

УДК 519.6

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ СХЕМ МКЭ**Д.Т. Чекмарев, К.М. Гладильщикова***Нижний Новгород*

Предлагается новый подход к построению двумерных схем МКЭ на основе трехмерной “ажурной” схемы линейного конечного элемента.

Существующие в настоящее время многочисленные схемы МКЭ обладают как достоинствами, так и недостатками [1]. Соответственно, если отбросить заведомо неудачные схемы, область эффективной применимости каждой схемы ограничена. Поэтому проблема построения новых численных схем с улучшенными свойствами продолжает оставаться актуальной. В данной работе предлагается новый подход к построению двумерных схем на основе трехмерной “ажурной” схемы МКЭ [2]. Построение схемы рассматривается на примере линейной динамической задачи теории упругости, хотя может применяться и к другим задачам математической физики.

1. Трехмерная “ажурная” схема на тетраэдральных элементах

Известные схемы МКЭ предполагают, что конечные элементы занимают расчетную область без промежутков и без наложения друг на друга. Однако возможен и отказ от требования сплошного заполнения области элементами. В этом случае элементы, участвующие в формировании системы алгебраических уравнений, заполняют расчетную область с промежутками. Пример удачной схемы такого рода при решении задач теории оболочек приводится в [3]. Данная схема показала преимущества по сравнению со стандартной схемой на линейных треугольных элементах.

Другой пример “ажурной” схемы предложен в [2]. Это схема решения трехмерных задач на базе линейного конечного элемента в виде тетраэдра. Известно

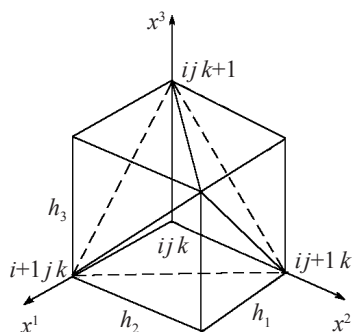


Рис. 1

несколько способов построения регулярных сеток на тетраэдральных ячейках. При одном из них ячейка основной сетки (параллелепипед) разбивается на 5 тетраэдров: 1 в центре и 4 по краям. Если удалить все тетраэдры, кроме центрального, то мы получим искомую схему МКЭ (рис. 1). Разбиение области на элементы при этом производится следующим образом: область делится на шестигранники и далее в каждом из них остается по одному тетраэдру. Существенно, что в этом случае в расчетах используются не все узлы разностной сетки (см. рис. 2, где точками выделены узлы, участвующие в расчетах).

Данная схема полностью симметрична, так как тетраэдр расположен симметрично относительно центра куба, и имеет на ортогональной по координатной сетке второй порядок аппроксимации. При решении динамических задач по явной схеме (или при итерационном решении системы в неявной схеме) вычислительные затраты на один временной слой (одну итерацию) для данной схемы в 2-5 раз ниже, чем для традиционной схемы на тетраэдрах или для билинейного шестигранного элемента. В случае использования явной схемы “крест” устойчивость данной схемы выше, чем у схемы билинейного конечного элемента. Отметим также, что полный шаблон (окрестность узла) данной схемы имеет вид многогранника, который существенно ближе к шару, чем куб. Следовательно, сеточная анизотропия у нее должна быть ниже, чем, например, у схемы шестигранного билинейного конечного элемента.

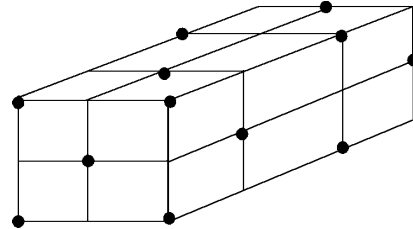


Рис. 2

Рассмотрим конкретную реализацию данной схемы при решении линейной динамической задачи теории упругости. Будем считать сетку равномерной прямоугольной с координатами узлов $x_{ijk}^1 = x_0^1 + h_1 i$, $x_{ijk}^2 = x_0^2 + h_2 j$, $x_{ijk}^3 = x_0^3 + h_3 k$ (см. рис. 1).

Примем следующее расположение элементов. В каждой ячейке выберем узел с минимальной суммой индексов $i+j+k=s$. При нечетных s внутри ячейки расположим элементы в виде тетраэдра с вершинами в узлах $(i+1, j, k)$, $(i, j+1, k)$, $(i, j, k+1)$, $(i+1, j+1, k+1)$. При четных s ячейку оставим пустой. Таким образом, конечно-элементная сетка получается “ажурной”: в расчетах участвуют каждый второй узел исходной разностной сетки (с четной суммой индексов $i+j+k$) и каждая вторая ячейка (параллелепипед). Отметим, что, поскольку в ячейках, содержащих элемент в виде центрального тетраэдра, он занимает только $1/3$ объема ячейки, объем, заполненный элементами, составляет $1/6$ общего объема расчетной области. Оставшийся объем распределим поровну между соседними элементами и узлами. Так же поступим с содержащимися в данном объеме массой и массовыми силами.

