

УДК 539.374

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-493-510

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРИЙ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

© 2022 г. **Бондарь В.С., Абашев Д.Р., Фомин Д.Ю.**

Московский политехнический университет, Москва, Российская Федерация

tm@mospolytech.ru

Поступила в редакцию 11.03.2022

Рассматриваются варианты теорий пластического течения при комбинированном упрочнении, широко применяемые в практических расчетах конструкций. Проводится сравнительный анализ вариантов теорий при сложном нагружении по плоским и пространственным траекториям деформаций, охватывающий широкий спектр траекторий от многозвенных ломаных до криволинейных траекторий переменной кривизны и кручения. Рассматриваются траектории от средней до большой кривизны и кручения. Анализ результатов исследований проводится в векторном пространстве А.А. Ильюшина. Исследуются плоские траектории деформаций в виде квадрата и криволинейной траектории переменной кривизны в виде астроиды, а также пространственная траектория деформаций переменной кривизны и кручения в виде винтовой линии. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментальных исследований по ответным траекториям напряжений, скалярным и векторным свойствам. Рассматриваются варианты теорий: модель изотропного упрочнения; модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова (линейное кинематическое упрочнение + изотропное упрочнение); модель, аналогичная модели Оно – Ванга; модель Армстронга – Фредерика – Кадашевича; модель Шабоша с тремя эволюционными уравнениями Армстронга – Фредерика – Кадашевича; модель Темиса, построенная на основе инвариантной теории пластичности; модель Бондаря с трехчленной структурой эволюционного уравнения для кинематического упрочнения. Приводятся материальные параметры (функции), замыкающие варианты теорий пластичности. Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем траекториям деформаций достигается при расчетах на основе моделей Шабоша и Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30% при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря. Следует отметить, что модель пластичности Бондаря замыкается тремя параметрами анизотропного упрочнения и одной функцией изотропного упрочнения, а модель Шабоша – шестью параметрами и одной функцией.

Ключевые слова: варианты теорий пластического течения, комбинированное упрочнение, сложное нагружение, плоские и пространственные траектории деформаций, траектории напряжений, скалярные и векторные свойства.

Введение

Развитие теории пластичности и разработка определяющих уравнений описания процессов сложного нагружения идет по следующим основным направлениям. К первому направлению относятся различные варианты теории упругопластических процессов [1–5], базирующиеся на общей математической теории пластичности А.А. Ильюшина [2]. Ко второму направлению относятся различные варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении [6–19], базирующиеся на концепции микронапряжений, выдвинутой В.В. Новожиловым [9]. К третьему направлению можно отнести класс многоуровневых моделей неупругости, применяемых в последнее десятилетие.

В практических расчетах конструкций широкое применение в настоящее время нашли варианты теории пластического течения при комбинированном упрочнении. Они имеют обобщение на неизотермические процессы нагружения, а также на процессы накопления повреждений, то есть позволяют определять ресурс.

Практически ни в одной публикации, предлагающей вариант теории, не приводится сравнение с уже имеющимися вариантами и не определяются преимущества того или иного варианта. В настоящей статье предлагается сравнительный анализ различных вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении, наиболее применяемых в программных комплексах расчета конструкций. Рассматриваются процессы сложного нагружения по плоским и пространственным траекториям деформаций, охватывающие широкий спектр траекторий от многозвенных ломаных до криволинейных траекторий переменной кривизны и кручения. Анализ результатов исследований проводится в векторном пространстве А.А. Ильюшина [2].

Рассматриваются варианты теории: модель изотропного упрочнения, модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова [6–8] (линейное кинематическое упрочнение + изотропное упрочнение); модель Оно – Ванга [17, 18]; модель Армстронга–Фредерика–Кадашевича [10]; модель Шабоша [13, 14] с тремя эволюционными уравнениями Армстронга – Фредерика – Кадашевича; модель Темиса [19], построенная на основе инвариантной теории пластичности [16]; модель Бондаря [15] с трехчленной структурой эволюционного уравнения для кинематического упрочнения.

В [11, 12] учениками Ю.Г. Коротких рассмотрена развитая модель Коротких и показана ее работоспособность для процессов сложного нагружения, поэтому эта модель в настоящей статье не рассматривается.

