

УДК 534.1

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-511-522

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЗГИБНЫХ ВОЛН,
РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ,
С ПРЕПЯТСТВИЕМ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩИМ СОБОЙ СТЕРЖЕНЬ,
ЛЕЖАЩИЙ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ОСНОВАНИИ***

© 2022 г. **Ерофеев В.И.¹, Лисенкова Е.Е.¹, Мониц Д.В.^{1,2}**

*¹Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального
исследовательского центра «Институт прикладной физики РАН»,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

*²Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

erof.vi@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.06.2022

Исследуется однократное взаимодействие волны, распространяющейся в неоднородной пластине в форме бесконечной полосы, с одномерным распределенным механическим объектом, под которым понимается лежащий на вязкоупругом основании стержень, совершающий изгибные и крутильные колебания. Считается, что пластина имеет разные параметры слева и справа от стержня. Физически и математически корректные условия на границе соединения пластины со стержнем получены как следствие постановок контактных задач динамики двумерных упругих систем с одномерными нагрузками, исходя из вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. Определены частоты и волновые числа вторичных (отраженных и прошедших) волн, а также критическая частота, ниже которой волна в пластине не распространяется. На основе решения задачи кинематики из системы линейных алгебраических уравнений, получающейся из граничных условий, найдены коэффициенты отражения и прохождения изгибных волн. Зависимости этих коэффициентов от частоты падающей волны имеют резонансный характер. Приводятся расчетные графики коэффициента прохождения от частоты падающей волны при различных параметрах стержня. Определены условия самоизоляции и безотражательного прохождения волны через препятствие. Установлено, что частота максимума виброизоляции располагается выше частот, при которых происходит полное прохождение волн через препятствие. Получено выражение для силы, обусловленной давлением изгибных волн на одномерный объект. Вычислена ее постоянная составляющая, которая обращается в нуль (для однородной пластины) при отсутствии отраженных от препятствия волн. Показано, что в вырожденных случаях полученные результаты совпадают с проведенными ранее исследованиями других авторов.

* Выполнено в рамках государственного задания ИПФ РАН на проведение фундаментальных научных исследований на 2021–2023 гг. по теме №0030-2021-0025 и при поддержке РФФИ (грант №20-08-00372).

Ключевые слова: пластина, изгибные волны, коэффициенты отражения и прохождения, виброизоляция.

Введение

Известно, что если распределенная система состоит из участков, которые отличаются друг от друга инерционно-жесткостными параметрами, то в местах их соединения происходит отражение энергии упругих колебаний [1–10]. Для одномерных систем было показано [11–14], что введение в местах соединения звеньев безотражательных согласующих устройств позволяет достигнуть полной передачи потока энергии вибраций в режиме бегущей волны и исключает возникновение резонансов в системе. Этот подход, основанный на устранении отраженных волн, применяется ниже для двумерных упругих систем.

1. Математическая модель

Рассмотрим изгибные колебания неоднородной пластины в форме полосы шириной $0 \leq y \leq b_0$ с расположенным на ней одномерным распределенным объектом, в качестве которого используется упругий стержень (рис. 1).

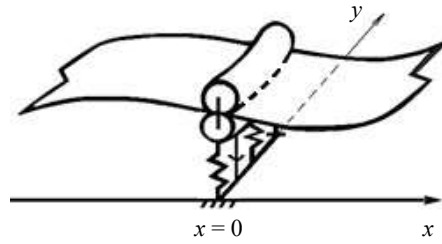


Рис. 1. Пластина (полоса) с расположенным на ней одномерным объектом

Для лагранжиана простейшей модели изгибных колебаний пластины, основанной на гипотезах Кирхгофа – Лява, имеем выражение [15]:

$$\lambda_j = \frac{1}{2} \left\{ \rho_j h_j {}^j u_t^2 - D_j ({}^j u_{xx} + {}^j u_{yy})^2 - 2D_j (1 - \nu_j) ({}^j u_{xy} - {}^j u_{xx} {}^j u_{yy}) \right\}. \quad (1)$$

Здесь ρ_j – плотность материала пластины, $D_j = E_j h_j^3 / [12(1 - \nu_j^2)]$ – цилиндрическая жесткость, E_j – модуль Юнга, h_j – толщина пластины, ν_j – коэффициент Пуассона, ${}^j u(x, y, t)$ – поперечное смещение пластины слева $j = 1$ и справа $j = 2$ от объекта. Индексами x , y и t обозначены частные производные функции, описывающей поперечное смещение, по пространственным координатам x , y и времени t .

Стержень совершает изгибные и крутильные колебания, плотность его функции Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 F_0 (u_t^0)^2 + \rho_0 I_0 (\varphi_t)^2 - E_0 I_x (u_{yy}^0)^2 - G_0 I_0 (\varphi_y)^2 - \kappa_0 (u^0)^2 \right\}, \quad (2)$$

где ρ_0 , F_0 – плотность материала и площадь поперечного сечения стержня; I_0 и I_x – полярный момент инерции и момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси x ; E_0 – модуль Юнга; G_0 и κ_0 – модуль сдвига и коэффициент, характеризующий жесткость «постели» [16]; $u^0(y, t)$, $\varphi(y, t)$ – поперечное смещение и угол поворота сечения стержня (нижними индексами у этих функций обозначены соответствующие частные производные).

