УДК 539.4 DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-545-558

ТЕНЗОР СИЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ СХОУТЕНА И АФФИНОРНЫЕ ПЛОТНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ВЕСА*

Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация

evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 14.08.2022

Обсуждаются концепция псевдотензора силовых напряжений и вывод уравнений равновесия в терминах псевдотензора напряжений Схоутена, который по существу является аффинорной плотностью веса $+1$. Определение псевдотензора силовых напряжений Схоутена основывается на понятии псевдоинвариантного элемента площади. Приводятся необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Вводится понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра. Даются конвенциональное и неконвенциональное определения тензора силовых напряжений. Вводится понятие единичного вектора нормали к поверхности, являющейся поверхностью уровня псевдоскалярного поля. Отмечается важность использования теории ориентируемых многообразий при моделировании микрополярных сред в механике континуума. Вводится понятие M-ячейки и алгоритм ее ориентирования. Обсуждаются алгоритмы вычисления тензорных элементов площади M-многообразия, погруженного в N-мерное пространство. Конкретизируются понятия векторного, псевдовекторного, инвариантного и псевдоинвариантного элементов площади поверхности в трехмерном пространстве. С использованием формулы преобразования псевдотензорного поля в абсолютное тензорное поле с помощью фундаментального ориентирующего псевдоскаляра обсуждается возможность применения псевдотензорных элементов объема любого заданного целого веса. Рассматриваются различные реализации операции ковариантного дифференцирования псевдотензоров произвольного целого веса. Приводятся ковариантные производные для псевдоскаляра и контравариантного псевдотензора второго ранга произвольного целого веса. Формулируется принцип виртуальных перемещений в терминах псевдоинвариантных элементов объема и площади. Принимается гипотеза об абсолютной инвариантности виртуальной работы, то есть нечувствительности к поворотам, преобразованиям инверсии трехмерного пространства и зеркальным отражениям. Выводятся уравнения равновесия и динамики в терминах аффинорной плотности силовых напряжений Схоутена. Получены уравнения равновесия для случая использования псевдоинвариантных элементов объема и площади произвольного целого веса.

Ключевые слова: псевдотензор, фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр, аффинорная плотность, тензор напряжений Схоутена, псевдоинвариантный элемент объема, ковариантная производная.

*Выполнено в рамках государственного задания (№ госрегистрации АААА-А20-120011690132-4) и при поддержке РФФИ (грант №20-01-00666).

Вводные замечания

В механике континуума вектор механического напряжения (traction vector) определяется отношением равнодействующей контактных усилий, передаваемых через элементарную площадку от одной части тела к другой, к площади указанной площадки. Поскольку площадь элементарной двумерной площадки может трактоваться как абсолютный антисимметричный тензор второго ранга, с которым ассоциированы псевдовекторы весов -1 и $+1$, то плотность поверхностных сил и тензор напряжений могут иметь псевдотензорную природу. Определение и измерение элементарных объемов и площадей элементарных ячеек[1] играет исключительно важную роль не только в формулировке интегральных теорем и законов сохранения в современной механике континуума, но и при определении внутренних напряжений континуума. При оперировании с одним из псевдоинвариантных элементов площади тензор силовых напряжений оказывается аффинорной плотностью веса $+1$. Поиск в литературе показывает, что идея использования псевдоинвариантных элементов объема и площади при определении тензора силовых напряжений, по-видимому, принадлежит Я.А. Схоутену (см. [2, с. 201–204]). Развитие указанных подходов требует привлечения аппарата псевдотензорного исчисления и теории ориентируемых многообразий [2–8].

Наиболее распространенной математической моделью континуума является дифференцируемое многообразие. В механике сплошных деформируемых сред обычно требуется, чтобы континуум был погружен во внешнее «плоское» пространство. Особенно это актуально для механики растущих тел [9, 10], когда растущее тело, вообще говоря, не допускает погружения в трехмерное пространство наблюдателя, а поверхность наращивания может оказаться поверхностью уровня псевдоскалярного поля. На дифференцируемом многообразии часто приходится вводить дополнительные структуры. Например, риманова структура на многообразии позволяет говорить о целом классе дифференцируемых пространств, которые имеют важное прикладное значение. Подобные проблемы возникают при моделировании процессов деформирования материалов с микроструктурой, микрополярных сред, в процессах аддитивного производства [9, 10].

В ходе изложения вопросов, связанных с многомерной геометрией, будем следовать терминологии и понятиям, изложенным в [5, 7]. Предварительные сведения о тензорных элементах объема и площади можно найти в [3, см. приложение Дж.Л. Эриксена] и [5]. Вопросы применения алгебры псевдотензоров к задачам механики растущих тел и микрополярной теории упругости обсуждались в [10–21].

1. Предварительные сведения из алгебры и анализа псевдотензоров

В настоящей статье подробно не воспроизводятся определения, алгебраические и дифференциальные свойства псевдотензоров и псевдотензорных полей. Подробное изложение алгебры псевдотензоров[2] можно найти в руководствах [4, 7], а дифференциальных свойств – в книгах по тензорному анализу [2, 5, 6] и в статьях [10–16]. В дальнейшем изложении используются обозначения, принятые в [10, 11]. Над

[1] Процедура измерения и формирования тензорного объема ячейки приведена в [1].