Динамическую задачу теории упругости сформулируем как вариационную, основываясь на принципе Даламбера–Лагранжа. Для дискретизации применим описанную выше схему линейного четырехузлового КЭ в форме метода перемещений в сочетании с явной схемой “крест”. После преобразований, описанных в [4, 5], придем к системе конечно-разностных уравнений:

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} D_{11}u_1 + D_{12}u_2 + D_{13}u_3 \\ D_{21}u_1 + D_{22}u_2 + D_{23}u_3 \\ D_{31}u_1 + D_{32}u_2 + D_{33}u_3 \end{vmatrix} + \mu D_{\Delta} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix} + \rho \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \rho D_{tt} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

аналогичной по форме системе уравнений Ламе:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } u + \mu \Delta u + \rho F = \partial^2 u / \partial t^2. \quad (2)$$

В (1), (2) λ , μ – параметры Ламе, ρ – плотность среды, F – внешняя массовая сила, u – поле перемещений, D_{mn} , D_{Δ} , D_{tt} – сеточные операторы. Оператор D_{tt} ап-

проксимирующий производную $\partial^2 / \partial t^2$, имеет вид: $D_{ii}f = [f(t + \tau) - 2f(t) + f(t - \tau)]$. Для построения операторов D_{mn} используем базисные операторы $d_m^+ \approx \partial / \partial x^m$ ($m = 1, 2, 3$), аппроксимирующие первые частные производные в элементе ijk :

$$\begin{aligned}(d_1^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1}(f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i+1,j,k} - f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k+1}), \\(d_2^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2}(f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k} - f_{i,j,k+1}), \\(d_3^+ f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(f_{i+1,j+1,k+1} + f_{i,j,k+1} - f_{i,j+1,k} - f_{i+1,j,k}).\end{aligned}\quad (3)$$

Введем двойственные операторы d_m^- как сопряженные к операторам (3), взятым со знаком “-”:

$$\begin{aligned}(d_1^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_1}(-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i-1,j,k} + f_{i,j-1,k} + f_{i,j,k-1}), \\(d_2^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_2}(-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k} + f_{i,j,k-1}), \\(d_3^- f)_{ijk} &= \frac{1}{2h_3}(-f_{i-1,j-1,k-1} - f_{i,j,k-1} + f_{i,j-1,k} + f_{i-1,j,k}).\end{aligned}\quad (4)$$

Операторы D_{mn} определим как суперпозицию операторов (3) и (4): $D_{mn} = d_m^+ d_n^-$ ($m, n = 1, 2, 3$). Сеточный оператор Лапласа D_Δ определим следующим образом: $D_\Delta = D_{11} + D_{22} + D_{33}$.

В граничных узлах реализуются либо условия в перемещениях, либо естественные граничные условия в напряжениях по стандартной процедуре МКЭ.

Схема (1) будет устойчива при выполнении условия Куранта:

$$\tau \leq \min(h_1, h_2, h_3) / c, \quad (5)$$

где $c = \sqrt{(\lambda + 2\mu) / \rho}$ – скорость звука. В [6] показано, что при наличии у расчетной области свободных ребер или трехгранных углов условие (5) не всегда обеспечивает реальную устойчивость схемы и может быть заменено на более жесткое ограничение шага интегрирования по времени.

Построенная схема имеет второй порядок точности на равномерных сетках. При использовании неравномерных сеток схема МКЭ строится путем отображения области на равномерную сетку, описанную выше.

2. Построение двумерной схемы

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости (плоская деформация). Соотношения двумерной задачи получим путем проектирования соответствующих трехмерных соотношений на плоскость $x_1 O x_2$. Полагая, что трехмерная расчетная область имеет вид $\Omega \times (-\infty, +\infty)$, где Ω – область в R^2 , наложим на решение ограничения, принимая $u_3 = 0$, а компоненты u_1 и u_2 вектора перемещения считая функциями, зависящими только от x^1 и x^2 . При этих допущениях система уравнений (2) примет вид:

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^1 \partial x^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial (x^2)^2} \right) + \rho F_1 &= \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \\
(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^1 \partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial (x^2)^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial (x^1)^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial (x^2)^2} \right) + \rho F_2 &= \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Соответственно разностная схема (1) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
(\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_1 + D_{33}u_1) + \rho F_1 &= \rho D_t u_1, \\
(\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu(D_{11}u_2 + D_{22}u_2 + D_{33}u_2) + \rho F_2 &= \rho D_t u_2.
\end{aligned} \tag{7}$$

