

УДК 539.31

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-523-535

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ НА ИНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ*

© 2022 г. Сердюк А.О.¹, Сердюк Д.О.¹, Федотенков Г.В.^{1,2}

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Российская Федерация

²НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

greghome@mail.ru

Поступила в редакцию 10.06.2022

Построено фундаментальное решение для тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера. Фундаментальное решение представляет собой функцию нормального перемещения двух пространственных координат и времени в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки, математически описываемой дельта-функцией Дирака. Рассматриваемая модель анизотропии имеет одну плоскость симметрии, геометрически совпадающую со срединной плоскостью пластины, тензор упругих постоянных материала содержит шесть независимых компонентов.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения неограниченной анизотропной пластины в перемещениях, начальные условия и условия на бесконечности. Решение соответствующей начально-краевой задачи для фундаментального решения строится с применением интегральных преобразований Лапласа по времени и двумерного интегрального преобразования Фурье по пространственным координатам. Обратное интегральное преобразование Лапласа найдено аналитически с учетом предварительного анализа изображения. Оригинал фундаментального решения по Фурье построен при помощи численного метода интегрирования быстро осциллирующих функций. С целью построения решения с заданной точностью параметры алгоритма численного интегрирования определяются итерационно путем сравнения результатов по непрерывной норме.

Проведен численный анализ характера распространения упругих волн, а также исследовано влияние параметров инерционного основания Винклера на процесс нестационарного деформирования анизотропной пластины. Продемонстрирован асимметричный характер нестационарных колебаний пластины, согласующийся с моделью рассматриваемой упругой среды.

Построенное фундаментальное решение позволяет исследовать нестационарные колебания анизотропной пластины на инерционном основании при действии произвольных нагрузок при помощи интегрального оператора типа свертки по пространственным координатам и времени. Кроме того, фундаментальное решение обладает универсальностью по отношению к свойствам материалов пластины и параметрам основания, а именно: в качестве материала

* Выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №20-19-00217).

пластины могут выступать изотропные, трансверсально-изотропные и ортотропные материалы. При этом основание может быть безынерционным или отсутствовать.

Ключевые слова: фундаментальное решение, функция Грина, преобразования Лапласа и Фурье, анизотропная пластина, инерционное основание, нестационарная динамика.

Введение

Тонкие пластины находят широкое применение в различных конструкциях современной техники. Они используются в авиакосмической, судостроительной, автомобилестроительной и других отраслях промышленности. Пластины на упругих и инерционных основаниях применяются в гражданском и промышленном строительстве. В большинстве случаев материал таких пластин изотропный или ортотропный. Однако развитие аддитивных технологий [1, 2] и технологий изготовления полимеров с пространственным армированием [3, 4] открывает возможности для проектирования и использования в технике элементов конструкций из анизотропных материалов. Такие конструкционные материалы требуют разработки новых математических моделей и методов расчетов. Подходы к расчетам анизотропных пластин на статическую прочность, собственные и вынужденные гармонические колебания описаны С.Г. Лехницким и Р.А. Адамеску [5–7]. Вопросы нестационарной динамики изотропных пластин затронуты в [8–10], ортотропных пластин, в том числе на упругом основании, – в статьях [11–13]. Стационарным и нестационарным колебаниям анизотропных и многослойных пластин посвящены статьи [14–19]. Исследования стационарного динамического поведения анизотропных пластин на упругих и инерционных основаниях представлены в публикациях [20–22]. Анализ свободных и собственных колебаний многослойных пластин на упругих и инерционных основаниях посвящены статьи [23–25]. В целом исследованию нестационарной динамики изотропных и ортотропных пластин с применением как аналитических, так и численных методов посвящено большое количество работ. Что касается публикаций, посвященных подобным задачам для анизотропных пластин, то в них преобладают решения, полученные с использованием метода конечных элементов. Вопросы, связанные с численно-аналитическими исследованиями характера распространения нестационарных возмущений в анизотропных пластинах на инерционном основании, являются наименее изученными.

Настоящая статья посвящена построению фундаментального решения для тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера. Полученные результаты актуальны, теоретически и практически значимы, поскольку фундаментальные решения широко используются в нестационарных задачах теории упругости, теории пластин и оболочек [26–28].

1. Постановка задачи

В декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ исследуется процесс распространения нестационарных возмущений в тонкой неограниченной пластине Кирхгофа [29] постоянной толщины на инерционном основании Винклера [30] при воздействии на нее нестационарной нагрузки. В начальный момент времени пластина находится в невозмущенном состоянии. Плоскость Ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины. Материал пластины упругий и анизотропный, с симметрией относительно

срединной плоскости пластины. Упругие свойства пластины Кирхгофа, срединная плоскость которой совпадает с единственной плоскостью симметрии материала, характеризуются шестью независимыми упругими постоянными материала c_{11} , c_{12} , c_{16} , c_{22} , c_{26} , c_{66} .

Постановка начальной задачи включает в себя уравнения движения в перемещениях и начальные условия [29, 30]:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -ID(w) + p(x_1, x_2, t) - kw - m_f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$D(w) = c_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + c_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} + 2(c_{12} + 2c_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4c_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 4c_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x_1 \partial x_2^3}, \quad (1)$$

$$w|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0.$$

В (1) t – время, w – нормальное перемещение, ρ – плотность материала пластины, $I = h^3/12$ – момент инерции поперечного сечения, отнесенный к толщине h пластины, p – нестационарная нагрузка, k – коэффициент жесткости основания, m_f – массовый коэффициент упругого основания.