[2] Псевдотензоры в литературе еще называются относительными тензорами, а псевдотензоры веса $+1$ называются плотностями или (в случае псевдотензора второго ранга) аффинорными плотностями.

корневым символом относительного тензора в квадратных скобках отмечается его вес, а нулевой вес, присущий абсолютным тензорам, в обозначениях не отражается.

В механике континуума ориентацию *базисного* репера $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$ удобно задавать фундаментальным ориентирующим псевдоскаляром e, являющимся скалярной плотностью [10, 11]. В трехмерном пространстве e определяется смешанным произведением базисных векторов

$$e = \overset{[+1]}{e} = \lceil \underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}} \rfloor = (\underset{1}{\boldsymbol{\imath}} \times \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}) \cdot \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}. \tag{1}$$

Обратим внимание, что псевдоскаляр (1) с точностью до знака совпадает с объемом параллелепипеда, построенного на векторах $\underset{1}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{2}{\boldsymbol{\imath}}, \underset{3}{\boldsymbol{\imath}}$.Нетрудно показать, что квадрат фундаментального ориентирующего псевдоскаляра равен детерминанту метрического тензора g:

$$e^2 = g. \tag{2}$$

Ясно, что $e > \overset{[+1]}{0}$ для правоориентированной координатной системы, $e < \overset{[+1]}{0}$ для левоориентированной координатной системы.

Фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр и его степени ковариантно постоянны [14]:

$$\nabla_s e^m = \overset{[m]}{0}. \tag{3}$$

Отметим, что фундаментальный ориентирующий псевдоскаляр позволяет легко преобразовывать псевдотензоры произвольного веса W в абсолютные тензоры согласно правилу

$$\underset{(n)}{T}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} = e^{-W} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r}. \tag{4}$$

В дальнейшем изложении у фундаментальных символов, таких как ϵ и e, указание на их вес будем опускать.

Ковариантная производная псевдотензора $\underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r}$ вычисляется согласно [2, 4, 5, 11]:

$$\begin{gathered}\nabla_p \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} = \partial_p \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} + \Gamma^{h_1}_{qp} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{q h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} + \ldots + \Gamma^{h_s}_{qp} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots q}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} - \\ - \Gamma^{q}_{k_1 p} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot q k_2 \ldots k_r} - \ldots - \Gamma^{q}_{k_r p} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots q} - W \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} \Gamma^{q}_{qp}.\end{gathered} \tag{5}$$

В частности, для псевдоскаляра ковариантная производная примет вид

$$\nabla_p \overset{[W]}{T} = \partial_p \overset{[W]}{T} - W \overset{[W]}{T} \Gamma^s_{sp}, \tag{6}$$

где

$$\Gamma^s_{sp} = \frac{\partial_p e}{e}.$$

Учитывая свойства символов Кристоффеля Γ^s_{sp} и соотношение (2), получим выражение для ковариантной производной (6):

$$\nabla_p \overset{[W]}{T} = \partial_p \overset{[W]}{T} - e^{-1} W \overset{[W]}{T} \partial_p e. \tag{7}$$

Ковариантная производная псевдотензора контравариантного ранга 2 веса W вычисляется согласно

$$\nabla_p \overset{[W]}{T}{}^{hk} = \partial_p \overset{[W]}{T}{}^{hk} + \overset{[W]}{T}{}^{sk}\Gamma^h_{sp} + \overset{[W]}{T}{}^{hs}\Gamma^k_{sp} - W\overset{[W]}{T}{}^{hk}\Gamma^s_{sp}. \tag{8}$$

Однако существуют альтернативные подходы реализации ковариантного дифференцирования псевдотензора. Введем ковариантную производную псевдотензора произвольной валентности и целого веса W с помощью соотношения:

$$\nabla_p \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} = e^W \nabla_p \left(e^{-W} \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\cdot\cdot\ldots\cdot k_1 k_2 \ldots k_r} \right). \tag{9}$$

В сокращенной записи имеем[3]:

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\overset{[W]}{\mathbf{T}}} = e^W \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} \otimes \partial_p \left(e^{-W} \underset{(n)}{\overset{[W]}{\mathbf{T}}} \right). \tag{10}$$

Легко проверить, что

$$\nabla \otimes \underset{(n)}{\overset{[W]}{\mathbf{T}}} = \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} \otimes (\partial_p - \lambda_p) \underset{(n)}{\overset{[W]}{\mathbf{T}}}, \tag{11}$$

где

$$\lambda_p = W \frac{\partial_p e}{e}.$$

Кроме того, реализовать ковариантное дифференцирование псевдотензора с целым весом можно с помощью символов перестановок согласно правилу

$$\nabla_p \underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\ldots k_1 k_2 \ldots k_r} (N!)^{-W} \underbrace{\overset{[+1]}{\boldsymbol{\epsilon}}{}^{k_{r+1} \ldots k_{r+N}} \ldots \overset{[+1]}{\boldsymbol{\epsilon}}{}^{k_{r+(W-1)N+1} \ldots k_{r+NW}}}_{W} \times$$

$$\times \nabla_p \left(\underset{(n)}{\overset{[W]}{T}}{}^{h_1 h_2 \ldots h_s}_{\ldots k_1 k_2 \ldots k_r} \underbrace{\overset{[-1]}{\boldsymbol{\epsilon}}{}_{k_{r+1} \ldots k_{r+N}} \ldots \overset{[-1]}{\boldsymbol{\epsilon}}{}_{k_{r+(W-1)N+1} \ldots k_{r+NW}}}_{W} \right). \tag{12}$$

Все три вида реализации ковариантной производной (5), (9) и (12) являются эквивалентными, что было продемонстрировано в статье [15].