Следует отметить, что на практике, как правило, важно учитывать диссипацию. Однако при постановке вариационной задачи это сопряжено с некоторыми трудностями. Поэтому, как это обычно делается, плотности внешних обобщенных сил q_j , носящих непотенциальный характер, будут добавлены к уравнениям и граничным условиям.

На основе формализма Лагранжа [13, 16] из (1) и (2) получим, что изгибные колебания пластины описываются решением уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_j h_j {}^j u_t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D_j ({}^j u_{xx} + \nu_j {}^j u_{yy}) + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} D_j (1 - \nu_j) {}^j u_{xy} + \\ + \frac{\partial^2}{\partial y^2} D_j ({}^j u_{yy} + \nu_j {}^j u_{xx}) = q_j, \end{aligned} \quad (3)$$

удовлетворяющим на границе $x = 0$ условиям непрерывности пластины и отсутствия у нее изломов:

$$u^0(y, t) = {}^1 u(0, y, t) = {}^2 u(0, y, t), \quad \varphi(y, t) = {}^1 u_x(0, y, t) = {}^2 u_x(0, y, t), \quad (4)$$

а также уравнениям баланса изгибающих моментов и поперечных сил:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 I_0 \varphi_t) - \frac{\partial}{\partial y}(G_0 I_0 \varphi_y) = M_2 - M_1 + q_3, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 F_0 u_t^0) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(E_0 I_x u_{yy}^0) + \kappa_0 u^0 + \delta u_t^0 = N_2 - N_1 + q_4, \quad (6)$$

$$M_j = D_j ({}^j u_{xx} + \nu_j {}^j u_{yy}),$$

$$N_j = \frac{\partial}{\partial x} D_j (-{}^j u_{xx} + {}^j u_{yy}) + (1 - \nu_j) {}^j u_{yy} + \frac{\partial}{\partial y} (-2D_j (1 - \nu_j) {}^j u_{xy})$$

(M и N – соответственно погонные изгибающие моменты и погонные поперечные силы, действующие на стержень со стороны пластины; δ – коэффициент вязких потерь). Заметим, что в пренебрежении коэффициентами κ_0 и δ_0 эти условия аналогичны граничным условиям, полученным в статьях [17, 18] из других соображений, для ребер жесткости на пластине.

На стержень действует сила

$$F_{pr} = \int_0^{b_0} (F_1 - F_2)|_{x=0} dy,$$

обусловленная давлением волн со стороны пластины. Линейная плотность силы давления волн определяется выражением [13, 16]:

$$F_j = \lambda_j + {}^j u_x N_j + {}^j u_{xx} M_j.$$

Добавляя краевые условия на границах $0 \leq y \leq b_0$, $-x_1 \leq x \leq x_1$ пластины и начальные условия, удовлетворяющие условиям согласования с граничными [13], получим полную постановку начально-краевой задачи.

В случаях, например, шарнирного опирания или свободной заделки условия на краях $y = 0$, $y = b_0$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
& {}^j u(x, 0, t) = {}^j u(x, b_0, t) = 0, \\
& {}^j u_{yy}(x, 0, t) + \nu_j {}^j u_{xx}(x, 0, t) = {}^j u_{yy}(x, b_0, t) + \nu_j {}^j u_{xx}(x, b_0, t) = 0
\end{aligned}
\tag{7}$$

или

$$\begin{aligned}
& {}^j u_y(x, 0, t) = {}^j u_y(x, b_0, t) = 0, \\
& {}^j u_{yyy}(x, 0, t) + (2 - \nu_j) {}^j u_{xxy}(x, 0, t) = {}^j u_{yyy}(x, b_0, t) + (2 - \nu_j) {}^j u_{xxy}(x, b_0, t) = 0.
\end{aligned}$$

2. Однократное взаимодействие двумерной изгибной волны с одномерной нагрузкой

Будем полагать, что внешние силы q_i отсутствуют, а параметры пластины и нагрузки постоянны. Произвольную падающую волну можно представить как суперпозицию волн вида

$$u_0(x, y, t) = A_0 \exp\{i(\omega_0 t - k_{0x}x - k_{0y}y)\}, \tag{8}$$

где $\omega_0 = \alpha_1(k_{0x}^2 + k_{0y}^2)$, $\alpha_1 = \sqrt{D_1/(\rho_1 h_1)}$, $k_{0y} = n\pi/b_0$ и n – целое число, и без ограничения общности рассмотреть взаимодействие одной такой волны с объектом.

В результате взаимодействия падающей волны (8) с объектом в двумерной системе возникают вторичные (отраженные и прошедшие) волны вида

$$u(x, y, t) = A \exp\{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{r})\}, \tag{9}$$

где амплитуда A , частота ω и компоненты волнового вектора $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ – комплексные постоянные величины, $\mathbf{r} = (x, y)$ – радиус-вектор. Кинематические характеристики ω , \mathbf{k} этих волн определяются из системы уравнений

$$\omega^2 - \alpha_j^2(k_x^2 + k_y^2) = 0, \quad \alpha_j^2 = D_j/(\rho_j h_j), \tag{10}$$

$$\omega = \omega_0, \tag{11}$$

$$k_y = k_{0y} = n\pi/b_0. \tag{12}$$

Первое из уравнений системы является дисперсионным соотношением, следующим из уравнения колебаний пластины Кирхгофа (3), второе определяет равенство фаз волн на границе $x = 0$. Кинематическое уравнение (12) получается из условий на краях пластины $y = 0$, $y = b_0$ в случаях (7).