Цель исследования заключается в построении нового универсального фундаментального решения для тонкой упругой анизотропной неограниченной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера. Универсальность фундаментального решения заключается не только в его использовании для построения решений при произвольных нестационарных нагрузках с помощью интегрального оператора типа свертки, но и в возможности учета различных случаев анизотропии материала пластины, в качестве которого могут выступать изотропные, трансверсально-изотропные, ортотропные и анизотропные материалы, а также различных параметров основания, которое может быть инерционным, упругим или отсутствовать.

2. Фундаментальное решение

Фундаментальное решение [29] (далее функция Грина) представляет собой нормальное перемещение тонкой упругой неограниченной анизотропной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера в ответ на воздействие единичной сосредоточенной нагрузки, математически описываемой дельта-функцией Дирака. Соответствующая постановка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -R(G) + C_7 \delta(x_1, x_2) \delta(t),$$

$$R(G) = C_1 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^4} + C_2 \frac{\partial^4 G}{\partial x_2^4} + C_3 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + C_4 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1^3 \partial x_2} + C_5 \frac{\partial^4 G}{\partial x_1 \partial x_2^3} + C_6 G, \quad (2)$$

$$G|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

где

$$C_1 = \frac{Ic_{11}}{\rho h + m_f}, \quad C_2 = \frac{Ic_{22}}{\rho h + m_f}, \quad C_3 = \frac{2I(c_{12} + 2c_{66})}{\rho h + m_f}, \quad C_4 = \frac{4Ic_{16}}{\rho h + m_f}, \quad (3)$$

$$C_5 = \frac{4Ic_{26}}{\rho h + m_f}, \quad C_6 = \frac{k}{\rho h + m_f}, \quad C_7 = \frac{1}{\rho h + m_f}.$$

В (2) $G(x_1, x_2, t)$ – функции Грина нормальных перемещений, $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака.

Для решения начальной задачи (2) применим интегральное преобразование Лапласа по времени t и двумерное интегральное преобразование Фурье по координатам x_1, x_2 :

$$G^{LF} = \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, x_2, t) \exp(-i(q_1 x_1 + q_2 x_2) + st) dx_2.$$

Здесь и далее верхний индекс L обозначает интегральное преобразование Лапласа, а s – параметр интегрального преобразования Лапласа. Верхний индекс F обозначает интегральное преобразование Фурье, а q_1 и q_2 – параметры этого преобразования.

Функция Грина в пространстве изображений Лапласа и Фурье примет вид:

$$G^{LF} = C_7 \frac{1}{s^2 + Q(q_1, q_2)}, \quad (4)$$

$$Q(q_1, q_2) = q_1^3 (C_1 q_1 + C_4 q_2) + q_2^3 (C_2 q_2 + C_5 q_1) + C_3 q_1^2 q_2^2 + C_6.$$

Оригинал функции Грина по Лапласу найден при помощи таблиц операционного исчисления [31]. В зависимости от сочетания констант, входящих в функцию $Q(q_1, q_2)$, оригинал соотношения по Лапласу (4) принимает вид:

$$G^F(q_1, q_2, t) = \begin{cases} C_7 \frac{\sin(\sqrt{Q(q_1, q_2)}t)}{\sqrt{Q(q_1, q_2)}}, & Q(q_1, q_2) > 0, \\ C_7 t, & Q(q_1, q_2) = 0, \\ C_7 \frac{\text{sh}(\sqrt{Q(q_1, q_2)}t)}{\sqrt{Q(q_1, q_2)}}, & Q(q_1, q_2) < 0. \end{cases} \quad (5)$$

С учетом выполнения следующих неравенств для параметров задачи:

$$h > 0, \quad \rho > 0, \quad k > 0, \quad m_f > 0, \quad c_{11} > 0, \quad c_{12} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{16} > 0, \quad c_{26} > 0, \quad c_{66} > 0$$

коэффициенты (3), входящие в функцию $Q(q_1, q_2)$, удовлетворяют условиям:

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad C_3 > 0, \quad C_4 > 0, \quad C_5 > 0, \quad C_6 > 0. \quad (6)$$

Из необходимого условия экстремума функции

$$\begin{cases} 4C_1 q_1^3 + C_5 q_2^3 + 3C_4 q_1^2 q_2 + 2C_3 q_1 q_2^2 = 0, \\ C_4 q_1^3 + 4C_2 q_2^3 + 2C_3 q_1^2 q_2 + 3C_5 q_1 q_2^2 = 0 \end{cases}$$

следует, что существует точка $M(0, 0)$, которая является стационарной точкой функции $Q(q_1, q_2)$. В свою очередь достаточное условие экстремума приводит к результату:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad a_{11} = \left. \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} Q(q_1, q_2) \right|_M, \quad a_{22} = \left. \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} Q(q_1, q_2) \right|_M, \quad a_{12} = \left. \frac{\partial^2}{\partial q_1 \partial q_2} Q(q_1, q_2) \right|_M. \quad (7)$$

Следовательно, в точке $M(0, 0)$ функция $Q(q_1, q_2)$ может иметь или не иметь локальный экстремум, что требует дополнительного исследования. Для ответа на этот вопрос рассмотрим зависимости функции $Q(q_1, q_2)$ от каждого аргумента отдельно:

$$Q(q_1, 0) = C_1 q_1^4 + C_6, \quad Q(0, 0) = C_6, \quad Q(0, q_2) = C_2 q_2^4 + C_6,$$