2. Тензорные элементы площади M-многообразия, погруженного в N-мерное «плоское» пространство

В N-мерном «плоском» пространстве выберем криволинейную систему координат x^k ($k = 1, 2, \ldots, N$). Будем называть M-многообразием многообразие (поверхность) математической размерности M ($M \leq N$), погруженное в указанное внешнее пространство. Рассмотрим два репера с различными угловыми точками x^k и $\overline{x}^k$ и концевыми точками $x^k + \underset{c}{d} x^k$ и $\overline{x}^k + \overline{\underset{c}{d} x^k}$. Тогда внешние координаты векторов первого и второго реперов будут $\underset{c}{d} x^k$ и $\overline{\underset{c}{d} x^k}$ соответственно. Ориентируемые многообразия имеют важное значение в микрополярных теориях механики континуума. Ясно, что ориентация репера в точке микрополярного тела задается нумерацией

[3] Оператор Гамильтона определяется как $\nabla = \overset{k}{\boldsymbol{\imath}} \partial_k$.

реперных направлений. При перестановке двух номеров реперных направлений ориентация всего репера изменяется на противоположную, то есть правоориентированный репер становится левоориентированным.

Пусть рассматриваемое дифференцируемое M-многообразие можно задать его гауссовой (intrinsic) параметризацией u^α ($\alpha = 1, 2, \ldots, M$):

$$x^k = x^k\left(u^1, u^2, \ldots, u^M\right). \tag{13}$$

В формуле (13) x^k являются внешними координатами для M-многообразия, а u^α – внутренними.

Разобьем M-многообразие на систему M-ячеек (M-cell). Каждая M-ячейка задается угловым репером, который характеризуется угловой вершиной (с внешними координатами x^k и внутренними координатами u^α) и концевыми точками репера, имеющими внутренние координаты

$$u^\alpha + \underset{\mathcal{c}}{d}u^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, M, \tag{14}$$

и внешние координаты

$$x^k + \underset{\mathcal{c}}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{15}$$

где индекс $\mathcal{c}$ нумерует реперные направления ($\mathcal{c} = 1, 2, \ldots, M$). С внешней (пространственной) точки зрения направления рассматриваемого репера задаются абсолютными контравариантными векторами

$$\underset{1}{d}x^k, \underset{2}{d}x^k, \ldots, \underset{M}{d}x^k, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{16}$$

Тензорный элемент объема M-ячейки определим согласно формуле

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = M!\,\underset{1}{d}x^{[i_1}\,\underset{2}{d}x^{i_2} \ldots \underset{M}{d}x^{i_M]}. \tag{17}$$

Здесь в квадратные скобки заключены индексы, по которым выполняется антисимметризация.

Учитывая формулу для дифференциалов внешних координат вдоль реперных направлений M-ячейки

$$\underset{\mathcal{b}}{d}x^k = (\partial_\alpha x^k)\underset{\mathcal{b}}{d}u^\alpha, \tag{18}$$

соотношение (17) можно записать в виде [5, с. 256, 257]:

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_M} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_M}\,\partial_{\alpha_1} x^{i_1}\,\partial_{\alpha_2} x^{i_2} \ldots \partial_{\alpha_M} x^{i_M}\,\det\left(\underset{\mathcal{b}}{d}u^\gamma\right). \tag{19}$$

Последний множитель в (19) называется внутренним (intrinsic) объемом M-ячейки. Пользуясь представлением о внутреннем объеме M-ячейки, можно построить алгоритм, ориентирующий M-многообразие (детали имеются в книге [5]).

Если элементарные M-ячейки нарезаны с помощью координатных поверхностей $u^\alpha = c^\alpha$, то для случая $M = N$ получим

$$d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \overset{[-1]}{d}\tau^{12\ldots N}\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}, \tag{20}$$

где $\overset{[-1]}{d}\tau^{12\ldots N}$ – псевдоинвариантный элемент объема[4], представляющий собой псевдоскаляр веса –1, который определяется как

[4] Псевдоинвариантный элемент объема в некоторых источниках [5] называется естественным элементом объема.

$$\overset{[-1]}{d}\tau^{12\ldots N} = \det\left(\partial_\alpha x^k\right) du^1 du^2 \ldots du^N = dx^1 dx^2 \ldots dx^N, \tag{21}$$

а обратив соотношение (20), приходим к формуле

$$\overset{[-1]}{d}\tau^{12\ldots N} = \frac{1}{N!}\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_N} d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N}. \tag{22}$$

Воспользовавшись формулой (4), можно вычислить псевдотензорный элемент объема заданного целого веса таким образом:

$$\overset{[W]}{d}\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N} = e^W d\tau^{i_1 i_2 \ldots i_N} = e^W \overset{[-1]}{d}\tau^{12\ldots N}\epsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}, \tag{23}$$

а псевдоинвариантный элемент объема заданного целого веса W – согласно

$$\overset{[W]}{d}\tau^{12\ldots N} = e^{W+1}\det(\partial_\alpha x^k) du^1 du^2 \ldots du^N = e^{W+1} dx^1 dx^2 \ldots dx^N. \tag{24}$$