Операторы D_{mn} ($m, n = \overline{1, 3}$) в (7) получаются проектированием на двумерную сетку рассмотренных выше трехмерных операторов. В общем виде они могут быть представлены как $D_{mn} = d_m^+ d_n^-$, где d_m^+ , d_n^- – двумерные аналоги соотношений (3), (4):

$$\begin{aligned}
(d_1^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_1} (f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j} - f_{i,j+1} - f_{i,j}), \\
(d_2^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_2} (f_{i+1,j+1} + f_{i,j+1} - f_{i+1,j} - f_{i,j}), \\
(d_3^+ f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (f_{i+1,j+1} + f_{i,j} - f_{i,j+1} - f_{i+1,j}), \\
(d_1^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_1} (-f_{i-1,j-1} - f_{i-1,j} + f_{i,j-1} + f_{i,j}), \\
(d_2^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_2} (-f_{i-1,j-1} - f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + f_{i,j}), \\
(d_3^- f)_{ij} &= \frac{1}{2h_3} (-f_{i-1,j-1} - f_{i,j} + f_{i,j-1} + f_{i-1,j}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Развернутые представления для D_{mn} таковы:

$$\begin{aligned}
(D_{11}f)_{ij} &= \frac{1}{4h_1^2} (f_{i+1,j+1} + 2f_{i+1,j} + f_{i+1,j-1} - 2f_{i,j-1} - 4f_{i,j} - \\
&\quad - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j-1} + 2f_{i-1,j} + f_{i-1,j+1}), \\
(D_{22}f)_{ij} &= \frac{1}{4h_2^2} (f_{i+1,j+1} + 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1} - 2f_{i-1,j} - 4f_{i,j} - \\
&\quad - 2f_{i+1,j} + f_{i-1,j-1} + 2f_{i,j-1} + f_{i+1,j-1}), \\
(D_{33}f)_{ij} &= \frac{1}{4h_3^2} (-f_{i+1,j+1} + 2f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i+1,j} - 4f_{i,j} + \\
&\quad + 2f_{i-1,j} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}), \\
(D_{21}f)_{ij} &= (D_{12}f)_{ij} = \frac{1}{4h_1 h_2} (f_{i+1,j+1} - f_{i-1,j+1} - f_{i+1,j-1} + f_{i-1,j-1}).
\end{aligned} \tag{9}$$

Для сравнения приведем для рассматриваемой задачи вариационно-разностную схему (см. [5]):

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + \rho F_1 &= \rho D_{tt}u_1, \\(\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + \rho F_2 &= \rho D_{tt}u_2\end{aligned}\quad (10)$$

и схему билинейного КЭ:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + (\lambda + 2\mu)D_{33}^{(1)}u_1 + \\+ \mu D_{33}^{(2)}u_1 + \rho F_1 &= \rho D_{tt}u_1, \\(\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + (\lambda + 2\mu)D_{33}^{(2)}u_2 + \\+ \mu D_{33}^{(1)}u_2 + \rho F_2 &= \rho D_{tt}u_2.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned}(D_{33}^{(1)}f)_{ij} &= \frac{1}{12h_1^2}(-f_{i+1,j+1} + 2f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i+1,j} - 4f_{i,j} + \\&+ 2f_{i-1,j} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}), \\(D_{33}^{(2)}f)_{ij} &= \frac{1}{12h_2^2}(-f_{i+1,j+1} + 2f_{i,j+1} - f_{i-1,j+1} + 2f_{i+1,j} - 4f_{i,j} + \\&+ 2f_{i-1,j} - f_{i+1,j-1} + 2f_{i,j-1} - f_{i-1,j-1}).\end{aligned}$$

Заметим, что эти операторы отличаются от оператора D_{33} из (9) только множителями.

Из всех рассмотренных схем вариационно-разностная схема (10) является наиболее простой по форме и структурно (с точностью до замены разностных операторов на дифференциальные) совпадает с системой уравнений Ламе плоской задачи теории упругости (6). Схемы (7) и (11) отличаются от (10) наличием дополнительных малых членов, содержащих операторы D_{33} , $D_{33}^{(1)}$ и $D_{33}^{(2)}$. При этом схема (7) содержит регулируемый параметр h_3 , который можно подобрать на основе численных экспериментов. Из соображений устойчивости (см.(5)) он должен удовлетворять неравенству

$$h_3 \geq \min(h_1, h_2). \quad (12)$$

При $h_3 = \infty$ схема (7) тождественна вариационно-разностной схеме (10), отличительным свойством которой является то, что она не учитывает моментные составляющие в элементе.