следовательно, с учетом (6), имеем

$$Q(q_1, 0) > Q(0, 0) > 0, \quad Q(0, q_2) > Q(0, 0) > 0. \quad (8)$$

Выполним сечение поверхности $Q(q_1, q_2)$ плоскостью, проходящей через точку $M(0, 0)$ и перпендикулярной координатной плоскости Oq_1q_2 , при помощи замены $q_2 = kq_1$ в соотношении (4):

$$Q(q_1, kq_1) = \tilde{Q}(q_1) = q_1^4 (k^4 C_2 + k^3 C_5 + k^2 C_3 + kC_4 + C_1) + C_6.$$

Изменяя величину k , вращаем секущую плоскость, «сканируя» искомую поверхность, а именно, ищем диапазон k , при которых M будет точкой перегиба:

$$\frac{d^2}{dq_1^2} \tilde{Q}(q_1) = 12q_1^2 A(k), \quad A(k) = k^4 C_2 + k^3 C_5 + k^2 C_3 + kC_4 + C_1. \quad (9)$$

Для частных случаев симметрии упругой среды (ортотропная или изотропная пластина, для которых $C_4 = C_5 = 0$ согласно (4)) $A(k) > 0$ при любых k , поскольку в этом случае степени при k в (9) четные, и, следовательно, M не является точкой перегиба, а функция $Q(q_1, q_2) > 0$. В случае анизотропного материала для функции $A(k)$ необходимо удостовериться в отсутствии действительных корней (применив методы Феррари и Кардано) при заданных упругих постоянных для получения универсального решения с точки зрения симметрии упругой среды, для которого функция Грина, согласно (5), в изображении по Фурье примет вид:

$$G^F(q_1, q_2, t) = C_7 \frac{\sin(\sqrt{Q(q_1, q_2)}t)}{\sqrt{Q(q_1, q_2)}}, \quad (10)$$

$$Q(q_1, q_2) = q_1^3 (C_1 q_1 + C_4 q_2) + q_2^3 (C_2 q_2 + C_5 q_1) + C_3 q_1^2 q_2^2 + C_6 > 0.$$

Обратное интегральное преобразование Фурье соотношения (10) выполнено численно. Заменяв несобственные интегралы обращения определенными:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G^F(q_1, q_2, t) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) dq_1 dq_2 \approx \\ &\approx \frac{1}{4\pi^2} \int_{-H}^H \int_{-H}^H G^F(q_1, q_2, t) \exp(i(q_1 x_1 + q_2 x_2)) dq_1 dq_2 \end{aligned}$$

и применив для взятия интегралов метод интегрирования быстроосциллирующих функций [32], получим оригинал функции Грина для неограниченной анизотропной пластины на инерционном основании Винклера:

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left\{ \exp \frac{i(q_{1_{k+1}} x_1 + q_{1_k} x_1)}{2} [D_1 U(q_{1_k}, x_2, t) + D_2 U(q_{1_{k+1}}, x_2, t)] \right\}, \\ U(q_1, x_2, t) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\Delta}{2} \left\{ \exp \frac{i(q_{2_{k+1}} x_2 + q_{2_k} x_2)}{2} \left[D_1 \frac{\sin(\sqrt{Q(q_1, q_{2_k})}t)}{\sqrt{Q(q_1, q_{2_k})}} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ D_2 \frac{\sin(\sqrt{Q(q_1, q_{2,k+1})} t)}{\sqrt{Q(q_1, q_{2,k+1})}} \Bigg\}, \quad (11)$$

где

$$D_{1,2} = \frac{\sin m}{m} \pm \frac{m \cos m - \sin m}{m^2} i, \quad m = \frac{\Delta}{2}, \quad N = \frac{2H}{\Delta}, \quad (12)$$

$$q_{1_k} = -H + k\Delta, \quad q_{2_k} = -H + k\Delta, \quad q_{1_{k+1}} = -H + (k+1)\Delta, \quad q_{2_{k+1}} = -H + (k+1)\Delta.$$

В (12) H – границы интегрирования, N – число шагов интегрирования, Δ – шаг интегрирования. Параметры численного интегрирования N и H подбираются итерационно для обеспечения построения решения с заданной точностью по двойному итерационному циклу с параметрами (номерами итераций) p и l ($p = 1, 2, 3, \dots, l = 1, 2, 3, \dots$).

Соответствующий алгоритм описан формулами (13), (14). Его работа заключается в следующем. Для произвольно заданных стартовых значений H_l и N_l^p (l, p – номера итераций, для каждого $l = 1, 2, 3, \dots$ перебираются $p = 1, 2, 3, \dots$) проводится анализ функций G_l^p и G_l^{p+1} по непрерывной норме до выполнения критерия

$$\begin{aligned} & \left\| G_l^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) - G_l^p(x_1, x_2, t_{\max}) \right\| = \\ & = \max_{\substack{a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ a_1 \leq x_2 \leq a_2}} \left| G_l^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) - G_l^p(x_1, x_2, t_{\max}) \right| = \eta^p, \quad \eta^p \leq \eta, \end{aligned} \quad (13)$$

где η – заданное минимальное значение погрешности (заданная точность); $\Omega = \{(x_1, x_2, t): t \in [0, t_{\max}], x_1 \in [a_1, a_2], x_2 \in [a_1, a_2]\}$ – пространственно-временная область, на которой ищется решение. В (13) функция G_l^p строится для N_l^p , а функция G_l^{p+1} – для $N_l^{p+1} = N_l^p + \Delta_N$ ($\Delta_N = \text{const}$ – произвольно заданное число).