3. Тензорные элементы объема и площади в трехмерном пространстве

Рассмотрим случай трехмерного пространства. В качестве многообразия выберем поверхность, заданную естественной (гауссовой) параметризацией u^1, u^2 и 2-ячейками, нарезанными координатными линиями $u^1 = c^1$, $u^2 = c^2$. Для этого случая в формулах раздела 3 принимаем $N = 3$, $M = 2$. Тогда тензорный элемент площади поверхности (17) преобразуется к виду

$$d\tau^{ij} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2}\partial_{\alpha_1} x^i \partial_{\alpha_2} x^j du^1 du^2 = 2\partial_1 x^{[i}\partial_2 x^{j]} du^1 du^2, \tag{25}$$

или

$$d\tau^{ij} = (\partial_1 x^i \partial_2 x^j - \partial_2 x^i \partial_1 x^j) du^1 du^2. \tag{26}$$

Соотношение (26) определяет тензорный элемент площади поверхности, играющий важную роль при определении тензоров силовых и моментных напряжений в механике континуума.

Антисимметричному абсолютному тензору $d\tau^{ij}$ сопутствует ковариантный псевдовектор веса -1:

$$\overset{[-1]}{d}A_k = \frac{1}{2}\epsilon_{kij} d\tau^{ij}, \quad d\tau^{ij} = \epsilon^{kij}\overset{[-1]}{d}A_k, \tag{27}$$

определяющий псевдовекторный элемент площади, а абсолютный вектор

$$dS_k = \frac{1}{2} e_{kij} d\tau^{ij} = e_{kij}\partial_1 x^i \partial_2 x^j du^1 du^2, \quad d\tau^{ij} = e^{kij} dS_k, \tag{28}$$

задает векторный элемент площади поверхности.

Векторный и псевдовекторный элементы площади поверхности связаны соотношением

$$dS_k = e\overset{[-1]}{d}A_k. \tag{29}$$

Псевдоинвариантный элемент площади поверхности задается формулой

$$\overset{[-1]}{d}A = \operatorname{sgn} e\sqrt{\overset{[-1]}{d}A^k \overset{[-1]}{d}A_k}. \tag{30}$$

Аналогично можно задать инвариантный элемент площади поверхности

$$dS = \sqrt{dS^k dS_k}. \quad (31)$$

Ясно, что

$$dS = e \overset{[-1]}{d} A, \quad \overset{[-1]}{d} A = e^{-1} dS. \quad (32)$$

Сравнивая формулы (28) и (19), заметим, что определение векторного элемента площади поверхности (28) строится на векторном (косом) произведении касательных векторов $\partial_1 x^i$ и $\partial_2 x^j$ к поверхности.

Тензорный и псевдоинвариантный элементы 3-объема будут связаны соотношениями

$$d\tau^{ijk} = \epsilon^{ijk} \overset{[-1]}{d} \tau^{123}, \quad \overset{[-1]}{d} \tau^{123} = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} d\tau^{ijk}. \quad (33)$$

Псевдоинвариантный элемент площади поверхности заданного целого веса W можно определить с учетом (24) по формуле

$$\overset{[W]}{d} S = e^W dS = e^{W+1} \overset{[-1]}{d} A. \quad (34)$$

Псевдотензорный и псевдоинвариантный элементы 3-объема заданного целого веса W можно вычислить согласно выражениям

$$\overset{[W]}{d} \tau^{ijk} = e^W d\tau^{ijk} = e^W \epsilon^{ijk} \overset{[-1]}{d} \tau^{123}, \quad (35)$$

$$\overset{[W]}{d} \tau^{123} = e^{W+1} \overset{[-1]}{d} \tau^{123} = \frac{1}{6} e^{W+1} \epsilon_{ijk} d\tau^{ijk}. \quad (36)$$

Полученные формулы для вычисления элементарных объемов (35), (36) и площадей поверхностей (34) используются в формулировках интегральных теорем, законов сохранения в механике сплошных сред и определения распределенных в объеме континуума тензорных полей (плотность объемных сил, тензор напряжений и т.д.).

4. Конвенциональное и неконвенциональное определения силовых напряжений

Применим полученные в разделе 3 процедуры измерения элементарных объемов и площадей поверхностей к определению тензора силовых напряжений. Отметим, что тензор силовых напряжений является распределением контактных усилий на элементарной площади ячейки поверхности между двумя частями тела. Поэтому существенное значение имеет вес, приписываемый площади выбранной элементарной ячейки.

Элементарная ячейка на поверхности характеризуется элементом площади, которому, как было показано, может быть приписан произвольный целый вес, и единичным вектором нормали n_k[5]. В случае, если поверхность является поверхностью уровня псевдоскалярного поля

$$\overset{[W]}{a} = \overset{[W]}{f}(x^s), \quad (37)$$

вектор единичной нормали n_k к псевдоповерхности можно определить с учетом (4) с точностью до множителя согласно формуле

[5] Вектор n_k является абсолютным вектором (то есть имеет нулевой вес).

$$Nn_s = \partial_s \left(e^{-W} \overset{[W]}{f} \right). \tag{38}$$

Отметим, что для абсолютного скаляра a справедливо равенство

$$\nabla_s a = \partial_s a. \tag{39}$$

Тогда выражение (38) с учетом (3) и (39) преобразуется к виду

$$Nn_s = \partial_s \left(e^{-W} \overset{[W]}{f} \right) = \nabla_s \left(e^{-W} \overset{[W]}{f} \right) = e^{-W} \nabla_s \overset{[W]}{f}. \tag{40}$$