Решая систему (10)–(12) с учетом ограниченности решений на бесконечном удалении от границы и условий излучения вторичных волн (вторичные волны должны отводить энергию от границы $x = 0$), находим волновые числа и частоты отраженной

$$k_{1x} = -k_{0x}, \quad \omega_1 = \alpha_1(k_{1x}^2 + k_{0y}^2),$$

прошедшей

$$k_{3x} = \sqrt{k_{0x}^2 - \omega_0(\alpha_2 - \alpha_1)/(\alpha_1\alpha_2)}, \quad \omega_3 = \alpha_2(k_{3x}^2 + k_{0y}^2)$$

волн и экспоненциально спадающих приграничных осцилляций

$$\begin{aligned}
& k_{2x} = i\sqrt{2\omega_0/\alpha_1 - k_{0x}^2}, \quad \omega_2 = -\alpha_1(k_{2x}^2 + k_{0y}^2) \text{ для } x \leq 0, \\
& k_{4x} = -i\sqrt{\omega_0(\alpha_2 + \alpha_1)/(\alpha_1\alpha_2) - k_{0x}^2}, \quad \omega_4 = -\alpha_2(k_{4x}^2 + k_{0y}^2) \text{ для } x \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, на основе решения задачи кинематики однократного взаимодействия гармонической волны с объектом поперечные смещения пластины представимы в виде

$${}^1u(x, y, t) = A_0 \exp i(\omega_0 t - k_{0x} x - k_{0y} y) + A_1 \exp i(\omega_1 t - k_{1x} x - k_{0y} y) + A_2 \exp i(\omega_2 t - k_{2x} x - k_{0y} y) \text{ в области } x \leq 0, \quad (13)$$

$${}^2u(x, y, t) = A_3 \exp i(\omega_3 t - k_{3x} x - k_{0y} y) + A_4 \exp i(\omega_4 t - k_{4x} x - k_{0y} y) \text{ в области } x \geq 0,$$

а объекта – в форме $u^0(y, t) = U_0 \exp i(\Omega t - k_{0y} y)$, $\varphi(y, t) = \varphi_0 \exp i(\Omega t - k_{0y} y)$ (где частота Ω также определяется из решения задачи кинематики, то есть $\Omega = \omega_0$). Поскольку $k_{0x} = \sqrt{\omega_0/\alpha_1 - (n\pi/b_0)^2}$, то видно, что для любой нормальной волны, кроме нулевой, существует критическая частота $\omega_{0\text{кр}} = \alpha_1(n\pi/b_0)^2$, ниже которой волна от источника не будет распространяться по пластине.

Для амплитуд (13) бегущих волн A_1, A_3 и осцилляций A_2, A_4 из условий непрерывности и уравнений баланса изгибающих моментов и поперечных сил (4)–(6) получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} A_3 + A_4 = A_1 + A_2 + A_0 = U_0, \\ k_{3x}A_3 + k_{4x}A_4 = k_{1x}A_1 + k_{2x}A_2 + k_{0x}A_0 = i\varphi_0, \\ \beta_3A_3 + \beta_4A_4 - \beta_1A_1 - \beta_2A_2 = \beta_0A_0, \\ \gamma_3A_3 + \gamma_4A_4 - \gamma_1A_1 - \gamma_2A_2 = \gamma_0A_0, \end{cases} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{3,4} &= D_2(k_{3,4x}^2 + \nu_2 k_{0y}^2) + ik_{3,4x}(\rho_0 I_0 \Omega^2 - G_0 I_0 k_{0y}^2), \quad \beta_m = D_1(k_{mx}^2 + \nu_1 k_{0y}^2), \\ \gamma_{3,4} &= iD_2(k_{3,4x}^3 + (2 - \nu_2)k_{3,4x}k_{0y}^2) + E_0 I_x k_{0y}^4 + \kappa_0 - \rho_0 F_0 \Omega^2 + i\delta\Omega, \\ \gamma_m &= iD_1(k_{mx}^3 + (2 - \nu_1)k_{mx}k_{0y}^2), \quad m = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает выражения для коэффициентов отражения R и прохождения T по амплитуде бегущих волн (два других коэффициента для неоднородных по амплитуде волн здесь не приводятся):

$$R = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad T = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta &= (\gamma_4 - \gamma_3)[(k_{4x} - k_{1x})(\beta_1 - \beta_2) - (k_{2x} - k_{1x})(\beta_1 - \beta_4)] - \\ &\quad - (\gamma_4 - \gamma_1)[(k_{4x} - k_{3x})(\beta_1 - \beta_2) - (k_{2x} - k_{1x})(\beta_3 - \beta_4)] - \\ &\quad - (\gamma_2 - \gamma_1)[(k_{4x} - k_{3x})(\beta_4 - \beta_1) - (k_{2x} - k_{1x})(\beta_3 - \beta_4)], \\ \Delta_1 &= (\gamma_4 - \gamma_3)[(k_{2x} - k_{0x})(\beta_0 - \beta_4) - (k_{4x} - k_{0x})(\beta_0 - \beta_2)] + \\ &\quad + (\gamma_4 - \gamma_0)[(k_{4x} - k_{3x})(\beta_0 - \beta_2) - (k_{2x} - k_{0x})(\beta_3 - \beta_4)] + \\ &\quad + (\gamma_2 - \gamma_0)[(k_{4x} - k_{3x})(\beta_4 - \beta_0) - (k_{0x} - k_{4x})(\beta_3 - \beta_4)], \\ \Delta_3 &= (\gamma_4 - \gamma_0)[(k_{1x} - k_{0x})(\beta_2 - \beta_1) - (k_{1x} - k_{2x})(\beta_0 - \beta_1)] + \end{aligned}$$

$$+ (\gamma_1 - \gamma_0)[(k_{4x} - k_{0x})(\beta_1 - \beta_2) - (k_{2x} - k_{1x})(\beta_0 - \beta_4)] + \\ + (\gamma_2 - \gamma_1)[(k_{4x} - k_{0x})(\beta_1 - \beta_0) - (k_{0x} - k_{1x})(\beta_0 - \beta_4)].$$