Схема билинейного КЭ (11) может совпасть со схемой (7) в случае квадратной сетки ($h_1 = h_2$) при соответствующем выборе параметра h_3 . Приравнявая коэффициенты $\mu/(4h_3^2)$, $(\lambda + 3\mu)/(12h_1^2)$ при подобных членах операторов D_{33} , $D_{33}^{(1)}$ и $D_{33}^{(2)}$ из (7) и (11), найдем

$$h_3^2 = \frac{3\mu}{\lambda + 3\mu} h_1^2.$$

Выражая параметры Ламе через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν : $\lambda = E/((1 + \nu)(1 - \nu))$, $\mu = E/(2(1 + \nu))$, приходим к окончательному выражению для значения параметра h_3 , соответствующего схеме билинейного КЭ

$$h_3^* = \sqrt{\frac{3}{2/(1-2\nu)+3}} h_1. \quad (13)$$

На основании (13) заключаем, что $h_3^* < h_1$. Отсюда, с учетом (5), следует, что на квадратной сетке невозможно вести расчеты по схеме билинейного КЭ с числом Куранта, равным 1. Например, при значении $\nu = 0,3$, характерном для металлов, получаем $h_3^* \approx 0,6h_1$ и число Куранта, равное 0,6.

Иногда в схеме билинейного КЭ моментные составляющие учитываются не для всех, а только для нормальных компонент тензора напряжений. В этом случае схема (11) принимает вид:

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)(D_{11}u_1 + D_{12}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + (\lambda + 2\mu)D_{33}^{(1)}u_1 + \rho F_1 &= \rho D_{tt}u_1, \\ (\lambda + \mu)(D_{21}u_1 + D_{22}u_2) + \mu(D_{11}u_1 + D_{22}u_2) + (\lambda + 2\mu)D_{33}^{(2)}u_2 + \rho F_2 &= \rho D_{tt}u_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Аналог выражения (13) для нее имеет вид:

$$h_3^* = \sqrt{\frac{3}{2/(1-2\nu)+2}} h_1, \quad (15)$$

откуда при $\nu = 0,3$ получаем число Куранта, равное 0,65.

Резюмируя вышесказанное, приходим к выводу, что схема (7) как частные случаи включает вариационно-разностную схему (10) и схему (11) или (14) билинейного КЭ (на квадратной сетке). При этом последние обладают недостатками: схема (10) – эффектом неустойчивости типа “песочные часы”, а схемы (11), (14) – худшей устойчивостью. При выборе в (7) параметра $h_3 > \min(h_1, h_2)$ получаем схему, свободную от обоих указанных недостатков. Высокое качество решений по схеме (7) при $h_3/\min(h_1, h_2) = 2$ и 3 подтверждается решением ряда тестовых задач.

Заключение

Предложенный метод построения двумерных численных схем на основе трехмерной “ажурной” схемы позволяет строить эффективные численные схемы решения задач математической физики. Предложенный подход до известной степени напоминает метод построения моментных схем МКЭ, описываемый в [7]. Как и в [7], здесь получено параметрическое семейство численных схем, при этом выбор параметра h_3 позволяет регулировать свойства схемы. Отметим также, что данный подход позволяет без изменений сохранить все положительные качества исходной трехмерной схемы.

Работа выполнена при частичном финансировании Министерства образования и науки РФ (грант Президента РФ на поддержку ведущих научных школ НШ-6391.2006.8).

Литература

1. Голованов, А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А.И. Голованов, О.Н. Тюленева, А.Ф. Шигабутдинов. – М.: Физматлит, 2006. – 392 с.

2. *Чекмарев, Д.Т.* “Ажурные” схемы метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1997. – Вып. 55. – С. 157–159.

3. *Баженов, В.Г.* Об индексной коммутативности численного дифференцирования / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев // ЖВМиМФ. – 1989. – Т. 29, № 5. – С. 662–674.

4. *Чекмарев, Д.Т.* Построение конечноразностных схем, эквивалентных численным схемам метода конечного элемента / Д.Т. Чекмарев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб./ Нижегород. ун-т. – 1999. – Вып. 60. – С. 129–138.

5. *Баженов, В.Г.* Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом : Учеб. пособие / В.Г. Баженов, Д.Т. Чекмарев – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2000. – 118 с.

6. *Чекмарев, Д.Т.* Граничная неустойчивость численных решений трехмерных динамических задач теории упругости // Вестник ННГУ. Сер. Механика. – 2004. – Вып. 1(6). – С. 91–96.

7. *Баженов, В.Г.* Применение моментной схемы МКЭ для анализа нелинейных трехмерных задач динамики массивных и оболочечных элементов конструкций / В.Г. Баженов, А.И. Кибец, О.В. Тулинцев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Методы решения: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. – 1991. – Вып. 47. – С. 46–53.

[11.09.2006]

ON A CLASS OF 2-D FEM PROCEDURES

D.T. Chekmarev, K.M. Gladil'shikova

A new approach is introduced for constructing 2-D FEM procedures based on the 3-D rare linear FE procedure.