Вводя в рассмотрение псевдовектор нормали согласно формуле

$$\overset{[W]}{n_s} = e^W n_s, \tag{41}$$

получим

$$N \overset{[W]}{n_s} = \nabla_s \overset{[W]}{f}. \tag{42}$$

Учитывая соотношение (w.g.t.$(g^{sk}) = 0$)

$$g^{ks} \overset{[W]}{n_s} \overset{[W]}{n_k} = e^{2W}, \tag{43}$$

несложно заключить, что

$$N^2 e^{2W} = g^{sk} \nabla_s \overset{[W]}{f} \nabla_k \overset{[W]}{f}, \tag{44}$$

откуда для множителя N следует выражение

$$\pm N = e^{-W} \sqrt{g^{sk} \nabla_s \overset{[W]}{f} \nabla_k \overset{[W]}{f}}. \tag{45}$$

Окончательно псевдовектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}$ вычисляется по формуле

$$\overset{[W]}{n_h} = e^W \frac{\nabla_h \overset{[W]}{f}}{\sqrt{g^{sk} \nabla_s \overset{[W]}{f} \nabla_k \overset{[W]}{f}}}. \tag{46}$$

Абсолютный вектор нормали к поверхности уровня Σ псевдоскалярного поля $\overset{[W]}{f}$ можно вычислить по формуле

$$n_h = \frac{\nabla_h \overset{[W]}{f}}{\sqrt{g^{sk} \nabla_s \overset{[W]}{f} \nabla_k \overset{[W]}{f}}}. \tag{47}$$

Выберем в деформированном состоянии внутри тела элементарную двумерную площадку с инвариантным элементом площади dS и единичным абсолютным вектором нормали n_k. Равнодействующая поверхностных сил dT^k, действующих на элементарную двумерную площадку, сводится к абсолютному вектору поверхностных сил t^k, отнесенному к инвариантному элементу площади dS:

$$t^k = \frac{dT^k}{dS}. \tag{48}$$

Следуя стандартному подходу, для произвольно ориентированной элементарной площадки определим тензор силовых напряжений Коши t^k соотношениями

$$t^k = n_i t^{ik}. \tag{49}$$

Отсюда заключаем, что тензор силовых напряжений t^{ik} имеет нулевой вес и является абсолютным тензором.

Далее, следуя рассуждениям из монографии [2, с. 142], рассмотрим ту же самую элементарную площадку, приписывая ей псевдоинвариантный элемент площади $\overset{[-1]}{d} A$. Тогда для абсолютного вектора равнодействующей будет справедливо равенство

$$dT^k = \overset{[+1]}{t}{}^k \overset{[-1]}{d} A. \tag{50}$$

Определение тензора силовых напряжений для этого случая примет вид

$$\overset{[+1]}{t}{}^k = n_i \overset{[+1]}{t}{}^{ik}. \tag{51}$$

Отсюда следует, что псевдотензор силовых напряжений Схоутена $\overset{[+1]}{t}{}^{ik}$ является аффинорной плотностью веса +1.

Если при определении тензора силовых напряжений воспользоваться псевдоинвариантным элементом площади $\overset{[W]}{dS}$, получим

$$\overset{[-W]}{t}{}^k = n_i \overset{[-W]}{t}{}^{ik}. \tag{52}$$

В этом случае псевдовектор поверхностных сил $\overset{[-W]}{t}{}^k$ и псевдотензор силовых напряжений $\overset{[-W]}{t}{}^{ik}$ имеют вес $-W$.

5. Аффинорные плотности положительного веса в формулировках принципа виртуальных перемещений

Выберем в трехмерном пространстве систему координат x^k. Метрические свойства пространства определяются метрическим тензором g_{ij}. Поступательное перемещение индивидуальной точки описывается вектором перемещений (контравариантным абсолютным вектором) u^k. Геометрические вариации полей перемещений, не противоречащие наложенным связям, называют виртуальными перемещениями δu_k.

Виртуальные перемещения при «жестком» движении удовлетворяют дифференциальным ограничениям

$$\nabla_{(i}\delta u_{k)} = 0. \tag{53}$$

Распределения массовых и поверхностных сил, действующих на тело и распределенных по объему и поверхности в условиях использования псевдоинвариантных элементов объема $\overset{[-1]}{d}\tau^{123}$ и площади $\overset{[-1]}{d} A$, являются псевдовекторами положительного веса $\overset{[+1]}{X}{}^k$ и $\overset{[+1]}{t}{}^k$.

Работа δA, совершаемая усилиями, действующими на тело на виртуальных перемещениях δu_k, является абсолютным скаляром и не чувствительна к поворотам, преобразованиям инверсии трехмерного пространства и зеркальным отражениям.