Заметим, что из полученных формул следуют результаты, представленные в статье [19], если пренебречь распределенным объектом. Если к тому же цилиндрическую жесткость правой пластины, в которую преломляется изгибная волна, принять бесконечной или равной нулю, то соответствующие коэффициенты отражения будут такими же, как в статье [20].

Анализ решений системы (14) показывает, что на границе $x = 0$ не возникает отраженной волны и осцилляции ($A_1 = A_2 = 0$), если выполняются условия

$$(D_2 v_2 - D_1 v_1)k_{0y}^2 + D_2 k_{0x} k_{3x} - D_1 k_{0x}^2 = 0, \\ D_2 (k_{3x} - k_{0x})\tilde{k}_{4x} + k_{0x}(\rho_0 I_0 \Omega^2 - G_0 I_0 k_{0y}^2) = 0, \\ D_2 (k_{0x} - k_{3x})k_{3x}\tilde{k}_{4x} + E_0 I_x k_{0y}^4 + \kappa_0 - \rho_0 F_0 \Omega^2 = 0, \quad (15)$$

$$(D_2(2 - v_2) - D_1(2 - v_1))k_{0x}k_{0y}^2 + D_2(k_{0x}k_{3x}^2 - k_{0x}\tilde{k}_{4x}^2 + k_{3x}\tilde{k}_{4x}^2) - D_1k_{0x}^3 + \delta\Omega = 0$$

(здесь $\tilde{k}_{4x} = ik_{4x}$).

О том, что волны оказывают давление на тела, препятствующие их свободному распространению, известно со времен Л. Эйлера (1746 г.). В XX веке для одномерных и двумерных упругих систем с движущимися нагрузками и закреплениями было получено выражение для силы давления волн через лагранжиан упругой системы [13, 16]. Приведенное выше выражение для плотности силы волнового давления F_j совпадает с выражением, полученным в [16], если остановить движущийся объект.

Для данной ситуации определим постоянную составляющую силы F_{pr} , обусловленную давлением волн, которую обозначим через $\langle F_{pr} \rangle$. На основе (13), (14) с учетом выполнения условий (15) из выражения для F_{pr} (после усреднения за время $2\pi/\Omega$) получим

$$\langle F_{pr} \rangle = \omega_0 b_0 \left(\sqrt{D_1 \rho_1 h_1 k_{0x}^2} - \sqrt{D_2 \rho_2 h_2} \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2\alpha_1} k_{3x}^2 \right) |A_0|^2.$$

3. Частные случаи

Пусть свойства пластины одинаковы слева и справа от объекта: $D_j = D$, $\rho_j = \rho$, $\alpha_j = \alpha$, $v_j = v$. Тогда:

а) если для простоты положить, что $\delta = 0$, а изгибная волна не вызывает поворота поперечного сечения, то из (15) следует, что падающая волна проходит через закрепление без отражения при совпадении ее частоты с собственной частотой колебаний объекта

$$\omega_0 = \Omega = \sqrt{(E_0 I_x k_{0y}^4 + \kappa_0) / (\rho_0 F_0)}.$$

Отметим, что при выполнении этих условий амплитуда A_4 неоднородной волны также минимальна ($A_4 = 0$) и сила давления волн будет равна нулю;

б) при учете поворота поперечного сечения стержня существуют две частоты «полного прохождения», что обусловлено сдвиговым и изгибным резонансами препятствия.

Падающая волна с частотой

$$\omega_0 = \Omega = \sqrt{\frac{F_0 G_0^2}{2E_0 I_x \rho_0} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4E_0 I_x \kappa_0 (F_0 G_0)^{-2}}\right)}$$

проходит через закрепление, совершающее изгибные и крутильные колебания, без отражения, если пластина имеет ширину

$$b_0 = n\pi \sqrt{\frac{G_0 F_0}{2\kappa_0} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4E_0 I_x \kappa_0 (G_0 F_0)^{-2}}\right)},$$

в частности, в пренебрежении коэффициентом упругости основания объекта, когда

$$\omega_0 = \sqrt{F_0 G_0^2 / (E_0 I_x \rho_0)} \text{ и } b_0 = n\pi \sqrt{E_0 I_x / (G_0 F_0)}.$$

Пусть, как и в первом случае, $\alpha_1 = \alpha_2$, но при этом $D_1 \neq D_2$, $\rho_1 \neq \rho_2$, $v_1 \neq v_2$. Учитывая только диссипативные свойства объекта $\delta \neq 0$, получим, что отраженная волна и приграничные осцилляции не возникают, если коэффициент диссипативных потерь

$$\delta = \frac{2}{\alpha_1} \sqrt{\frac{(D_1 - D_2)^2 (D_2 v_2 - D_1 v_1) \omega_0}{(D_1(1 - v_1) - D_2(1 - v_2)) \alpha_1}}.$$

Если пренебречь распределенным одномерным объектом, то из условий (15) видно, что в случае нормального падения ($k_{0y} = 0$) равенство нулю амплитуд A_1, A_2 возможно только при равенстве цилиндрических жесткостей D_1, D_2 обеих пластин и волновых чисел ($k_{0x} = k_{3x}$) падающей k_{0x} и прошедшей k_{3x} волн. Эти два условия сводятся к следующим условиям: $c_1 h_1 = c_2 h_2$, $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$ (где $c_j = \sqrt{E_j / (\rho_j - \rho_j v_j^2)}$ – скорость продольных волн в j -й ($j = 1, 2$) пластине), которые, как уже отмечалось выше, совпадают с формулами, впервые полученными в [19].

