорости распространения волн. Линеаризация исходной системы уравнений для плотности дислокаций и дислокационного заряда позволила получить линейное уравнение типа синус-Гордона, из решения которого определена установившаяся скорость волны. Показано, что для исходной системы уравнений при $A > 1$ произвольные начальные распределения искомых переменных с течением времени приобретают форму автомодельных решений и перемещаются с минимально возможной скоростью $u = 2VA^{1/2}/(1 + A)$.

Ключевые слова: локализация деформации, полосы Людерса, полосы скольжения, плотность дислокаций, дислокационный заряд, волны перепада и импульса.

Введение

Известно [1, 2], что нестабильность течения кристалла сопровождается, как правило, локализованностью макропластической деформации. Последняя реализуется путем распространения локализованной пластической волны, обычно называемой полосой Чернова – Людерса (или полосой Людерса).

Полосы Людерса являются сопутствующим явлением различных неустойчивых режимов пластической деформации в сплавах [3]. Например, в сплавах с объемно-центрированной кубической решеткой (ОЦК-сплавах), где на кривой деформации присутствует площадка текучести, полоса зарождается на поверхности образца в областях, где имеются концентраторы напряжений. Формируясь, полоса сдвига увеличивается до тех пор, пока зона пластического сдвига не охватит все поперечное сечение образца.

Получены интересные результаты по наблюдению развития полос Людерса [4]. Полосы Людерса наблюдались в стали и дюралюминии D1 при растяжении образцов со скоростью 10^{-6} м/с. Как показал эксперимент, пластическая деформация локализуется сначала в форме зародыша полосы, который появляется на стадии микропластической деформации (при этом возникновение зародыша сопровождается акустоэмиссией). Зародыш полосы Людерса в виде узкого клина деформированного материала прорастает поперек образца со скоростью порядка 10^{-3} м/с. В момент, когда зародыш пересекает все сечение образца, заканчивается формирование полосы Людерса и начинается ее расширение. Сформированная полоса Людерса ограничена парой фронтов, движущихся в противоположных направлениях вдоль образца со скоростями порядка 10^{-4} м/с.

Полосы Людерса, полосы Портевена – Ле Шателье, как было показано в [5], обусловлены закреплением дислокаций атомами примеси, которые на определенном участке движутся вследствие диффузии вместе с дислокациями. Такая точка зрения является основной и представлена в большом количестве публикаций [6–13]. Альтернативная точка зрения [14–16], связанная с развитием процессов интенсивного размножения дислокаций, теоретически недостаточно развита в отличие от первого подхода.

В настоящей статье в рамках нелинейной распределенной модели рассмотрен возможный механизм возникновения и формирования полосы скольжения, обусловленный механизмами дислокационной кинетики.

1. Волны плотности дислокаций

Система самосогласованных двумерных уравнений, описывающая нелинейную динамику ансамбля прямолинейных дислокаций, характеризуемых плотностью $\rho_a(\mathbf{r}, t)$, может быть представлена в виде [17, 18]:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_a \mathbf{v}_a = F_a(\rho_a), \quad (1)$$

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t) = \mathbf{V}_a + M \mathbf{f}_a(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\mathbf{f}_a(\mathbf{r}, t) = - \sum_c \int \rho_c(\mathbf{r}') \nabla W_{ac}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{v}_a(\mathbf{r}, t)$ – скорость скольжения дислокаций; \mathbf{V}_a – дрейфовая скорость дислокаций, обусловленная внешним напряжением σ_e ; \mathbf{f}_a – сила, действующая на единицу длины дислокации со стороны системы дислокационных зарядов (M – подвижность дислокаций); $F_a(\rho_a)$ – нелинейные функции, определяемые спецификой кинетических механизмов дислокационных реакций; $W_{ac}(r) = Gb^2 \ln(R_c/r)/(2\pi)$ – энергия взаимодействия двух параллельных винтовых дислокаций на единицу длины (G – модуль сдвига, b – модуль вектора Бюргерса, R_c – размер кристалла).