В результате выполнения критерия (13) для произвольно установленных границ интегрирования H_l и $H_{l+1} = H_l + \Delta_H$ ($\Delta_H = \text{const}$ – произвольно заданное положительное число) с заданной точностью η определяется число шагов интегрирования N_l^{p+1} и N_{l+1}^{p+1} для функций Грина G_l^{p+1} и G_{l+1}^{p+1} в двойном итерационном цикле на шаге с параметрами p и l . Итерационный процесс повторяется до выполнения критерия:

$$\begin{aligned} & \left\| G_{l+1}^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) - G_l^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) \right\| = \\ & = \max_{\substack{a_1 \leq x_1 \leq a_2 \\ a_1 \leq x_2 \leq a_2}} \left| G_{l+1}^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) - G_l^{p+1}(x_1, x_2, t_{\max}) \right| = \eta_l, \quad \eta_l \leq \eta, \end{aligned} \quad (14)$$

в результате чего определяются границы интегрирования H_{l+1} .

Таким образом, построенный двойной цикл итерационного алгоритма позволяет решить две задачи: определить границы интегрирования и подобрать шаг интегрирования с целью получения решения с наперед заданной точностью.

3. Численное исследование

Исследуем характер функции Грина (11), а также влияние параметров инерционного основания k и m_f . В качестве анизотропного материала пластины рассмотрим углепластик [33] плотностью 1750 кг/м^3 с компонентами тензора упругих постоянных (для которого соотношение (9) не имеет действительных корней):

$$C = \begin{pmatrix} 95,5 & 28,9 & 4,03 & 0 & 0 & 44,7 \\ 28,9 & 25,9 & 4,65 & 0 & 0 & 15,6 \\ 4,03 & 4,65 & 16,3 & 0 & 0 & 0,54 \\ 0 & 0 & 0 & 4,4 & -1,78 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1,78 & 6,45 & 0 \\ 44,7 & 15,6 & 0,54 & 0 & 0 & 32,7 \end{pmatrix} \text{ ГПа.}$$

Толщину пластины примем равной 5 мм.

На рис. 1 представлено пространственное распределение функции Грина для анизотропной неограниченной пластины на инерционном основании Винклера при $k = 100 \text{ Па/м}$, $m_f = 10 \text{ кг/м}^2$ в моменты времени 0,06 с (рис. 1а) и 0,12 с (рис. 1б) соответственно, а на рис. 2 – поведение функции Грина во времени в точках $M_1(1, 0)$ (сплошная линия), $M_2(2, 0)$ (штриховая линия), $M_3(3, 0)$ (пунктирная линия).

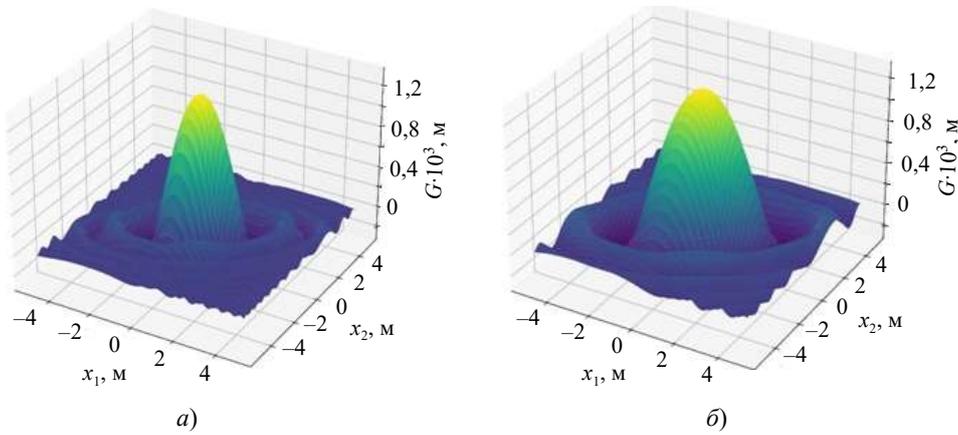


Рис. 1. Пространственное распределение функции Грина

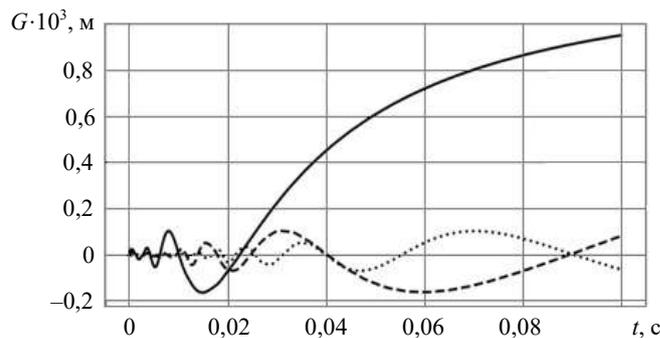


Рис. 2. Поведение функции Грина во времени в точках M_1 , M_2 и M_3

Результаты, представленные на рис. 1, демонстрируют асимметричный характер распространения возмущений в пластине, что согласуется с рассматриваемой анизотропной моделью материала. Зависимости, представленные на рис. 2, иллюстрируют нестационарный характер распространения возмущений.