4. Виброизолирующий эффект одномерного объекта, расположенного на пластине

Определяя величину виброизоляции ВИ в децибелах [2, 18, 21–25], которая часто используется при практических расчетах, будем иметь:

$$\begin{aligned} \text{ВИ} = -20 \lg |T| &= 20 \lg \frac{D_2 \sqrt{\alpha_1} |a + ib|}{2D_1 \sqrt{\alpha_2} \sqrt{\omega_0 - 1} |c + id|}, \\ a &= D_{12}(w_+ w_- + f_+ f_-)(w_+ f_+ - w_- f_-) + 2(D_{12}^2 w_+ w_- + f_+ f_-) + \\ &+ 2(D_{12} w_+ w_- - f_+ f_-)(v_2 - D_{12} v_1) - D_{12} \bar{J}_0 \Theta_1 (D_{12} w_+^2 w_- + f_+^2 f_-) + \\ &+ D_{12} \Theta_2 (D_{12} w_- + f_-) + D_{12} \bar{\delta} \bar{\Omega} (D_{12} w_+ + f_+) - D_{12}^2 \bar{J}_0 \Theta_1 \bar{\delta} \bar{\Omega}, \\ b &= D_{12}(w_+ w_- + f_+ f_-)(w_+ f_- + w_- f_+) + (D_{12} w_+ w_- + f_+ f_-)^2 + (v_2 - D_{12} v_1)^2 - \\ &- D_{12} \bar{J}_0 \Theta_1 (D_{12} w_+ w_-^2 + f_+ f_-^2) - D_{12} \Theta_2 (D_{12} w_+ + f_+) + \\ &+ D_{12} \bar{\delta} \bar{\Omega} (D_{12} w_- + f_-) + D_{12}^2 \bar{J}_0 \Theta_1 \Theta_2, \\ c &= w_+ (-f_+^2 - D_{12} w_-^2 + v_2 - D_{12} v_1) - f_+ (f_-^2 + D_{12} w_+^2 + v_2 - \\ &- D_{12} v_1) + D_{12} \bar{J}_0 \Theta_1 w_+ f_+ + D_{12} \Theta_2, \\ d &= D_{12} \bar{\delta} \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

$$D_{12} = \frac{D_1}{D_2}, \quad w_{\pm} = \sqrt{\bar{\omega}_0 \pm 1}, \quad f_{\pm} = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \bar{\omega}_0 \pm 1},$$

$$\Theta_1 = \bar{m}_0 \bar{\Omega}^2 - \bar{\Omega}_1^2, \quad \Theta_2 = \bar{\Omega}_2^2 + \bar{\omega}_*^2 - \bar{m}_0 \bar{\Omega}^2,$$

где введены безразмерные переменные

$$\bar{\omega}_0 = \frac{\omega_0}{\alpha_1 k_{0y}^2}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\alpha_1 k_{0y}^2}, \quad \bar{\Omega}_1 = \sqrt{\frac{G_0 F_0}{D_1 k_{0y}}}, \quad \bar{\Omega}_2 = \sqrt{\frac{E_0 I_x k_{0y}}{D_1}},$$

$$\bar{m}_0 = \frac{\rho_0 F_0 \alpha_1^2 k_{0y}}{D_1}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta \alpha_1}{D_1 k_{0y}}, \quad \bar{J}_0 = \frac{I_0 k_{0y}^2}{F_0}, \quad \bar{\omega}_* = \sqrt{\frac{\kappa_0}{D_1 k_{0y}^3}}.$$

На рис. 2, 3 изображены зависимости ВИ от частоты падающей волны. Расчет проведен для стальной пластины толщиной 10 мм и шириной 500 мм при следующих параметрах стержня: $E_0 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $G_0 = 8 \cdot 10^{10}$ Па, $\bar{\delta} = 0,02$, $\rho_0 = 7800$ кг/м³, $\kappa_0 = 10^4$ кН/м². На этих рисунках обозначено: кривая 1 – для $\bar{\delta} = 0$, $\bar{\omega}_* = 0$; кривая 2 – для $\bar{\delta} = 0$, $\bar{\omega}_* \neq 0$; кривая 3 – для $\bar{\delta} \neq 0$, $\bar{\omega}_* = 0$; кривая 4 – для $\bar{\delta} \neq 0$, $\bar{\omega}_* \neq 0$.