Предположим, что дислокации в полосе некоторой ширины l скользят вдоль оси Ox заданной системы координат, характеризуются плотностями $\rho_+(x, t)$, $\rho_-(x, t)$, значениями модулей векторов Бюргерса (b , $-b$) и скоростями $v_+(x, t)$, $v_-(x, t)$, участвуют в процессах генерации и рекомбинации.

Тогда система эволюционных уравнений (1)–(3) запишется в виде [19, 20]:

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + V_a \frac{\partial \rho_a}{\partial x} + M G b \rho_a \sum_{a=\pm} b_a \rho_a = \delta_f (\rho_+ + \rho_-) - \kappa \rho_+ \rho_-, \quad (4)$$

где $\kappa \approx 2Vh$ – коэффициент захвата дислокаций в дипольные конфигурации (с последующей аннигиляцией), δ_f – коэффициент размножения [20], $a = \pm$, V – модуль дрейфовой скорости дислокаций, h – радиус захвата дислокаций в дипольные конфигурации.

Стационарное однородное решение системы уравнений (4) имеет вид

$$\rho_+ = \rho_- = 0, \quad \rho_+ = \rho_- = 4\delta_f/\kappa = \rho_0/2. \quad (5)$$

В безразмерных переменных

$$n = (\rho_+ + \rho_-)/\rho_0, \quad m = (\rho_+ - \rho_-)/\rho_0, \quad (6)$$

которые характеризуют, соответственно, нормированные на ρ_0 плотность дислокаций $\rho = \rho_+ + \rho_-$ и дислокационный заряд $I = \rho_+ - \rho_-$ (строго говоря, дислокационный заряд определяется как bI , но физически избыточная плотность $I = \rho_+ - \rho_-$ характеризуется дислокационным зарядом, поэтому для удобства мы ее будем так называть), система (4) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + V \frac{\partial m}{\partial x} &= \beta n(1-n) + \beta m^2, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + V \frac{\partial n}{\partial x} &= -cm, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\beta = 4\delta_f$, $c = M G b^2 \rho_0$.

Рассмотрим начальную задачу: $n(\infty, 0) = m(\pm\infty, 0) = 0$, $n(-\infty, 0) = 1$. Будем полагать, что функции $n(x, t)$ и $m(x, t)$ зависят от автомодельной переменной $\xi = x - ut$, тогда система (7) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (1-\gamma^2) \frac{dn}{d\xi} &= -\beta[\gamma n(1-n) + \alpha m - \gamma m^2], \\ (1-\gamma^2) \frac{dm}{d\xi} &= -\beta[n(1-n) - \alpha \gamma m + m^2] \end{aligned} \quad (8)$$

с условиями на границе $n(\infty) = m(\pm\infty) = 0$, $n(-\infty) = 1$, где $\gamma = uV$, $\alpha = c/\beta$. Система (8) имеет два состояния равновесия $(0,0)$ и $(1,0)$ на плоскости (n, m) .

Линеаризуем систему (8) в окрестности $(0,0)$ и положим $n, m \propto \exp(\lambda\beta\xi)$. Из соответствующего характеристического уравнения находим

$$\lambda_{1,2} = \frac{\gamma(\alpha-1) \pm \sqrt{\gamma^2(\alpha-1)^2 - 4\alpha(1-\gamma^2)}}{2(1-\gamma^2)}, \quad (9)$$

откуда

$$\gamma \geq \gamma_{\min} = 2 \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}, \quad (10)$$

так как подкоренное выражение в (9) является неотрицательной величиной ввиду положительности $n(x, t)$.