Виртуальная работа, совершаемая объемными и поверхностными силами на виртуальных перемещениях δu_k, вычисляется согласно

$$\delta A = \int \overset{[+1]}{X}{}^k \delta u_k \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} + \oint_\partial \overset{[+1]}{t}{}^k \delta u_k \overset{[-1]}{dA}. \tag{54}$$

Согласно принципу виртуальных перемещений, малое «жесткое» движение из состояния равновесия может быть произведено без «затраты» работы, то есть виртуальная работа обращается в нуль:

$$\delta A = 0. \tag{55}$$

Избавившись от дифференциальных ограничений (53) с помощью метода множителей Лагранжа, получим

$$\int \left(\overset{[+1]}{X}{}^k + \nabla_i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} \right) \delta u_k \overset{[-1]}{d\tau}{}^{123} + \oint_\partial \left(\overset{[+1]}{t}{}^k - n_i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} \right) \delta u_k \overset{[-1]}{dA} = 0. \tag{56}$$

Отметим, что вектор с ковариантными компонентами ∇_i является абсолютным вектором.

В силу произвольности вариации δu_k из уравнения (56) получаются дифференциальные уравнения равновесия

$$\nabla_i^{\text{total}} \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \overset{[+1]}{X}{}^k = \overset{[+1]}{0}, \tag{57}$$

где ∇_i^{total} – полная ковариантная производная. В случае одноточечного псевдотензора для дивергенции аффинорной плотности напряжений Схоутена будут справедливы равенства [1]

$$\nabla_k \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ki} = \nabla_k^{\text{total}} \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ki} = \nabla_k^{\text{expl}} \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ki}, \tag{58}$$

играющие важную роль в теориях поля [22, 23].

Уравнения равновесия (57) без затруднений обобщаются на динамический случай добавлением сил инерции $\overset{[+1]}{\rho} \partial_{..} u^k$ [2, с. 203]:

$$\overset{[+1]}{\rho} \partial_{..} u^k = \nabla_i^{\text{total}} \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \overset{[+1]}{X}{}^k, \tag{59}$$

где $\partial_{..}$ – вторая производная по времени, $\overset{[+1]}{\rho} = e\rho$ – текущая псевдоплотность массы.

Уравнения баланса импульса (59) с учетом (5) примут вид

$$\overset{[+1]}{\rho} \partial_{..} u^k = \partial_i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \Gamma_{is}^k \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{is} + \Gamma_{is}^i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{sk} - \Gamma_{is}^s \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \overset{[+1]}{X}{}^k. \tag{60}$$

Приводя подобные слагаемые, получаем

$$\overset{[+1]}{\rho} \partial_{..} u^k = \partial_i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \Gamma_{is}^k \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{is} + \Gamma_{is}^i \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{sk} - \Gamma_{is}^s \underset{(2)}{\overset{[+1]}{t}}{}^{ik} + \overset{[+1]}{X}{}^k. \tag{61}$$

Воспользовавшись псевдоинвариантными элементами объема $\overset{[W]}{d\tau}{}^{123}$ и площади $\overset{[W]}{dA}$, принцип виртуальных перемещений (55) запишем в виде:

$$\delta A = \int \overset{[-W]}{X}{}^{k} \delta u_k \overset{[W]}{d\tau}{}^{123} + \oint_{\partial} \overset{[-W]}{t}{}^{k} \partial u_k \overset{[W]}{dA} = 0, \tag{62}$$

откуда следуют уравнения равновесия

$$\partial_i \underset{(2)}{\overset{[-W]}{t}}{}^{ik} + \Gamma^k_{is} \underset{(2)}{\overset{[-W]}{t}}{}^{is} + (1+W)\Gamma^s_{is} \underset{(2)}{\overset{[-W]}{t}}{}^{ik} + \overset{[-W]}{X}{}^{k} = \overset{[-W]}{0}. \tag{63}$$

Из уравнений (63) видно, что наиболее простой вид уравнения приобретают при $W = -1$, что соответствует аффинорной плотности напряжений Схоутена.

Заключение

Рассмотрены подходы к формулировке уравнений равновесия и динамики в терминах псевдотензора напряжений Схоутена, который по существу является аффинорной плотностью веса +1. Рассматриваемый подход основан на использовании псевдоинвариантных элементов объема и площади.

1. Приведены необходимые сведения из алгебры и анализа псевдотензоров. Введено понятие фундаментального ориентирующего псевдоскаляра.

2. Проведено обсуждение алгоритмов вычисления тензорных элементов площади M-многообразия, погруженного в N-мерное пространство. Конкретизированы понятия векторного, псевдовекторного, инвариантного и псевдоинвариантного элементов площади поверхности в трехмерном пространстве.

3. Рассмотрены различные реализации операции ковариантного дифференцирования псевдотензоров. Приведены ковариантные производные для псевдоскаляра и псевдотензора второго ранга.

4. Приведены конвенциональное и неконвенциональное определения силовых напряжений. Дано определение псевдотензора силовых напряжений Схоутена, основанное на понятии псевдоинвариантного элемента площади.

5. Выведены уравнения равновесия и динамики в терминах аффинорной плотности силовых напряжений Схоутена. Получены уравнения равновесия для случая использования псевдоинвариантных элементов объема и площади произвольного целого веса. Отмечено, что наиболее простую форму уравнения равновесия принимают для псевдотензора напряжений Схоутена.

Список литературы

1. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. К теории ориентированных тензорных элементов площади микрополярного континуума, погруженного во внешнее плоское пространство. *Изв. РАН. МТТ*. 2022. № 2. С. 3–13. DOI: 10.31857/S0572329922020155.