Получены и приводятся материальные параметры (функции), замыкающие каждый вариант теории пластичности. Исследования процессов сложного нагружения проводятся по плоским траекториям деформаций в виде квадрата и траектории переменной кривизны в виде астроида, а также по пространственной траектории деформаций переменной кривизны и кручения в виде винтовой линии. Результаты расчетов сопоставляются с результатами экспериментальных исследований [3, 4] Тверской научной школы под руководством В.Г. Зубчанинова и с результатами экспериментальных исследований под руководством Р.А. Васина [20]. Сопоставление результатов расчетов по различным вариантам теории и экспериментов проводится по ответным траекториям напряжений, скалярным и векторным свойствам.

1. Варианты теории пластичности

Рассматриваются конструкционные стали и сплавы, однородные и начально изотропные. В процессе упругопластического деформирования в материале может возникать только пластическая деформационная анизотропия. Исследуются случаи малых деформаций при температурах, когда нет фазовых превращений, и скоростях деформаций, когда динамическими и реологическими эффектами можно пренебречь.

Рассматриваются наиболее применяемые в практических расчетах варианты теории пластического течения при изотропном, кинематическом (анизотропном) и комбинированном (изотропном и кинематическом) упрочнениях. Здесь и далее компоненты тензоров записываются в базисе декартовой ортогональной лабораторной системы координат.

Для всех вариантов теорий тензор скоростей деформации $\dot{\varepsilon}_{ij}$ представляется в виде суммы тензоров скоростей упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (1)$$

Упругие деформации при изменении напряжений следуют обобщенному закону Гука:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = \frac{1}{E} [\dot{\sigma}_{ij} - \nu(3\dot{\sigma}_0\delta_{ij} - \dot{\sigma}_{ij})], \quad (2)$$

где E , ν – соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона; σ_{ij} – тензор напряжений; $\sigma_0 = \sigma_{ii}/3$ – среднее напряжение.

Для всех рассматриваемых вариантов теорий принимается поверхность нагружения, разделяющая области упругого и упругопластического состояний. Поверхность нагружения изотропно расширяется или сужается и смещается в процессе нагружения. Уравнение поверхности нагружения принимается в виде:

$$f(\sigma_{ij}) = \frac{3}{2}(s_{ij} - a_{ij})(s_{ij} - a_{ij}) - C_p^2 = 0. \quad (3)$$

Здесь $s_{ij}^* = s_{ij} - a_{ij}$ – девиатор активных напряжений [8]; s_{ij} – девиатор напряжений; a_{ij} – девиатор микронапряжений (добавочных напряжений, остаточных микронапряжений [9]), который характеризует смещение поверхности нагружения, то есть направленное (анизотропное) упрочнение. Скаляр $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$, зависящий от накопленной пластической деформации, отвечает размеру (радиусу) поверхности нагружения и характеризует изотропное упрочнение.

Для определения скоростей пластической деформации используется ассоциированный с (3) градиентальный закон течения

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_u^*} \dot{\varepsilon}_{u*}^p. \quad (4)$$

Здесь $\sigma_u^* = (3s_{ij}^*s_{ij}^*/2)^{1/2}$ – интенсивность активных напряжений; $\dot{\varepsilon}_{u*}^p = (2\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p/3)^{1/2}$ – скорость накопленной пластической деформации.

Для всех рассматриваемых вариантов теории изотропное упрочнение определяется зависимостью радиуса поверхности нагружения от накопленной пластической деформации (длины дуги траектории пластической деформации):

$$C_p = C_p(\varepsilon_{u*}^p). \quad (5)$$

Следует отметить, что для каждого варианта зависимость (5) определяется соответствующей варианту функцией.

Рассматриваемые варианты отличаются только эволюционными уравнениями для смещения центра поверхности нагружения. Ниже приводятся эволюционные уравнения для каждого варианта и соответствующие материальные функции конструкционных сталей 45, 9Х2 и 40Х16Н9Г2С, на образцах из которых проводились испытания на сложное нагружение. Материальные функции определяются на основе результатов экспериментальных исследований при одноосном растяжении, растяжении после предварительного сжатия (для получения этой кривой может быть использован принцип Мазинга), а также при одноосном растяжении-сжатии. Во всех указанных вариантах теории функции изотропного упрочнения задаются в табличном виде.