Из (9) следует, что в области $\gamma_{\min} \leq \gamma < 1$ и $\alpha > 1$ особая точка $(0,0)$ является устойчивым узлом, а состояние равновесия $(1,0)$ – седлом. Искомым решением системы (8) будет сепаратриса, идущая из точки $(0,0)$ в точку $(1,0)$, которая соответствует решениям в виде волны переключения для плотности дислокаций $n(\xi)$, формирующей полосу скольжения, и импульса для дислокационного заряда $m(\xi)$ во фронте волны $n(\xi)$ (рис. 1). Графики соответствуют стационарному решению системы (8) при $\alpha = 4$, $\gamma = \gamma_{\min}$ ($\alpha = 0,8$; штриховая линия на левом графике соответствует бегущему импульсу дислокационного заряда во фронте волны перепада, движущемуся со скоростью $u = \gamma_{\min}V$).

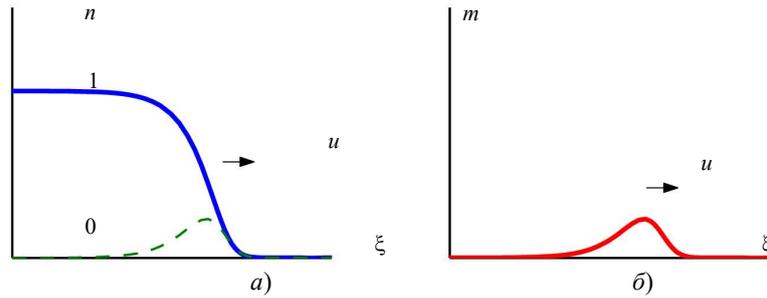


Рис. 1. Бегущий фронт полосы скольжения в виде волны перепада для плотности дислокаций (а) и дислокационного заряда (б), нормированных на ρ_0

Анализ автомодельных решений (8) показывает, что решения имеют место только при $\alpha > 1$ и $u \in [u_{\min}, V]$, где $u_{\min} = 2V\sqrt{\alpha}/(1+\alpha)$.

2. Устойчивость стационарных решений

Исследуем устойчивость автомодельных решений $n(\xi) = n_c(\xi)$ и $m(\xi) = m_c(\xi)$. Будем полагать, что отклонения от стационарных решений ограничены заданной областью $[-L, L]$. В этом случае решение системы (7) будем искать в виде:

$$\begin{aligned} n(\xi) &= n_c(\xi) + \delta n(\xi, t), & \delta n(\xi, t) &= n_p(\xi) \exp(\lambda t), \\ m(\xi) &= m_c(\xi) + \delta m(\xi, t), & \delta m(\xi, t) &= m_p(\xi) \exp(\lambda t). \end{aligned}$$

Считая отклонения δn и δm малыми, получаем задачу Штурма – Лиувилля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi}(m_p + \gamma n_p) &= n_p[1 - \lambda - 2n_c] + 2m_c m_p, \\ \frac{d}{d\xi}(n_p + \gamma m_p) &= (\lambda + \alpha)m_p \end{aligned} \quad (11)$$

с краевыми условиями $n_p(\pm L) = m_p(\pm L) = 0$. Подстановка

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= (m_p + \gamma n_p) \exp\left\{\frac{1}{2} \int p(\xi) d\xi - \frac{\gamma \xi (\lambda + \alpha)}{1 - \gamma^2}\right\}, \\ p(\xi) &= [\gamma(1 + \alpha) - 2(m_c + \gamma n_c)] / (1 - \gamma^2) \end{aligned}$$