На рис. 3 показано поведение во времени функции Грина в точке $x_1 = x_2 = 0$ в зависимости от коэффициента жесткости основания k в случае безынерционного

основания $m_f = 0$ (сплошная линия – $k = 0$, штриховая линия – $k = 100$ Па/м, пунктирная линия – $k = 200$ Па/м, штрихпунктирная линия – $k = 300$ Па/м).

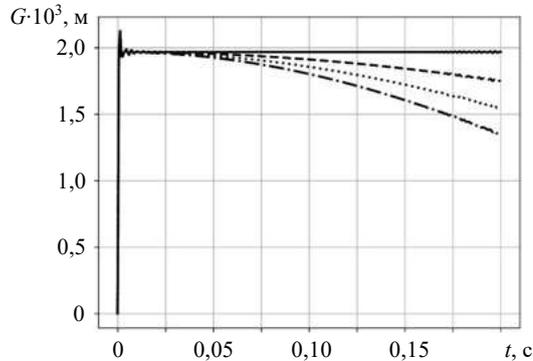


Рис. 3. Поведение во времени функции Грина в точке $x_1 = x_2 = 0$ в зависимости от коэффициента жесткости основания

Из рис. 3 видно, что в случае отсутствия основания Винклера ($k = 0$, сплошная линия) с течением времени функция Грина практически не изменяется, что согласуется с аналитическим решением для неограниченной изотропной пластины Кирхгофа [29]. При учете наличия упругого основания Винклера ($k > 0$) амплитуда функции Грина во времени уменьшается. При этом с ростом коэффициента k растет и интенсивность уменьшения амплитуды.

Рисунок 4 иллюстрирует поведение во времени функции Грина в точке $x_1 = x_2 = 0$ в зависимости от массового коэффициента упругого основания m_f при фиксированном коэффициенте жесткости основания $k = 300$ Па/м (сплошная линия – $m_f = 0$, штриховая линия – $m_f = 10$ кг/м², пунктирная линия – $m_f = 20$ кг/м², штрихпунктирная линия – $m_f = 30$ кг/м²).

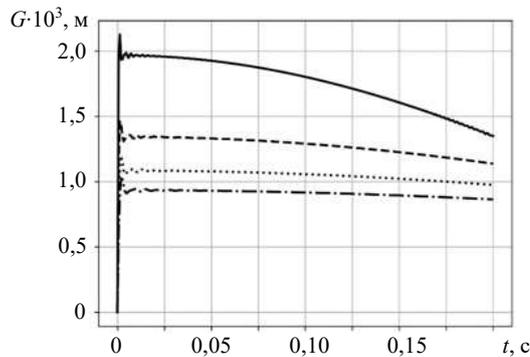


Рис. 4. Поведение во времени функции Грина в точке $x_1 = x_2 = 0$ в зависимости от массового коэффициента упругого основания

Из рис. 4 видно, что с ростом массового коэффициента упругого основания m_f снижается начальная амплитуда функции Грина с дальнейшим затуханием с течением времени. При этом с ростом массового коэффициента упругого основания m_f интенсивность падения амплитуды замедляется.

Реализация алгоритмов и построение приведенных рисунков выполнено при помощи языка программирования Python.

Заключение

Построено новое численно-аналитическое решение динамической задачи теории упругости для неограниченной тонкой упругой анизотропной пластины Кирхгофа на инерционном основании Винклера с применением интегральных преобразований и численного метода интегрирования быстроосциллирующих функций. Выполнено исследование построенного фундаментального решения. Проведен анализ влияния параметров инерционного основания. Дана оценка характера распространения нестационарных возмущений.

Теоретическая значимость построенного фундаментального решения заключается в том, что оно может быть использовано для решения широкого круга нестационарных задач теории анизотропных пластин, в том числе нестационарных контактных и обратных задач. Также найденное решение можно положить в основу построения интегральных уравнений метода граничных элементов или метода компенсирующих нагрузок. С практической точки зрения полученные результаты могут быть востребованы для проведения расчетов нестационарного напряженно-деформированного состояния анизотропных пластин.

Список литературы

1. Бабайцев А.В., Рабинский Л.Н., Ян Н.М. Методика оценки остаточных напряжений в образцах из сплава AlSi10Mg, полученных по технологии SLM. *Труды МАИ*. 2021. №119. С. 1–18. DOI 10.34759/trd-2021-119-10.
2. Погодин В.А., Рабинский Л.Н., Ситников С.А. Технологические аспекты 3D печати деталей газоразрядной камеры электроракетного двигателя. *СТИН*. 2019. №4. С. 20–22.
3. Лурье С.А., Кривень Г.И., Рабинский Л.Н. О прочности модифицированного волокнистого композита с вискеризованными волокнами. *Композиты и наноструктуры*. 2019. Т. 11. №1(41). С. 1–15.
4. Кривень Г.И., Лыкосова Е.Д. Анализ прочности волокнистых композитов, модифицированных различными нановолокнами, в случае чистого сдвига вдоль волокна. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2021. Т. 27. №1. С. 125–142. DOI: 10.33113/mkmc.ras.2021.27.01.125_142.09.
5. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки*. М.–Л.: ОГИЗ. Гостехиздат, 1947. 355 с.
6. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука, 1977. 416 с.
7. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. *Анизотропия физических свойств металлов*. М.: Металлургия, 1985. 1367 с.
8. Жигалко Ю.П., Садыкова М.М. Динамика тонкой круглой пластинки при нестационарном локальном нагружении. *Исследования по теории пластин и оболочек*. 1990. Вып. 20. С. 184–191.
9. Моргачев К.С. Нестационарная динамика кольцевой пластины Тимошенко переменной толщины. *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физ.-мат. науки*. 2007. №2(15). С. 162–164. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu548>.
10. Дьяченко Ю.Г. Нестационарная задача динамики пластин переменного сечения в уточненной постановке: *Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук*. Саратов. СГУ, 2008. 19 с.
11. Шевченко В.П., Ветров О.С. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок. *Труды ИПММ НАН Украины*. 2011. Т. 22. С. 207–215.
12. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates. *Matériaux & Techniques*. 2019. Vol. 107. No 2. P. 201-1–201-12. DOI: 10.1051/mattech/2019006.
13. Артюхин Ю.П., Великанов П.Г. Фундаментальное решение задачи изгиба ортотропной пластины, лежащей на упругом основании типа Винклера. *Матем. моделирование и краев. задачи: Труды Третьей Всерос. науч. конф. Ч. 3. Дифференциальные уравнения и краевые задачи*. Самара, 29–31 мая 2006 г. СамГТУ. 2006. С. 51–54.

14. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *Journal of Applied Mechanics. Transactions of the ASME*. 1989. Vol. 56. Iss. 4. P. 881–886. DOI: 10.1115/1.3176186.
15. Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2015. Vol. 54. P. 19–27. DOI: 10.1016/j.enganabound.2015.01.001.
16. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3D transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates. *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 37. Iss. 1. P. 79–83. DOI: 10.18720/MPM.3712018_11.
17. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *Journal of Mechanics*. 2014. Vol. 30. Iss. 6. P. 561–570. DOI: 10.1017/jmech.2014.65.
18. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads. *Mechanics of Composite Materials*. 2018. Vol. 54. Iss. 3. P. 299–312. DOI: 10.1007/s11029-018-9740-x.
19. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads. *Mechanics of Composite Materials*. 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 665–672. DOI: 10.1007/s11029-016-9615-y.
20. Wattanasakulpong N., Chaikittiratana A. Exact solutions for static and dynamic analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates with Pasternak elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*. 2015. Vol. 39. Iss. 18. P. 5459–5472. DOI: 10.1016/j.apm.2014.12.058.
21. Patel B.P., Ganapathi M., Prasad K.R., Balamurugan V. Dynamic instability of layered anisotropic composite plates on elastic foundations. *Engineering Structures*. 1999. Vol. 21. Iss. 11. P. 988–995. DOI: 10.1016/s0141-0296(98)00063-7.
22. Cao C.Q., Gao C., Huang Y. Semi-analytic solutions of dynamic response of pavement plate on the elastic foundation. *Advanced Materials Research*. 2010. Vol. 148-149. P. 535–538. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.148-149.535.
23. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. Анализ собственных колебаний круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака. *Материалы. Технологии. Инструменты*. 2013. Т. 18. №4. С. 14–17.
24. Леоненко Д.В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании под действием импульсных нагрузок. *Механика. Исследования и инновации*. 2016. Вып. 9. С. 78–84.
25. Леоненко Д.В. Импульсные нагружения круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака. *Механика. Исследования и инновации*. 2018. Вып. 11. С. 155–161.
26. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science*. 2020. Vol. 18. No 4. P. 687–692. DOI: 10.5937/jaes0-28073.
27. Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Fedotenkov G.V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019. Vol. 40. No 4. P. 489–498.
28. Юй Гу, Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Упругодиффузионные колебания изотропной пластины Кирхгофа – Лява под действием нестационарной распределенной поперечной нагрузки. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2021. №3. С. 48–57. DOI: 10.15593/perm.mech/2021.3.05.
29. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
30. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании*. М.: Физматгиз, 1960. 491 с.
31. Дёч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразований*. М.: Наука, 1971. 288 с.
32. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. *Численные методы*. М.: Наука, 1975. 630 с.
33. Игумнов Л.А., Марков И.П., Пазин В.П. Гранично-элементное решение краевых за-

дач трехмерной анизотропии теории упругости. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика*. 2013. №1(3). С. 115–119.