Модель изотропного упрочнения

Для модели изотропного упрочнения

$$a_{ij} = 0. \quad (6)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): E , ν , $C_p(\varepsilon_{i*}^p)$.

Материальная функция конструкционной стали 40Х16Н9Г2С приведена в таблице 1; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

Таблица 1

Функция изотропного упрочнения Ст. 40Х16Н9Г2С

ε_{i*}^p	0	0,00016	0,00061	0,0011	0,0021	0,0048	0,0071	0,01	0,1
C_p , МПа	62	144	204	228	256	295	335	350	800

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 2; $E = 2,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$.

Таблица 2

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{i*}^p	0	0,00025	0,00075	0,0015	0,002	0,0055	0,0079	0,01	0,1
C_p , МПа	209	240	270	300	310	370	395	440	940

Модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова [6–8]

$$a_{ij} = \frac{2}{3} g \varepsilon_{ij}^p. \quad (7)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): E , ν , g , $C_p(\varepsilon_{i*}^p)$.

Материальная функция конструкционной стали 40Х16Н9Г2С приведена в таблице 3; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g = 3350$ МПа.

Таблица 3

Функция изотропного упрочнения Ст. 40Х16Н9Г2С

ε_{i*}^p	0	0,00023	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	63	151	173	208	247	287	297	324	414

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 4; $E = 2,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g = 5000$ МПа.

Таблица 4

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{i*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	241	263	282	299	345	357	408	468

Материальная функция стали 45 приведена в таблице 5; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g = 6670$ МПа.

Таблица 5

Функция изотропного упрочнения Ст. 45

ε_{ij}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	324	341	365	374	405	416	425	432

Модель Оно – Ванга [17, 18]

Для модели Оно – Ванга

$$\dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}, \quad \dot{a}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad (8)$$

$$g^{(m)} = \begin{cases} \beta^{(m)} \sigma_a^{(m)}, \\ 0, \text{ если } a_u^{(m)} \geq \sigma_a^{(m)} \cap a_{ij}^{(m)} s_{ij}^* > 0, \end{cases} \quad a_u^{(m)} = \left(\frac{3}{2} a_{ij}^{(m)} a_{ij}^{(m)} \right)^{1/2}. \quad (9)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): E , ν , $\beta^{(1)}$, $\sigma_a^{(1)}$, ..., $\beta^{(M)}$, $\sigma_a^{(M)}$, C_p (ε_{ij}^p). В расчетах принимается $M = 10$.

Материальная функция конструкционной стали 40X16H9Г2С приведена в таблице 6;

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$\beta^{(1)} = 10000, \beta^{(2)} = 3400, \beta^{(3)} = 2000, \beta^{(4)} = 1400,$$

$$\beta^{(5)} = 1050, \beta^{(6)} = 700, \beta^{(7)} = 450, \beta^{(8)} = 2801, \beta^{(9)} = 161, \beta^{(10)} = 90,$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 7,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 9 \text{ МПа}, \sigma_a^{(5)} = 15 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(6)} = 26 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 33,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 29 \text{ МПа}, \sigma_a^{(9)} = 11,5 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 41 \text{ МПа}.$$

Таблица 6

Функция изотропного упрочнения Ст. 40X16H9Г2С

ε_{ij}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	62	125	131	137	124	147	157	224	534

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 7;

$$E = 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}, \quad \nu = 0,3,$$

$$\beta^{(1)} = 8870, \beta^{(2)} = 1811, \beta^{(3)} = 985, \beta^{(4)} = 666, \beta^{(5)} = 499,$$

$$\beta^{(6)} = 358, \beta^{(7)} = 240, \beta^{(8)} = 142, \beta^{(9)} = 114, \beta^{(10)} = 82,$$

$$\sigma_a^{(1)} = 1,2 \text{ МПа}, \sigma_a^{(2)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(3)} = 12 \text{ МПа}, \sigma_a^{(4)} = 15 \text{ МПа}, \sigma_a^{(5)} = 19 \text{ МПа},$$

$$\sigma_a^{(6)} = 28 \text{ МПа}, \sigma_a^{(7)} = 36 \text{ МПа}, \sigma_a^{(8)} = 24 \text{ МПа}, \sigma_a^{(9)} = 8 \text{ МПа}, \sigma_a^{(10)} = 87 \text{ МПа}.$$

Таблица 7

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{ij}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	229	233	232	211	187	188	255	1120

Модель Армстронга – Фредерика – Кадашевича [10]

Для этой модели

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a a_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (10)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): E , ν , g , g_a , C_p (ε_{ij}^p).