сводит систему (11) к уравнению

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + [H(\lambda, \xi) - U(\xi)] \psi = 0, \quad \psi(\pm L) = 0, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} H(\lambda, \xi) &= -[\lambda^2 + \lambda B(\xi)] / (1 - \gamma^2)^2, \\ B(\xi) &= \alpha - 1 + 2n_c + 2\gamma m_c, \\ U(\xi) &= [\gamma^2(1 + \alpha)/4 - \alpha + q(\xi)] / (1 - \gamma^2)^2, \\ q(\xi) &= \gamma(\alpha - 1)(m_c + \gamma n_c) + (2\alpha - 1)(1 - \gamma^2) + (n_c + \gamma m_c)^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Как следует из теории систем типа (12) [21], если $B, U \geq 0$, спектр оператора $L(\lambda) = -d^2/d\xi^2 - H + U$ находится в левой полуплоскости, то есть $\text{Re } \lambda \leq 0$. Соответственно при $B, U \geq 0$ отклонения $\delta n(\xi, t)$ и $\delta m(\xi, t)$ затухают по экспоненте с течением времени и искомые стационарные решения асимптотически устойчивы. Нетрудно показать, что условия $B, U \geq 0$ реализуются при

$$\alpha > 1, \quad \gamma_{\min} \leq \gamma < 1, \quad (14)$$

где γ_{\min} определяется соотношением (10).

Заключение

Проведенный анализ показал, что система (7) с начальными условиями $n(x, 0) = n_c(x)$ и $m(x, 0) = m_c(x)$ приводит к устойчивым решениям бегущего типа, имеющим скорость распространения $u = \gamma V$, где $\gamma_{\min} \leq \gamma < 1$.

Представляет интерес определение установившейся скорости распространения волн. Исследуем этот вопрос аналогично [22]. Проведем линеаризацию системы (7), в результате для $m(x, t)$ (либо $n(x, t)$) получим линейное уравнение типа синус-Гордона

$$m_{tt} - V^2 m_{xx} + 2\delta\sqrt{c\beta}m_t = c\beta m, \quad \delta = \frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}. \quad (15)$$

Из его решения

$$m(x, t) \propto t^{1/2} \exp\left\{\frac{\sqrt{c\beta}}{V}\left(x - \frac{Vt}{\sqrt{1+\delta^2}}\right)\right\} \quad (16)$$

определим установившуюся скорость волны

$$u = \left|\frac{dx}{dt}\right| \approx 2V \frac{\sqrt{\alpha}}{1+\alpha} - \frac{V}{2t\sqrt{c\beta}}. \quad (17)$$

Таким образом, для системы уравнений (7) при $\alpha > 1$ произвольные начальные распределения переменных $m(x, 0)$ и $n(x, 0)$ с течением времени приобретают форму автомодельных решений $m_c(x - ut)$ и $n_c(x - ut)$ и перемещаются со скоростью

$$u = u_{min} = \frac{2V\sqrt{\alpha}}{1+\alpha}. \quad (18)$$

Заметим, что параметр α , определяющий условие распространения волн, можно определить как $\alpha = \tau_p/\tau_i > 1$, где τ_p и τ_i – соответственно времена релаксации суммарной плотности дислокаций и дислокационного заряда к однородному состоянию $\rho = \rho_0$, $I = 0$. Оценки показывают, что при рассматриваемой кинетике дислокаций $\alpha \approx 4\pi > 1$, то есть удовлетворяются условия формирования полосы скольжения указанного типа.