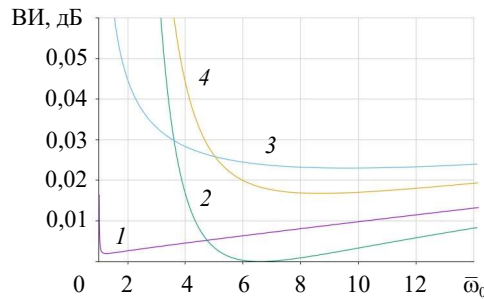


Рис. 2. Частотная зависимость ВИ при отсутствии поворота поперечного сечения стержня ($\bar{J}_0 = 0$)

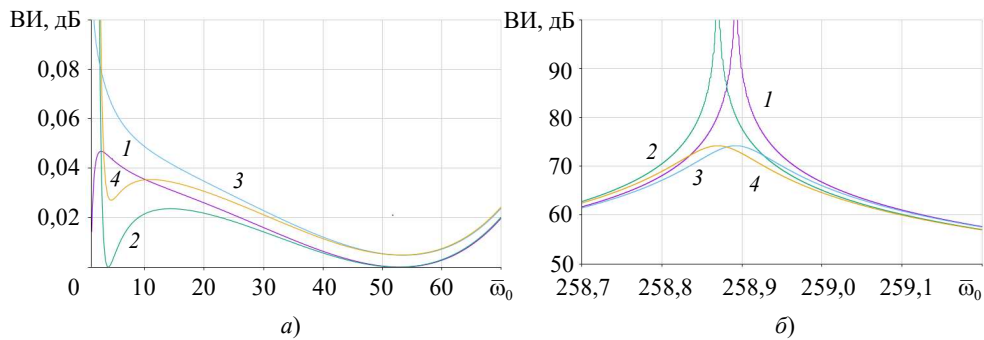


Рис. 3. Частотная зависимость ВИ при наличии поворота сечения стержня ($\bar{J}_0 \neq 0$) для низкочастотного (а) и высокочастотного (б) диапазонов

Учет поворота поперечного сечения стержня, как было уже отмечено ранее, приводит к существованию двух частот полного прохождения (см. рис. 3), значение которых увеличивается (см. рис. 2, 3) при учете коэффициента «постели» препятствия. Наличие диссипативных потерь в основании стержня приводит к отсутствию отраженной волны, но не исключает экспоненциально спадающих при удалении от

границы осцилляций, то есть в этом случае не наблюдается эффект «полного прохождения» (см. рис. 2, 3).

Из рис. 3 видно, что частота максимума виброизоляции располагается выше частот, при которых происходит полное прохождение волн через препятствие. Заметим, что для данной задачи отсутствует явление, когда препятствие полностью не пропускает волны, то есть амплитуды A_3 , A_4 однородной и неоднородной волн одновременно обращаются в ноль.

Заключение

Приведенные результаты наглядно показывают применимость полученных формул к решению задачи о виброизолирующих свойствах препятствия, выполненного в виде стержня на вязкоупругом основании, совершающего изгибные и крутильные колебания.

Список литературы

1. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. *Введение в акустическую динамику машин*. М.: Наука, 1979. 296 с.
2. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. М.: Наука, 1973. 344 с.
3. Zaluzniak V., Tso Y., Wood L.A. Waves transmission through plate and beam junctions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1999. Vol. 41. Iss. 7. P. 831–843. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00056-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00056-3).
4. Arruda J.R.F., Gautier F., Donadon L.V. Computing reflection and transmission coefficients for plate reinforcement beams. *Journal of Sound and Vibration*. 2007. Vol. 307. No 3–5. P. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.052>.
5. Локтев А.А., Локтев Д.А. Решение задачи ударного взаимодействия упругого тела и пластинки Уфлянда–Миндлина с помощью лучевого метода. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2010. № 2 (37). С. 94–102.
6. Приказчиков Д.А., Томашпольский В.Я. Вынужденные краевые колебания предварительно деформированных упругих тел со смешанными граничными условиями на лицевых поверхностях. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2011. №2 (41). С. 66–77.
7. Lee S., Vlahopoulos N. Vibratory power transmission through coupled composite plates with joint compliance and damping. *Journal of Vibration and Control*. 2015. Vol. 21. Iss 10. P. 1902–1913. DOI: 10.1177/1077546313503678.
8. Блинков Ю.А., Евдокимова Е.В., Могилевич Л.И., Ребрина А.Ю. Моделирование волновых процессов в двух оболочках с жидкостью между ними и окруженных упругой средой. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2018. №6 (81). С. 4–17. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-6-4-17.
9. Рудаков И.А. Задача о колебаниях двутавровой балки с закрепленным и шарнирно опертым концами. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2019. №3 (84). С. 4–21. DOI: 10.18698/1812-3368-2019-3-4-21.
10. Гридасова Е.А., Локтев Ал.А., Илларионова Л.А. Моделирование поведения сегмента рельсовой плети при динамическом воздействии. *Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2020. №4 (91). С. 24–41. DOI: 10.18698/1812-3368-2020-4-24-41.
11. Mace B.R. Wave reflection and transmission in beams. *Journal of Sound and Vibration*. 1984. Vol. 97. Iss. 2. P. 237–246. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90320-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90320-1).
12. Весницкий А.И., Милосердова И.В. Волновые методы борьбы с вибрациями. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1998. № 3. С. 16–25.