Материальная функция конструкционной стали 40X16H9Г2С приведена в таблице 8; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g = 38250$ МПа, $g_a = -300$.

Таблица 8

Функция изотропного упрочнения Ст. 40X16H9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	64	143	160	185	190	201	213	281	586

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 9; $E = 2,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g = 33750$ МПа, $g_a = -250$.

Таблица 9

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	235	239	252	253	261	305	356	1300

Модель Шабоща [13, 14]

Для модели Шабоща

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{(m)} = \frac{2}{3} g^{(m)} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + g_a^{(m)} a_{ij}^{(m)} \dot{\varepsilon}_{u*}^p, \quad \dot{a}_{ij} = \sum_{m=1}^M \dot{a}_{ij}^{(m)}. \quad (11)$$

Используется модель, состоящая из трех эволюционных уравнений, то есть $M = 3$. Замыкающие материальные параметры (функции): E , ν , $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g_a^{(1)}$, $g_a^{(2)}$, $g_a^{(3)}$, $C_p(\varepsilon_{u*}^p)$.

Материальная функция конструкционной стали 40X16H9Г2С приведена в таблице 10; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g^{(1)} = 16150$ МПа, $g_a^{(1)} = -147$, $g^{(2)} = 126300$ МПа, $g_a^{(2)} = -1570$, $g^{(3)} = 768650$ МПа, $g_a^{(3)} = -14730$.

Таблица 10

Функция изотропного упрочнения Ст. 40X16H9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	91	91,5	92	93	95	112	122	166	477

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 11; $E = 2,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g^{(1)} = 9200$ МПа, $g_a^{(1)} = -10$, $g^{(2)} = 63960$ МПа, $g_a^{(2)} = -1000$, $g^{(3)} = 14130$ МПа, $g_a^{(3)} = -100000$.

Таблица 11

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	209	228	227	237	240	259	285	266	301

Материальная функция стали 45 приведена в таблице 12; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $g^{(1)} = 7070$ МПа, $g^{(2)} = 5991$ МПа, $g^{(3)} = 160375$ МПа, $g_a^{(1)} = -0,37$, $g_a^{(2)} = -91$, $g_a^{(3)} = -2622$.

Таблица 12

Функция изотропного упрочнения Ст. 45

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	289	289	289	286	286	289	288	288

Модель Бондаря [15]

Для модели Бондаря

$$\dot{a}_{ij} = \frac{2}{3} g \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \left(\frac{2}{3} g_\varepsilon \varepsilon_{ij}^p + g_a a_{ij} \right) \dot{\varepsilon}_{u*}^p, \quad g = E_a + \beta \sigma_a, \quad g_\varepsilon = E_a \beta, \quad g_a = -\beta. \quad (12)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): $E, \nu, E_a, \sigma_a, \beta, C_p(\varepsilon_{u*}^p)$.

Материальная функция конструкционной стали 40X16H9Г2С приведена в таблице 13; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3, E_a = 3550$ МПа, $\sigma_a = 140$ МПа, $\beta = 445$.

Таблица 13

Функция изотропного упрочнения Ст. 40X16H9Г2С

ε_{u*}^p	0	0,0002	0,0004	0,0008	0,0025	0,008	0,01	0,024	0,086
C_p , МПа	64	137	150	166	153	151	159	190	274

Материальная функция конструкционной стали 9Х2 приведена в таблице 14; $E = 2,3 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3, E_a = 4770$ МПа, $\sigma_a = 160$ МПа, $\beta = 265$.

Таблица 14

Функция изотропного упрочнения Ст. 9Х2

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0013	0,0026	0,0055	0,0084	0,018	0,21
C_p , МПа	227	246	249	248	230	220	230	246	320

Материальная функция стали 45 приведена в таблице 15; $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3, E_a = 6770$ МПа, $\sigma_a = 140$ МПа, $\beta = 265$.