Список литературы

1. Friedel J. *Dislocations*. Oxford: Pergamon, 1964. 491 p.
2. Hirth J.P., Lothe J. *Theory of Dislocations*. New York: McGraw-Hill, 1968. 780 p.
3. MacCormick P.G. Theory of flow localisation due to dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica*. 1988. Vol. 36. Iss. 12. P. 3061–3067. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
4. Горбатенко В.В., Данилов В.И., Зуев Л.Б. Неустойчивость пластического течения: полосы Чернова – Людерса и эффект Портевена – Ле Шателье. *ЖТФ*. 2017. Т. 87. Вып. 3. С. 372–377. DOI: 10.21883/JTF.2017.03.44241.1818.
5. Cottrell A.H. *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*. London: Clarendon Press, 1953. 224 p.
6. Estrin Y., Kubin L.P. Plastic instabilities: phenomenology and theory. *Materials Science and Engineering: A*. 1991. Vol. 137. P. 125–134. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90326-I](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90326-I).
7. Sarafanov G.F., Shondin Yu.G. Deformation instability in crystalline alloys: Luders bands. *Materials Physics and Mechanics*. 2021. Vol. 47. No 3. P. 431–437. DOI: 10.18149/MPM.4732021_5.
8. Zhang J., Huang M., Sun B. et al. Critical role of Lüders banding in hydrogen embrittlement susceptibility of medium Mn steels. *Scripta Materialia*. 2021. Vol. 190. P. 32–37. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2020.08.025.
9. Zhang Y., Ding H., Ultrafine also can be ductile: On the essence of Lüders band elongation in ultrafine-grained medium manganese steel. *Materials Science and Engineering: A*. 2018. Vol. 733. P. 220–223. DOI: 10.1016/j.msea.2018.07.052.
10. Shariat B.S., Li Y., Yang H. et al. On the Lüders band formation and propagation in NiTi shape memory alloys. *Journal of Materials Science and Technology*. 2022. Vol. 116. P. 22–29. DOI: 10.1016/j.jmst.2021.11.028.

11. Cai Y., Yang S., Fu S. et al. Investigation of Portevin – Le Chatelier band strain and elastic shrinkage in Al-based alloys associated with Mg contents. *Journal of Materials Science and Technology*. 2017. Vol. 33. Iss. 6. P. 580–586. DOI:10.1016/j.jmst.2016.05.012.
12. Wang X.G., Wang L., Huang M.X., Kinematic and thermal characteristics of Lüders and Portevin – Le Chatelier bands in a medium Mn transformation-induced plasticity steel. *Acta Materialia*. 2017. Vol. 124 P. 17–29. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.10.069.
13. Kubin L.P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin – Le Chatelier effect. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1990. Vol. 38. No 5. P. 697–708. DOI: 10.1016/0956-7151(90)90021-8.
14. Johnston W.G., Gilman J.J. Dislocation velocities, dislocation densities and plastic flow in lithium fluoride crystals. *Journal of Applied Physics*. 1959. Vol. 30. Iss. 2. P. 129–143. DOI: 10.1063/1.1735121.
15. Владимиров В.И. *Физическая теория пластичности и прочности*. Л.: Изд-во ЛПИ, 1975. 151 с.
16. Zbib H.M., Aifantis E.C. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation-I. On the initiation of shear bands. *Res Mechanica*. 1988. Vol. 23. No 2-3. P. 261–277.
17. Сарафанов Г.Ф. Экранирование упругого поля в ансамбле дислокаций. *Физика твердого тела*. 1997. Т. 39. №9. С. 1575–1579.
18. Сарафанов Г.Ф. Механизмы пространственного упорядочивания дислокаций при пластической деформации кристаллов. *Кристаллография*. 2004. Т. 49. № 5. С. 905–908.
19. Сарафанов Г.Ф. Волны разупрочнения пластической деформации в кристаллах. *Физика твердого тела*. 2001. Т. 43. Вып. 2. С. 254–260.
20. Мальгин Г.А. Процессы самоорганизации дислокаций и пластичность кристаллов. *УФН*. 1999. Т. 169. №9. С. 979–1010. DOI: 10.3367/UFNr.0169.199909с.0979.
21. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*. М.: Наука, 1965. 448 с.
22. Kamenskii V.G., Manakov S.V. Formation of domains of stability from unstable state in nonlinear systems with dissipation. *JETP Letters*. 1987. Vol. 45. P. 499–502.