References

1. Babaytsev A.V., Rabinsky L.N., Yang Naing Min. Metodika otsenki ostatochnykh napryazheniy v obratzakh iz splava AlSi10Mg, poluchennykh po tekhnologii SLM [Method for evaluating residual stresses in ALSi10MG alloy specimens obtained by SLM technology]. *Trudy MAI*. 2021. No 119. P. 1–18 (In Russian).
2. Pogodin V.A., Rabinsky L.N., Sitnikov S.A. Tekhnologicheskie aspekty 3D pechati detaley gazorazryadnoy kamery elektroraketnogo dvigatelya [Technological aspects of 3D printing of gas discharge chamber parts of an electric rocket engine]. *STIN [Russian Engineering Research]*. 2019. No 4. P. 20–22 (In Russian).
3. Lurie S.A., Kriven G.I., Rabinsky L.N. O prochnosti modifitsirovannogo voloknistogo kompozita s viskerizovannymi voloknami [On strength of modified fiber composite with fuzzy fibers]. *Kompozity i nanostruktury [Composites and Nanostructures]*. 2019. Vol. 11. No 1(41). P. 1–15 (In Russian).
4. Kriven G.I., Lykosova E.D. Analiz prochnosti voloknistykh kompozitov, modifitsirovannykh razlichnymi nanovoloknami, v sluchae chistogo sdviga vdol volokna [Strength analysis of fiber composites modified with various nanofibers in the case of pure shear along the fiber]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy [Journal on Composite Mechanics and Design]*. 2021. Vol. 27. No 1. P. 125–142 (In Russian).
5. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki [Anisotropic Plates]*. Moscow. Leningrad. OGIZ. Gostekhizdat. 1947. 355 p. (In Russian).
6. Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [Theory of Elasticity of an Anisotropic Body]*. Moscow. Nauka Publ. 1977. 416 p. (In Russian).
7. Adamesku R.A., Geld P.V., Mityushov E.A. *Anizotropiya fizicheskikh svoystv metallov [Anisotropy of Physical Properties of Metals]*. Moscow. Metallurgiya Publ. 1985. 137 p. (In Russian).
8. Zhigalko Yu.P., Sadykova M.M. Dinamika tonkoy krugloy plastinki pri nestatsionarnom lokalnom nagruzhении [Dynamics of a thin round plate under unsteady local loading]. *Issledovaniya po teorii plastin i obolochek [Studies in the Theory of Plates and Shells]*. 1990. Iss. 20. P. 184–191 (In Russian).
9. Morgachev K.S. Nestatsionarnaya dinamika koltsevoy plastiny Timoshenko peremenoj tolshchiny [Non-stationary dynamics of Timoshenko circular plate of variable thickness]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya fiz.-mat. nauki [Journal of Samara State Technical University. Series Physical and Mathematical Sciences]*. 2007. Iss. 2(15). P. 162–164 (In Russian).
10. Dyachenko Yu.G. Nestatsionarnaya zadacha dinamiki plastin peremennogo secheniya v utochnennoy postanovke [The unsteady problem of the dynamics of plates of variable cross-section in a refined formulation]. *Avtoreferat dissertatsii kand. fiz.-mat. nauk [Abstract of the Cand. Sci. (Engineering). Dissertation]*. Saratov. Saratov State University. 2008. 19 p. (In Russian).
11. Shevchenko V.P., Vetrov O.S. Dinamika ortotropnoy plastiny pod deystviem lokalnykh vnezapno prilozhennykh nagruzok [The dynamics of an orthotropic plate under the action of local suddenly applied loads]. *Trudy Instituta prikladnoy matematiki i mekhaniki Natsionalnoy Akademii Nauk Ukrainy [Transactions of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine]*. 2011. Vol. 22. P. 207–215 (In Russian).
12. Wahab M.A., Jabbour T., Davies P. Prediction of impact damage in composite sandwich plates. *Matériaux & Techniques*. 2019. Vol. 107. No 2. P. 201-1–201-12. DOI: 10.1051/mattech/2019006.
13. Artyukhin Yu.P., Velikanov P.G. Fundamentalnoe reshenie zadachi izgiba ortotropnoy plastiny, lezhashchey na uprugom osnovanii tipa Vinklera [A fundamental solution to the problem of bending an orthotropic plate lying on an elastic Winkler-type base]. *Matematicheskoe modelirovanie i kraevye zadachi: Trudy Tretyey Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii. Ch. 3. Differentsialnye uravneniya i kraevye zadachi [Mathematical Modeling and Boundary Value Problems: Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference. Part 3. Differential Equations and*

Boundary Value Problems]. Samara. 29–31 May 2006. Samara State Technical University. 2006. P. 51–54 (In Russian).

14. Nayfeh A.H., Chimenti D.E. Free wave propagation in plates of general anisotropic media. *J. Appl. Mech.* 1989. Vol. 56. Iss. 4. P. 881–886. DOI: 10.1115/1.3176186.

15. Daros C.H. The dynamic fundamental solution and BEM formulation for laminated anisotropic Kirchhoff plates. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2015. Vol. 54. P. 19–27. DOI: 10.1016/jenganabound.2015.01.001.

16. Igumnov L.A., Markov I.P. A boundary element approach for 3d transient dynamic problems of moderately thick multilayered anisotropic elastic composite plates. *Mater. Phys. and Mech.* 2018. Vol. 37. Iss. 1. P. 79–83. DOI: 10.18720/MPM.3712018_11.

17. Sahli A., Boufeldja S., Kebdani S., Rahmani O. Failure analysis of anisotropic plates by the boundary element method. *J. Mech.* 2014. Vol. 30. Iss. 6. P. 561–570. DOI: 10.1017/jmech.2014.65.

18. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. Thermoelastic deformation of a circular sandwich plate by local loads. *Mech. Compos. Maters.* 2018. Vol. 54. Iss. 3. P. 299–312. DOI: 10.1007/s11029-018-9740-x.

19. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. Vibrations of circular composite plates on an elastic foundation under the action of local loads. *Mech. Compos. Maters.* 2016. Vol. 52. Iss. 5. P. 665–672. DOI: 10.1007/s11029-016-9615-y.

20. Wattanasakulpong N., Chaikittiratan A. Exact solutions for static and dynamic analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates with Pasternak elastic foundation. *Appl. Math. Model.* 2015. Vol. 39. Iss. 18. P. 5459–5472. DOI: 10.1016/j.apm.2014.12.058.

21. Patel B.P., Ganapathi M., Prasad K.R., Balamurugan V. Dynamic instability of layered anisotropic composite plates on elastic foundations. *Eng. Struct.* 1999. Vol. 21. Iss. 11. P. 988–995. DOI: 10.1016/s0141-0296(98)00063-7.