2. Schouten J.A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford: Clarendon Press, 1951. 275 p.

3. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. *Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory*. Ed. S. Flügge. Berlin–Göttingen–Heidelberg: Springer, 1960. P. 226–858. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

4. Гуревич Г.Б. *Основы теории алгебраических инвариантов*. М.–Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. 408 с.

5. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York: Dover Publications Inc., 1978. 336 p.

6. Sokolnikoff I.S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York: John Wiley & Sons Inc., 1964. 361 p.

7. McConnell A.J. *Application of Tensor Analysis*. New York: Dover Publications, 1957. 318 p.

8. Розенфельд Б.А. *Многомерные пространства*. М.: Наука, 1966. 648 с.

9. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном дифференциальном ограничении в асим-

метричных теориях механики растущих тел. *Изв. РАН. МТТ*. 2019. №6. С. 38–46. DOI: 10.1134/S0572329919060102.

10. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids. *Journal Samara State Technical University: Ser. Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24. No 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

11. Радаев Ю.Н., Мурашкин Е.В. Псевдотензорная формулировка механики гемитропных микрополярных сред. *Проблемы прочности и пластичности*. 2020. Т. 82. №4. С. 399–412. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-4-399-412.

12. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation. *Journal Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*. 2020. Vol. 24. No 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.

13. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Об одном обобщении алгебраической теории Гамильтона – Кэли. *Изв. РАН. МТТ*. 2021. №6. С. 130–138. DOI: 10.31857/S0572329921060106.

14. Radayev Y.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors. *Journal Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences*. 2022. Vol. 26. No 1. P. 36–47. DOI: 10.14498/vsgtu1891.

15. Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н. Алгебраический алгоритм систематического приведения одноточечных псевдотензоров к абсолютным тензорам. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния*. 2022. №1(51). С. 19–28. DOI: 10.37972/chgpu.2022.51.1.002.

16. Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Об одном псевдотензорном обобщении связывающих двусторонних граничных условий Югонио – Адамара. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния*. 2021. №2(48). С. 104–114. DOI: 10.37972/chgpu.2021.48.2.013.

17. Мурашкин Е.В., Радаев Ю. Н. Псевдовекторные гиперболические дифференциальные операторы микрополярной упругости. *Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия Механика предельного состояния*. 2021. № 4(50). С. 59–72. DOI: 10.37972/chgpu.2021.50.4.005.

18. Rudge J.F. A micropolar continuum model of diffusion creep. *Philosophical Magazine*. 2021. Vol. 101 Iss. 17. P. 1913–1941. DOI: 10.1080/14786435.2021.1946191.

19. Abedi H., Capozziello S., Capriolo M., Abbassi A.M. Gravitational energy-momentum pseudo-tensor in Palatini and metric $f(R)$ gravity. *Annals of Physics*. 2022. Vol. 439. Article No 168796. DOI: 10.1016/j.aop.2022.168796.

20. Crothers S.J. The Einstein and Landau – Lifshitz pseudotensors – A mathematical note on existence. *Physics Essays*. 2020. Vol. 33. No 3. P. 268–70. DOI: 10.4006/0836-1398-33.3.268.

21. Koutsawa Y. New micromechanics approaches for the effective properties of multiferroics composites with spring-type imperfect interfaces. *Composite Structures*. 2019. Vol. 211. P. 41–55. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.12.025.

22. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. *Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты*. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

23. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. *Волновые задачи теории поля и термомеханика*. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

References

1. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On theory of oriented tensor elements of area for a micropolar continuum immersed in an external plane space. *Mech. Solids.* 2022. Vol. 57. No 2. P. 205–213. DOI: 10.3103/S0025654422020108.

2. Schouten J.A. *Tensor Analysis for Physicist*. Oxford. Clarendon Press. 1951. 275 p.

3. Truesdell C., Toupin R. The classical field theories. *Encyclopedia of Physics. Vol. III/1. Principles of Classical Mechanics and Field Theory.* Ed. S. Flügge. Berlin. Göttingen. Heidelberg. Springer. 1960. P. 226–858. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

4. Gurevich G.B. *Foundations of the Theory of Algebraic Invariants*. Groningen. Noordhoff Ltd. 1964. 435 p.

5. Synge J.L., Schild A. *Tensor Calculus*. New York. Dover Publications Inc. 1978. 336 p.

6. Sokolnikoff I.S. *Tensor Analysis: Theory and Applications to Geometry and Mechanics of Continua*. New York. John Wiley & Sons Inc. 1964. 361 p.

7. McConnell A.J. *Application of Tensor Analysis*. New York. Dover Publications. 1957. 318 p.

8. Rozenfel'd B.A. *Mnogomernye prostranstva* [*Multidimensional Spaces*]. Moscow. Nauka Publ. 1966. 648 p. (In Russian).

9. Murashkin E.V., Radaev Yu.N. On a differential constraint in asymmetric theories of the mechanics of growing solids. *Mech. Solids.* 2019. Vol. 54. No 8. P. 1157–1164. DOI: 10.3103/S0025654419080053.

10. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On a micropolar theory of growing solids. *J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.* 2020. Vol. 24. No 3. P. 424–444. DOI: 10.14498/vsgtu1792.

11. Radayev Yu.N., Murashkin E.V. Psevdotenzornaya formulirovka mekhaniki gemitropnykh mikropolyarnykh sred [Pseudotensor formulation of the mechanics of hemitropic micropolar media]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [*Problems of Strength and Plasticity*]. 2020. Vol. 82. No 4. P. 399–412 (In Russian).