References

1. Friedel J. *Dislocations*. Oxford. Pergamon. 1964. 491 p.
2. Hirth J.P., Lothe J. *Theory of Dislocations*. New York. McGraw-Hill. 1968. 780 p.
3. MacCormick P.G. Theory of flow localisation due to dynamic strain ageing. *Acta Metallurgica*. 1988. Vol. 36. Iss. 12. P. 3061–3067. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(88\)90043-0](https://doi.org/10.1016/0001-6160(88)90043-0).
4. Gorbatenko V.V., Danilov V.I., Zuev L.B. Plastic flow instability: Chernov – Lüders bands and the Portevin – Le Chatelier effect. *Technical Physics*. 2017. Vol. 62. Iss. 3. P. 395–400. DOI: 10.1134/S1063784217030082.
5. Cottrell A.H. *Dislocations and Plastic Flow in Crystals*. London. Clarendon Press. 1953. 224 p.
6. Estrin Y., Kubin L.P. Plastic instabilities: phenomenology and theory. *Mater. Sci. Eng. A*. 1991. Vol. 137. P. 125–134. [https://doi.org/10.1016/0921-5093\(91\)90326-I](https://doi.org/10.1016/0921-5093(91)90326-I).
7. Sarafanov G.F., Shondin Yu.G. Deformation instability in crystalline alloys: Luders bands. *Mater. Phys. Mech*. 2021. Vol. 47. No 3. P. 431–437. DOI: 10.18149/MPM.4732021_5.
8. Zhang J., Huang M., Sun B. et al. Critical role of Lüders banding in hydrogen embrittlement susceptibility of medium Mn steels. *Scripta Materialia*. 2021. Vol. 190. P. 32–37. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2020.08.025.
9. Zhang Y., Ding H. Ultrafine also can be ductile: On the essence of Lüders band elongation in ultrafine-grained medium manganese steel. *Mater. Sci. Eng. A*. 2018. Vol. 733. P. 220–223. DOI: 10.1016/j.msea.2018.07.052.
10. Shariat B.S., Li Y., Yang H. et al. On the Lüders band formation and propagation in NiTi shape memory alloys. *J. Mater. Sci. Technol*. 2022. Vol. 116. P. 22–29. DOI: 10.1016/j.jmst.2021.11.028.
11. Cai Y., Yang S., Fu S. et al. Investigation of Portevin – Le Chatelier band strain and elastic shrinkage in Al-based alloys associated with Mg contents. *J. Mater. Sci. Technol*. 2017. Vol. 33. Iss. 6. P. 580–586. DOI:10.1016/j.jmst.2016.05.012.

12. Wang X.G., Wang L., Huang M.X. Kinematic and thermal characteristics of Lüders and Portevin – Le Chatelier bands in a medium Mn transformation-induced plasticity steel. *Acta Materialia*. 2017. Vol. 124. P. 17–29. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.10.069.
13. Kubin L.P., Estrin Y. Evolution of dislocation densities and the critical conditions for the Portevin – le Chatelier effect. *Acta Metallurgica et Materialia*. 1990. Vol. 38. No 5. P. 697–708. DOI: 10.1016/0956-7151(90)90021-8.
14. Johnston W.G., Gilman J.J. Dislocation velocities, dislocation densities and plastic flow in lithium fluoride crystals. *J. Appl. Phys.* 1959, Vol. 30. Iss. 2. P. 129–143. DOI: 10.1063/1.1735121.
15. Vladimirov V.I. *Fizicheskaya teoriya plastichnosti i prochnosti [Physical Theory of Plasticity and Strength]*. Leningrad. LPI Publ. 1975. 151 p. (In Russian).
16. Zbib H.M., Aifantis E.C. On the localization and postlocalization behavior of plastic deformation-I. On the initiation of shear bands. *Res Mechanica*. 1988. Vol. 23. No 2-3. P. 261–277.
17. Sarafanov G.F. Screening of the elastic field in a dislocation ensemble. *Phys. Solid State*. 1997. Vol. 39. No 9. P. 1403–1406. DOI: 10.1134/1.1130087.
18. Sarafanov G.F. Mechanisms of spatial ordering of dislocations during plastic deformation of crystals. *Crystallography Reports*. 2004. Vol. 49. No 5. P. 816–819. DOI: 10.1134/1.1803312.
19. Sarafanov G.F. Plastic-strain-softening waves in crystals. *Phys. Solid State*. 2001. Vol. 43. Iss. 2. P. 263–269. DOI: 10.1134/1.1349472.
20. Malygin G.A. Dislocation self-organization processes and crystal plasticity. *Physics-Uspokhi* 1999. Vol. 42. No 9. P. 887–916. <https://doi.org/10.1070/PU1999v042n09ABEH000563>
21. Gokhberg I.Ts., Kreyn M.G. *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators]*. Moscow. Nauka Publ. 1965. 448 p. (In Russian).
22. Kamenskii V.G., Manakov S.V. Formation of domains of stability from unstable state in nonlinear systems with dissipation. *JETP Lett*. 1987. Vol. 45. P. 499–502.