22. Cao C.Q., Gao C., Huang Y. Semi-analytic solutions of dynamic response of pavement plate on the elastic foundation. *Adv. Mat. Res.* 2010. Vol. 148-149. P. 535–538. DOI: 10.4028/www.scientific.net/amr.148-149.535.

23. Starovoytov E.I., Leonenko D.V. Analiz sobstvennykh kolebaniy krugovykh trekhslonykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Analysis of natural oscillations of circular three-layer plates on an elastic Pasternak base]. *Materialy. Tekhnologii. Instrumenty [Materials. Technologies. Tools]*. 2013. Vol. 18. No 4. P. 14–17 (In Russian).

24. Leonenko D.V. Kolebaniya krugovykh trekhslonykh plastin na uprugom osnovanii pod deystviem impulsnykh nagruzok [Oscillations of the circular three-ply plates on a deformed foundation under the action of pulsed loads]. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii [Mechanics. Investigations and Innovations]*. 2016. Iss. 9. P. 78–84 (In Russian).

25. Leonenko D.V. Impulsnye nagruzheniya krugovykh trekhslonykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [Impulse loads of circular three-layer plates on the elastic Pasternak's foundation]. *Mekhanika. Issledovaniya i innovatsii [Mechanics. Investigations and Innovations]*. 2018. Iss. 11. P. 155–161 (In Russian).

26. Vahterova Y.A., Fedotenkov G.V. The inverse problem of recovering an unsteady linear load for an elastic rod of finite length. *Journal of Applied Engineering Science.* 2020. Vol. 18. No 4. P. 687–692. DOI: 10.5937/jaes0-28073.

27. Okonechnikov A.S., Tarlakovskiy D.V., Fedotenkov G.V. Transient interaction of rigid indenter with elastic half-plane with adhesive force. *Lobachevskii Journal of Mathematics.* 2019. Vol. 40. No 4. P. 489–498.

28. Yu Gu, Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Uprugodiffuzionnye kolebaniya izotropnoy plastiny Kirkhgofa – Lyava pod deystviem nestatsionarnoy raspredelennoy poperechnoy nagruzki [Elastic diffusion vibration of an isotropic Kirchhoff – Love plate under an unsteady distributed transverse load]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2021. No 3. P. 48–57 (In Russian).

29. Gorshkov A.G., Medvedskiy A.L., Rabinskiy L.N., Tarlakovskiy D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuous Media]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

30. Vlasov V.Z., Leontyev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, Plates and Shells on an Elastic Foundation]*. Moscow. Fizmatgiz Publ. 1960. 491 p. (In Russian).

31. Doetsch G. *Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace-Transformation und der Z-Transformation*. München. Oldenbourg Verlag. 1967. 256 s. (Auf Deutsch).

32. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. *Chislennye metody [Numerical Methods]*. Moscow. Nauka Publ. 1975. 630 p. (In Russian).

33. Igumnov L.A., Markov I.P., Pazin V.P. Granichno-elementnoe reshenie kraevykh zadach trekhmernoy anizotropii teorii uprugosti [Boundary-element analysis of boundary-value problems of 3D anisotropic elasticity]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Mekhanika [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Mechanics]*. 2013. No 1(3). P. 115–119 (In Russian).

A FUNDAMENTAL SOLUTION FOR AN ANISOTROPIC PLATE ON AN INERTIAL FOUNDATION*

Serdyuk A.O.¹, Serdyuk D.O.¹, Fedotenkov G.V.^{1,2}

¹*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation*

²*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

greghome@mail.ru

Received by the Editor 2022/06/10

The work is devoted to the construction of a new fundamental solution for a thin elastic anisotropic unbounded Kirchhoff plate on an inertial Winkler foundation. The fundamental solution is a function of the normal movement of two spatial coordinates and time in response to the impact of a single concentrated load, mathematically modeled by the Dirac delta function. The anisotropy model considered in this article has one plane of symmetry that geometrically coincides with the median plane of the plate and is characterized for the Kirchhoff plate model by six independent components of the tensor of elastic constants of the material. The problem statement includes the equations of motion of an anisotropic plate in displacements and initial conditions. The solution of the corresponding initial problem for the fundamental solution is constructed using integral Laplace transformations in time and two-dimensional integral Fourier transform in spatial coordinates. The inverse integral Laplace transform is found analytically with a preliminary analysis of the invertible function. The original fundamental Fourier solution is constructed using the numerical method of integrating rapidly oscillating functions. The parameters of numerical integration are calculated with a given accuracy when analyzing the quality of the desired functions by a continuous norm. For the constructed new fundamental solution, a numerical analysis of the nature of the propagation of nonstationary disturbances is carried out, and the influence of the parameters of the inertial Winkler foundation on the behavior of the normal deflection of an anisotropic plate in time at the point of action of the delta function is investigated. The asymmetric nature of unsteady plate oscillations consistent with the model of the elastic medium under consideration is demonstrated. The constructed fundamental solution makes it possible to investigate the nonstationary normal deflection of an anisotropic plate on an inertial basis under the action of arbitrary loads using an integral operator of the convolution type in spatial coordinates and time. In addition, the fundamental solution has versatility with respect to the properties of the plate materials and the parameters of the foundation, namely: isotropic, transversally isotropic and orthotropic materials can act as the plate material. In this case, the foundation may be inertialess or absent altogether.

Keywords: fundamental solution, Green's function, anisotropic plate, inertial foundation, unsteady dynamics.

*The research was supported by the Russian Science Foundation (project No 20-19-00217).