Таблица 15

Функция изотропного упрочнения Ст. 45

ε_{u*}^p	0	0,0003	0,0006	0,0026	0,0055	0,018	0,027	0,047	0,1
C_p , МПа	287	314	321	295	266	266	276	285	292

Модель Темиса [16, 19]

Для модели Темиса

$$a_{ij} = a_1(\varepsilon_{u*}^p)\varepsilon_{ij}^p + a_2(\varepsilon_{u*}^p)\xi_{ij}, \quad \dot{\xi}_{ij} = K(\sigma_u, \varepsilon_{u*}^p)\dot{\varepsilon}_{ij}^p. \quad (13)$$

Замыкающие материальные параметры (функции): $E, \nu, a_1(\varepsilon_{u*}^p), a_2(\varepsilon_{u*}^p), K(\sigma_u, \varepsilon_{u*}^p), C_p(\varepsilon_{u*}^p)$.

Материальные функции конструкционных сталей 40X16H9Г2С, 9Х2 и стали 45 приведены в [19, 21], расчеты по модели Темиса проводились А.Д. Худяковой [21].

Для проверки полученных материальных параметров (функций) сталей 9Х2, 45 и 40X16H9Г2С были проведены расчеты одноосного растяжения до деформации 0,1 для всех вариантов теории и сопоставлены с результатами экспериментов [4, 20]. Получено надежное соответствие расчетов и экспериментов.

2. Векторное представление напряжений и деформаций

Для удобства сопоставления расчетных и экспериментальных результатов рассматривается векторное представление процессов нагружения и деформирования [1]. Компоненты векторов напряжений \mathbf{S} и деформаций $\mathbf{\Xi}$ связаны с компонентами тензоров напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij} формулами [1]:

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3/2} s_{11} \\ \sqrt{2}(s_{22} + s_{11}/2) \\ \sqrt{2}s_{12} \\ \sqrt{2}s_{13} \\ \sqrt{2}s_{14} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0, \\ \sigma_0 &= 1/3\sigma_{ii}, \\ S &= \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{2/3}\sigma_u = \sigma; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathfrak{E} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{E}_1 \\ \mathfrak{E}_2 \\ \mathfrak{E}_3 \\ \mathfrak{E}_4 \\ \mathfrak{E}_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3/2} e_{11} \\ \sqrt{2} (e_{22} + e_{11}/2) \\ \sqrt{2} e_{12} \\ \sqrt{2} e_{13} \\ \sqrt{2} e_{14} \end{Bmatrix}, \quad \begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \varepsilon_0, \\ \varepsilon_0 &= 1/3 \varepsilon_{ii}, \\ \mathfrak{E} &= \sqrt{e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{3/2} \varepsilon_u. \end{aligned} \quad (15)$$

Длина дуги траектории деформаций определяется выражением

$$s = \int |\dot{\mathfrak{E}}| dt = \int (\dot{e}_{ij} \dot{e}_{ij})^{1/2} dt, \quad (16)$$

где $\dot{\mathfrak{E}}$ – вектор скоростей деформаций; \dot{e}_{ij} – девиатор скоростей деформаций. Векторные и скалярные свойства являются основными характеристиками, изучаемыми при экспериментально-теоретических исследованиях процессов упругопластического деформирования материалов при сложном нагружении. В качестве векторных свойств при сложном нагружении по плоским траекториям деформаций рассматривается отклонение вектора напряжений от касательной к траектории деформаций. Характеристика ориентации определяется углом сближения ϑ :

$$\vartheta = \arccos \frac{(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathfrak{E}})}{|\mathbf{S}| |\dot{\mathfrak{E}}|}. \quad (17)$$

В качестве скалярных свойств рассматривается изменение модуля вектора напряжений по длине дуги траектории деформаций

$$\sigma = \sigma(s). \quad (18)$$

3. Многозвенная ломаная траектория деформаций

Сравнение вариантов теории проводится на многозвенной ломаной траектории деформаций в виде квадрата (рис. 1) со стороной, равной 0,01, на плоскости $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_3)$ вектора деформаций \mathfrak{E} . Исследования проводятся на образцах из конструкционной стали 40X16H9Г2С. Осуществляются один и одна четвертая часть цикла нагружения по этой траектории. Экспериментальные результаты [4] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми.