MODEL OF FORMATION AND PROPAGATION OF SLIP BANDS IN METALS*

Sarafanov G.F.,¹ Utkin A.A.²

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Kozma Minin Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Russian Federation*

gf.sarafanov@yandex.ru

Received by the Editor 2022/08/29

A theoretical study of the processes of localization of plastic deformation in metals has been carried out. Within the framework of the system of evolutionary equations for dislocation density, taking into account the multiplication and annihilation of dislocations, the possibility of a running solution for the slip strip is established. It is shown that the initial system has two equilibrium states. For the total dislocation density and dislocation charge normalized to a stationary homogeneous solution for dislocation density, these are the states (0,0) and (1,0) on the phase plane of the above variables in dimensionless form. From the analysis of singular points, it follows that the point (0,0) is a stable node, and the equilibrium state (1,0) is a saddle. In this case, the desired solution of the initial system of evolutionary equations is a separatrix going from point (0,0) to point (1,0), which corresponds to solutions in the form of a drop wave for the dislocation density forming the slip band and a momentum for the dislocation charge. It is shown that the dislocation charge propagates in the front of the slip band, which moves at a velocity $u = kV$ (V is the drift velocity of dislocations

*The work was carried out within the Russian state assignment for fundamental scientific research (the topic No 22-22-00749).

due to external load, the proportionality coefficient k satisfies the condition $0 < k < 1$). After analyzing the existence of self-similar solutions, it follows that non-homogeneous wave solutions occur only at $A = t_1/t_2 > 1$, where t_1 and t_2 are, respectively, relaxation times of the total dislocation density and dislocation charge to a homogeneous state. Estimates show that for a given dislocation kinetics (dislocation generation and annihilation processes) $A > 1$, i.e. satisfy the conditions for the formation of a slip strip of a given type. The stability of the obtained wave stationary self-similar solutions is considered. Assuming that deviations from stationary solutions for the dislocation density and dislocation charge are limited to a given domain, and considering the deviations small, we obtain the Sturm – Liouville problem for own functions and eigenvalues with zero boundary conditions at the boundary of this domain. The appropriate transformation reduces the problem to an equation of the Schrodinger equation type. It is shown that under certain conditions the spectrum of the Schrodinger operator is in the left half-plane, i.e. deviations of dislocation density and dislocation charge decay exponentially over time and the desired stationary solutions are asymptotically stable. The issue related to the determination of the steady-state velocity of wave propagation is considered. Linearization of the initial system of equations for dislocation density and dislocation charge allowed us to obtain a linear sine-Gordon equation, from the solution of which the steady-state wave velocity is determined. It is shown that for the initial system of the system of equations for $A > 1$, arbitrary initial distributions of the desired variables acquire the form of self-similar solutions over time and move at the lowest possible speed $u = 2VA^{1/2}/(1 + A)$.

Keywords: localization of deformation, Luders bands, slip bands, dislocation density, dislocation charge, differential and momentum waves.