12. Kovalev V.A., Murashkin E.V., Radayev Yu.N. On the Neuber theory of micropolar elasticity. Apseudotensor formulation. *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci*. 2020. Vol. 24. No 4. P. 752–761. DOI: 10.14498/vsgtu1799.

13. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. Generalization of the algebraic Hamilton – Cayley theory. *Mech. Solids*. 2021. Vol. 56. No 6. P. 996–1003. DOI: 10.3103/S0025654421060145.

14. Radayev Yu.N., Murashkin E.V., Nesterov T.K. On covariant non-constancy of distortion and inversed distortion tensors. *J. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys. Math. Sci*. 2022. Vol. 26. No 1. P. 36–47. DOI: 10.14498/vsgtu1891.

15. Murashkin E.V. Radayev Yu.N. Algebraic algorithm for the systematic reduction of one-point pseudotensors to absolute tensors. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Ser. Mechanics of a Limit State*. 2022. No 1(51). P. 19–28.

16. Murashkin E.V. Radayev Yu.N. On a pseudotensor generalization of the Hugoniot – Hadamard linking boundary conditions. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Ser. Mechanics of a Limit State*. 2021. No 2(48). P. 104–114.

17. Murashkin E.V., Radayev Yu.N. Pseudovector hyperbolic differential operators of hemitropic micropolar elasticity. *Vestnik I. Yakovlev Chuvach State Pedagogical University. Ser. Mechanics of a Limit State.* 2021. No 4(50). P. 59–72.

18. Rudge J.F. A micropolar continuum model of diffusion creep. *Philos. Mag.* (*Abingdon*). 2021. Vol. 101 Iss. 17. P. 1913–1941. DOI: 10.1080/14786435.2021.1946191.

19. Abedi H., Capozziello S., Capriolo M., Abbassi A.M. Gravitational energy-momentum pseudo-tensor in Palatini and metric $f(R)$ gravity. *Annal. Phys*. 2022. Vol. 439. Article No 168796. DOI: 10.1016/j.aop.2022.168796.

20. Crothers S.J. The Einstein and Landau – Lifshitz pseudotensors-A mathematical note on existence. *Phys. Essays*. 2020. Vol. 33. No 3. P. 268–270. DOI: 10.4006/0836-1398-33.3.268.

21. Koutsawa Y. New micromechanics approaches for the effective properties of multiferroics composites with spring-type imperfect interfaces. *Compos. Struct*. 2019. Vol. 211. P. 41–55. DOI: 10.1016/j.compstruct.2018.12.025

22. Kovalev V.A., Radaev Yu.N. *Elementy teorii polya: variatsionnye simmetrii i geometricheskie invarianty* [*Elements of the Field Theory: Variational Symmetries and Geometric Invariants*]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2009. 156 p. (In Russian).

23. Kovalev V.A., Radaev Yu.N. Volnovye zadachi teorii polya i termomekhanika [*Wave Problems of the Field Theory and Thermomechanics*]. Saratov. Saratov university Publ. 2010. 328 p. (In Russian).

SCHOUTEN'S FORCE STRESS TENSOR AND AFFINOR DENSITIES OF POSITIVE WEIGHT*

Murashkin E.V., Radayev Yu.N.

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics RAS, Moscow, Russian Federation

evmurashkin@gmail.com, radayev@ipmnet.ru

Received by the Editor 2022/08/14

The paper deals with the concept of the force stress pseudotensor and the derivation of equilibrium equations in terms of the Schouten's stress pseudotensor being an affinor density. The definition of Schouten's force stress pseudotensor is mainly based on the notion of a pseudoinvariant element of area. The requisute equations and notions from algebra and the analysis of pseudotensors is revisited. A fundamental orienting pseudoscalar is introduced and discussed. Conventional and non-conventional definitions of the force stress tensor are given. A unit normal vector to a level surface of a pseudoscalar field is introduced. The exceptional importance of using the theory of orientable manifolds in modeling micropolar continua in mechanics of solids is noted. The notion of *M*-cell and its orientation algorithm are recalled. Algorithms for constructing the tensor elements of the area of *M*-manifold immersed in *N*-dimensional space are discussed. The notions of vector, pseudovector, invariant and pseudoinvariant elements of surface area in three-dimensional space are revisited. The possibility of using pseudotensor volume elements of a given integer weight due to the formula for a pseudotensor field transformation to an absolute tensor field by a fundamental orienting pseudoscalar is discussed. Various realisations of covariant differentiation of pseudotensors are considered. Covariant derivatives are given for a pseudoscalar and a contravariant pseudotensor of the second rank of an arbitrary integer weight. The principle of virtual displacements is formulated in terms of pseudo-invariant volume and area elements. The hypothesis of the absolute invariance of the virtual work is assumed, i.e. insensitive to rotations, 3D inversion and mirror reflections. Equations of equilibrium and dynamics are derived in terms of the affinor density of Schouten's force stresses. Equilibrium equations are obtained for the case of using pseudo-invariant volume and area elements of an arbitrary integer weight.

Keywords: pseudotensor, fundamental orienting pseudoscalar, affinor density, Schouten stress tensor, pseudoinvariant volume element, covariant derivative.

---

* The present study was in part financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Registration Number AAAA-A20-120011690132-4) and by the Russian Foundation for Basic Research project No 20-01-00666.