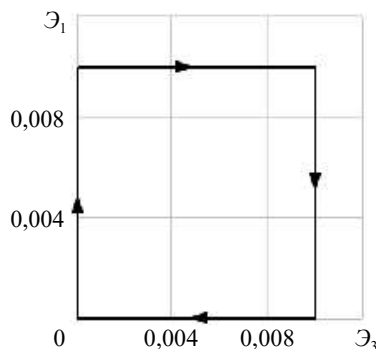


Рис. 1. Траектория деформаций

Ответные траектории напряжений показаны на рис. 2а, 3а, 4а. Скалярные и векторные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ и угла сближения ϑ по траектории деформаций – приведены на рис. 2б, 3б, 4б и 2в, 3в, 4в соответственно.

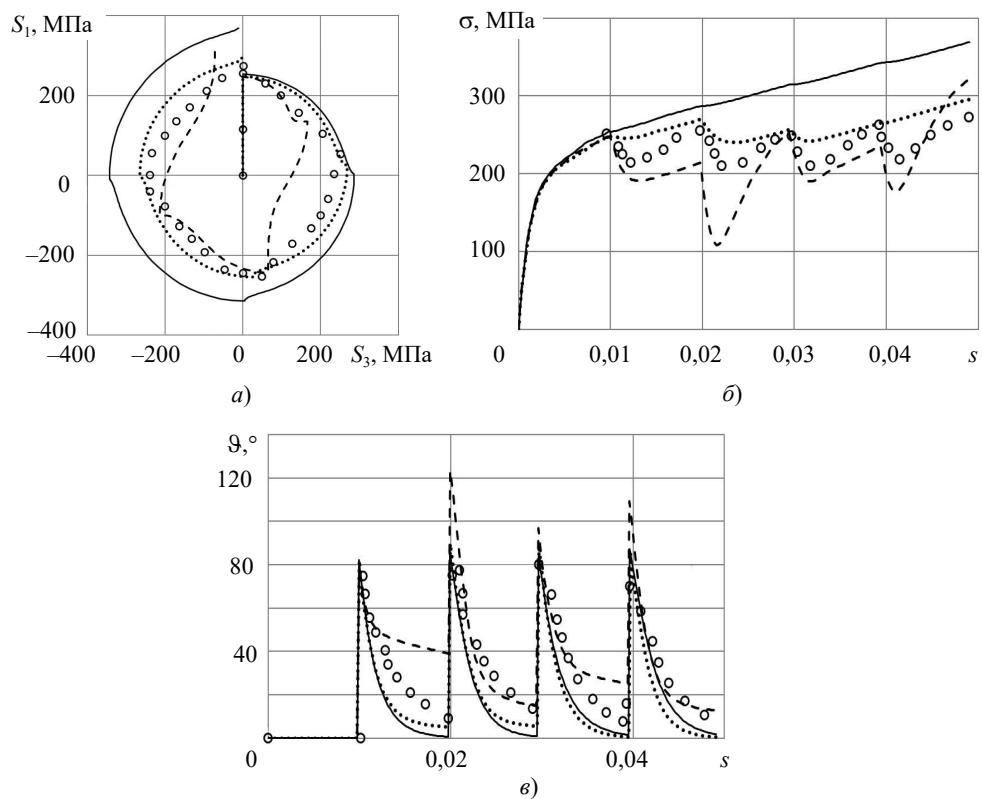


Рис. 2. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

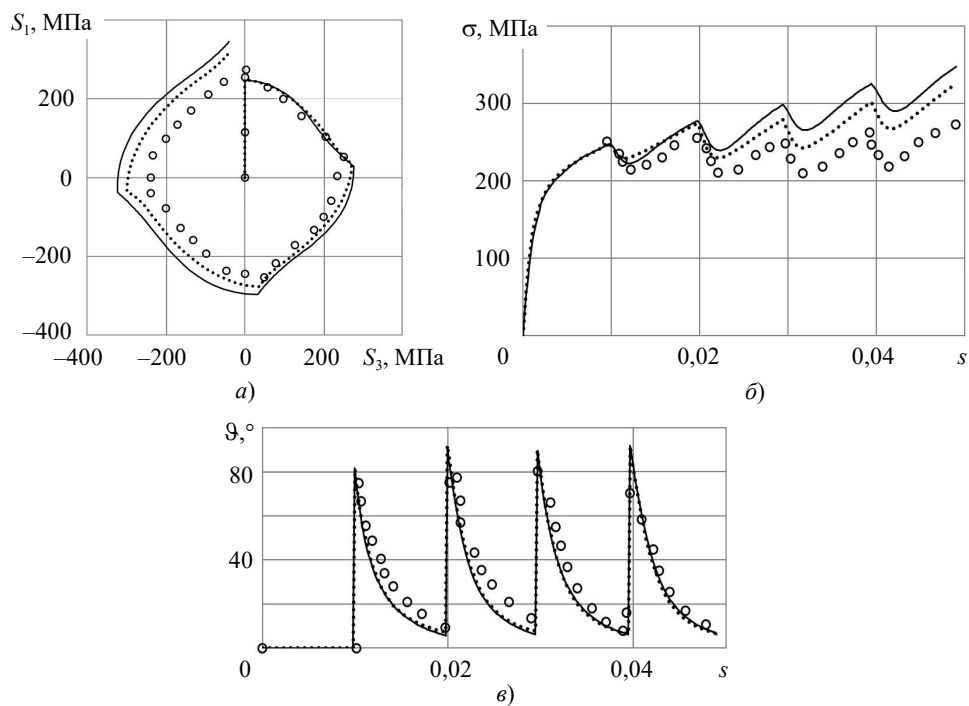