13. Весницкий А.И. *Избранные труды по механике*. Н. Новгород: Наш дом, 2010. 248 с.
14. Xu J., Chen Y., Tai Y., Shi G., Chen N., Yao J. New control strategy for suppressing the local vibration of sandwich beams based on the wave propagation method. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2022. Vol. 33. Iss. 1. P. 231–247. DOI: 10.1177/1045389X211018845.
15. *Вибрации в технике. Справочник*. В 6 т. Т. 1. *Колебания линейных систем*. Под ред. В.В. Болотина. М.: Машиностроение, 1999. 504 с.
16. Болдин В.П., Маланов С.Б., Уткин Г.А. Постановка краевых задач динамики двумерных систем с движущимися нагрузками и закреплениями. *Прикладная математика и механика*. 1992. Т. 56. Вып. 1. С. 34–39.
17. Ungar E.E. Transmission of plate flexural waves through reinforcing beams: dynamic stress concentrations. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1961. Vol. 33. Iss. 5. P. 633–639. DOI: 10.1121/1.1908748.
18. Ляпунов В.Т. Изоляция изгибных волн в пластинах с произвольным препятствием. *Акустический журнал*. 1968. Т. 14. Вып. 4. С. 572–576.
19. Тютюкин В.В. Отражение и преломление изгибных волн на границе раздела двух пластин. *Акустический журнал*. 1962. Т. 8. Вып. 2. С. 233–237.
20. Шевяхов Н.С. Об отрицательном смещении ограниченных пучков изгибных волн при отражении в тонких пластинах. *Акустический журнал*. 1997. Т. 43. №6. С. 843–848.
21. *Dictionary of Architecture and Construction*. Ed. C.M. Harris. New York: McGraw-Hill, 1975. 553 p.
22. *Shock and Vibration: Handbook*. Ed. C.M. Harris. New York: McGraw-Hill, 1988. 1384 p.
23. *Vibration and Shock: Handbook*. Ed. C.W. de Silva. Boca Raton–London–New York–Singapore: Taylor and Francis Group, 2005. 1872 p.
24. *Vibration: Fundamentals and Practice*. Ed. C.W. de Silva. Boca Raton–London–New York–Singapore: Taylor and Francis Group, 2007. 847 p.
25. Balachandran B., Magrab E.B. *Vibrations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2018. 723 p.

References

1. Artobolevskiy I.I., Bobrovnikskiy Yu.I., Genkin M.D. *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin* [Introduction to the Acoustic Dynamics of Machines]. Moscow. Nauka Publ. 1979. 296 p. (In Russian).
2. Brekhovskikh L.M. *Waves in Layered Media*. New York. London. Toronto. Sydney. San Francisco. Academic Press. 1980. 520 p.
3. Zaluzniak V., Tso Y., Wood L.A. Waves transmission through plate and beam junctions. *Int. J. Mech. Sci.* 1999. Vol. 41. Iss. 7. P. 831–843. [https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(98\)00056-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(98)00056-3).
4. Arruda J.R.F., Gautier F., Donadon L.V. Computing reflection and transmission coefficients for plate reinforcement beams. *J. Sound Vib.* 2007. Vol. 307. No 3–5. P. 564–577. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.06.052>.
5. Loktev A.A., Loktev D.A. Reshenie zadachi udarnogo vzaimodeystviya uprugogo tela i plastinki Uflyanda – Mindlina s pomoshchyu luchevogo metoda [Solution to problem of impact interaction between elastic body and Ufland-Mindlin plate using ray method]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Ser.: Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2010. No 2(37). P. 94–102 (In Russian).
6. Prikazchikov D.A., Tomashpolskiy V.Ya. Vynuzhdennyye kraevyye kolebaniya predvaritelno deformirovannykh uprugikh tel so smeshannymi granichnymi usloviyami na litsevykh poverkhnostyakh [Forced edge vibrations in pre-stressed elastic solids subject to mixed face boundary conditions]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Ser.: Estestvennyye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2011. No 2 (41). P. 66–77 (In Russian).
7. Lee S., Vlahopoulos N. Vibratory power transmission through coupled composite plates with joint compliance and damping. *J. Vib. Control*. 2015. Vol. 21. Iss 10. P. 1902–1913. DOI: 10.1177/1077546313503678.