Рис. 3. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

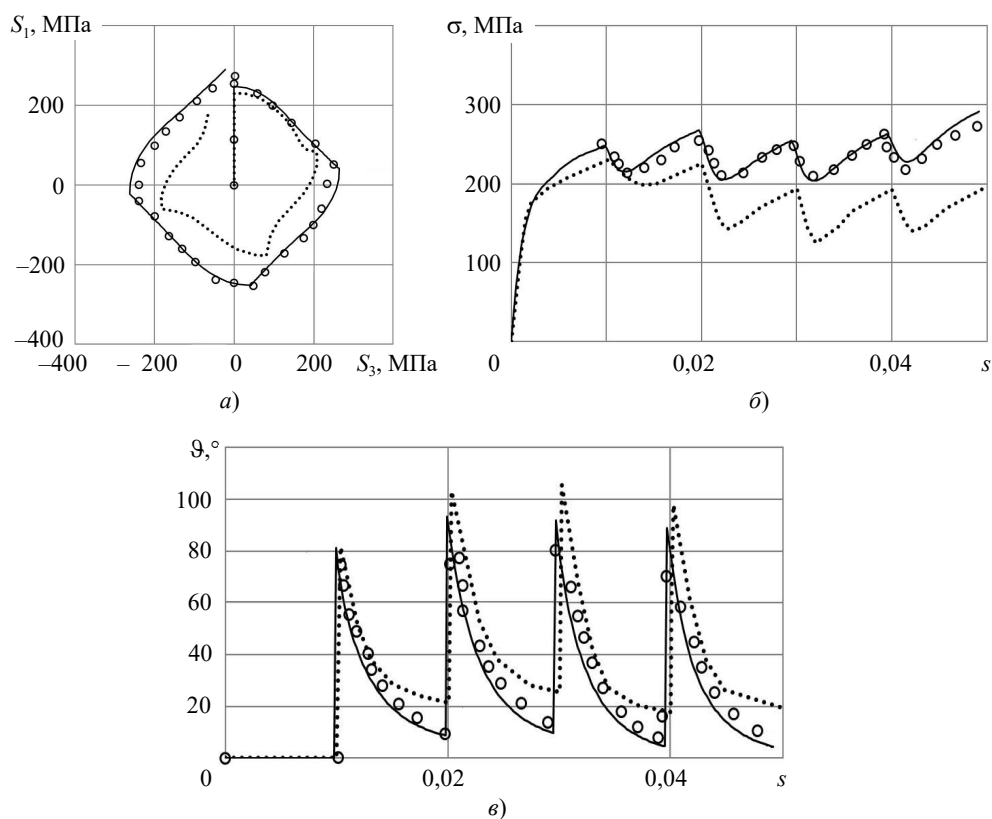


Рис. 4. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

На рис. 2а, б, в сплошная кривая – теория течения при изотропном упрочнении, точки – модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, пунктирная кривая – модель Оно – Ванга.

На рис. 3а, б, в сплошная кривая – модель Армстронга – Фредерика – Кадашевича, точки – модель Шабоша.