8. Blinkov Yu.A., Evdokimova E.V., Mogilevich L.I., Rebrina A.Yu. Modelirovanie volnovykh protsessov v dvukh obolochkakh s zhidkostyu mezhdru nimi i okruzhennykh uprugoy sredoy [Simulating wave processes in two shells separated by liquid and surrounded by an elastic medium]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta im. N.E. Baumana. Ser.: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2018. No 6 (81). P. 4–17 (In Russian).
9. Rudakov I.A. Zadacha o kolebaniyakh dvutavrovoy balki s zakreplennym i sharnirno opertym kontsami [Oscillation problem for an I-beam with fixed and hinged end supports]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Ser.: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2019. No 3 (84). P. 4–21 (In Russian).
10. Gridasova E.A., Loktev A.I., Illarionova L.A. Modelirovanie povedeniya segmenta relsovoy pleti pri dinamicheskom vozdeystvii [Simulating the behaviour of a rail string segment under dynamic impact]. *Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni N.E. Baumana. Ser.: Estestvennye nauki* [Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences]. 2020. No 4 (91). P. 24–41 (In Russian).
11. Mace B.R. Wave reflection and transmission in beams. *J. Sound Vib.* 1984. Vol. 97. Iss. 2. P. 237–246. [https://doi.org/10.1016/0022-460X\(84\)90320-1](https://doi.org/10.1016/0022-460X(84)90320-1).
12. Vesnitskiy A.I., Miloserdova I.V. Volnovye metody borby s vibratsiyami [Wave methods of dealing with vibrations]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 1998. No 3. P. 16–25 (In Russian).
13. Vesnitskiy A.I. *Izbrannye trudy po mekhanike* [Selected Works on Mechanics]. Nizhny Novgorod. Nash dom Publ. 2010. 248 p. (In Russian).
14. Xu J., Chen Y., Tai Y., Shi G., Chen N., Yao J. New control strategy for suppressing the local vibration of sandwich beams based on the wave propagation method. *J. Intell. Mater. Syst. Struct.* 2022. Vol. 33. Iss. 1. P. 231–247. DOI: 10.1177/1045389X211018845.
15. *Vibratsii v tekhnike. Spravochnik* [Vibrations in Technology: Reference]. Book in 6 vol. Vol. 1. *Kolebaniya lineynykh sistem* [Fluctuations of Linear Systems]. Ed. V.V. Bolotin. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1999. 504 p. (In Russian).
16. Boldin V.P., Malanov S.B., Utkin G.A. Postanovka kraevykh zadach dinamiki dvumernykh sistem s dvizhushchimisya nagruzkami i zakreplenyami [Statement of boundary value problems of dynamics of two-dimensional systems with moving objects]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 1992. Vol. 56. Iss. 1. P. 34–39 (In Russian).
17. Ungar E.E. Transmission of plate flexural waves through reinforcing beams: dynamic stress concentrations. *J. Acoust. Soc. Am.* 1961. Vol. 33. Iss. 5. P. 633–639. DOI: 10.1121/1.1908748
18. Lyapunov V.T. Izolyatsiya izgibnykh voln v plastinakh s proizvolnym prepyatstviem [Isolation of flexural waves in plates with an arbitrary obstacle]. *Akusticheskii zhurnal* [Soviet Physics. Acoustics]. 1968. Vol. 14. Iss. 4. P. 572–576 (In Russian).
19. Tyutekin V.V. Otrazhenie i prelomlenie izgibnykh voln na granitse razdela dvukh plastin [Reflection and refraction of flexural waves at the interface between two plates]. *Akusticheskii zhurnal* [Soviet Physics. Acoustics]. 1962. Vol. 8. Iss. 2. P. 233–237 (In Russian).
20. Shevyakhov N.S. Ob otritsatel'nom smeshchenii ogranichennykh puchkov izgibnykh voln pri otrazhenii v tonkikh plastinakh [Negative displacement of bounded beams of bending waves reflected in thin plates]. *Akusticheskii zhurnal* [Soviet Physics. Acoustics]. 1997. Vol. 43. Iss. 6. P. 843–848 (In Russian).
21. *Dictionary of Architecture and Construction*. Ed. C.M. Harris. New York. McGraw-Hill. 1975. 553 p.
22. *Shock and Vibration: Handbook*. Ed. C.M. Harris. New York. McGraw-Hill. 1988. 1384 p.
23. *Vibration and Shock: Handbook*. Ed. C.W. de Silva. Boca Raton. London. New York. Singapore. Taylor and Francis Group. 2005. 1872 p.
24. *Vibration: Fundamentals and Practice*. Ed. C.W. de Silva. Boca Raton. London. New York. Singapore. Taylor and Francis Group. 2007. 847 p.
25. Balachandran B., Magrab E.B. *Vibrations*. Cambridge, UK. Cambridge University Press. 2018. 723 p.

**INTERACTION OF BENDING WAVES PROPAGATING
IN AN INHOMOGENEOUS PLATE WITH AN OBSTACLE,
WHICH IS A ROD RESTING ON A VISCOELASTIC FOUNDATION***

Erofeev V.I.¹, Lisenkova E.E.¹, Monich D.V.^{1,2}

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch
of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

erof.vi@yandex.ru

Received by the Editor 2022/06/21

A single interaction of a wave propagating in an inhomogeneous plate in the form of an infinite strip with a one-dimensional distributed mechanical object is considered. A distributed object is understood as a rod lying on a viscoelastic foundation that performs bending and torsional vibrations. It is considered that the plate has different parameters to the left and to the right of the rod. Physically and mathematically correct conditions at the interface between a plate and a rod are obtained as a consequence of the formulation of contact problems of the dynamics of two-dimensional elastic systems with one-dimensional loads, based on the variational principle of Hamilton – Ostrogradsky. The frequencies and wave numbers of the secondary (reflected and transmitted) waves, as well as the critical frequency, below which the wave does not propagate in the plate, are determined. Based on the solution of the kinematics problem from a system of linear algebraic equations obtained from the boundary conditions, the coefficients of reflection and transmission of bending waves are found. These coefficients resonantly depend on the frequency of the incident wave. Calculated graphs of the transmission coefficient versus the frequency of the incident wave are given for various parameters of the rod. The conditions for self-isolation and reflectionless passage of a wave through an obstacle are determined. It has been established that the frequency of the maximum vibration isolation is located above the frequencies at which the waves completely pass through the obstacle. An expression is obtained for the force due to the pressure of bending waves on a one-dimensional object. Its constant component is calculated, which vanishes (for a homogeneous plate) in the absence of waves reflected from the obstacle. It is shown that in degenerate cases the results obtained coincide with previous studies by other authors.

Keywords: plate, bending waves, reflection and transmission coefficients, vibration isolation.

* This work was supported by a government contract of Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences for fundamental research for 2021–2023, project No 0030-2021-0025 and work was supported by the RFBR, project No 20-08-00372.