На рис. 4а, б, в сплошная кривая – модель Бондаря, точки – модель Темиса.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теории и эксперимента показывает:

- по ответной траектории напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно – Ванга и Темиса; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, Армстронга – Фредерика – Кадашевича и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно – Ванга и Темиса; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, Армстронга – Фредерика – Кадашевича и Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по векторным свойствам худшие результаты получены на основе модели Оно – Ванга; удовлетворительные – на основе моделей изотропного упрочнения, Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, Темиса; лучшее соответствие экспери-

менту достигается на основе моделей Армстронга–Фредерика–Кадашевича, Шабоша и Бондаря.

4. Криволинейная траектория деформаций переменной кривизны

Сравнение вариантов теорий проводится на траектории деформаций переменной кривизны в виде астроиды (рис. 5). Материал, на котором проводятся исследования, – конструкционная сталь 9Х2. Экспериментальные результаты [4] на всех рисунках показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штриховыми и пунктирными кривыми. Ответные траектории напряжений показаны на рис. 6а, 7а, 8а. Скалярные и векторные свойства приведены на рис. 6б, 7б, 8б и 6в, 7в, 8в соответственно.

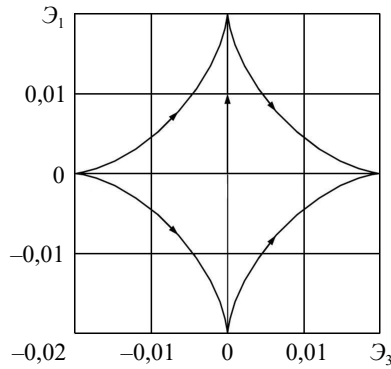


Рис. 5. Траектория деформаций

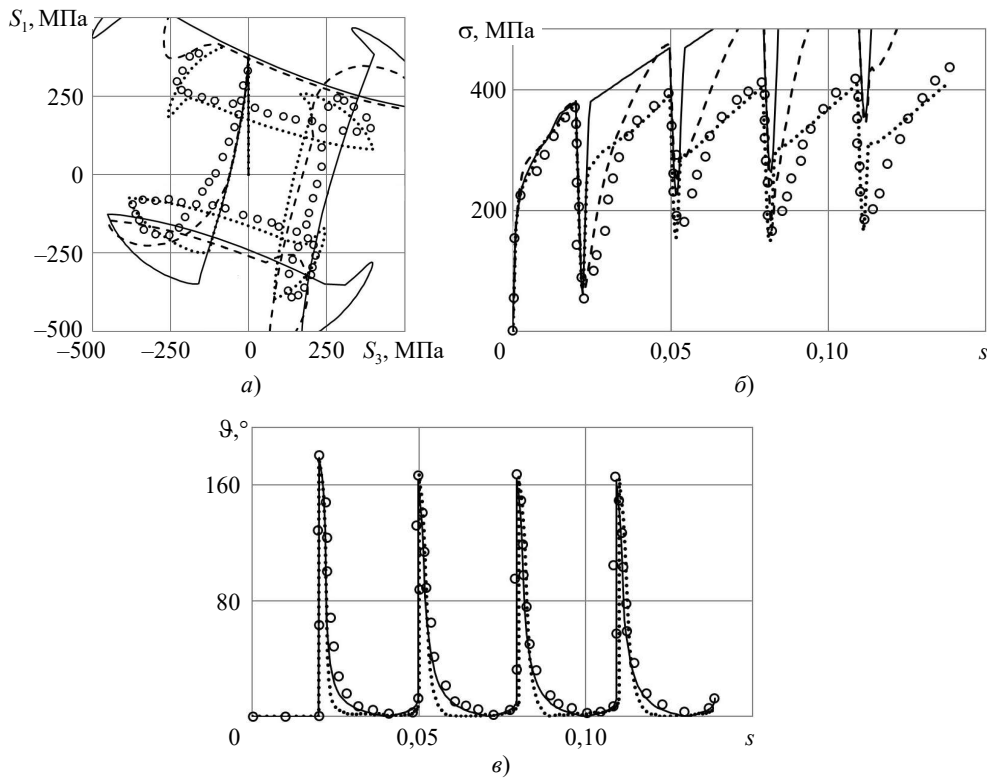


Рис. 6. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

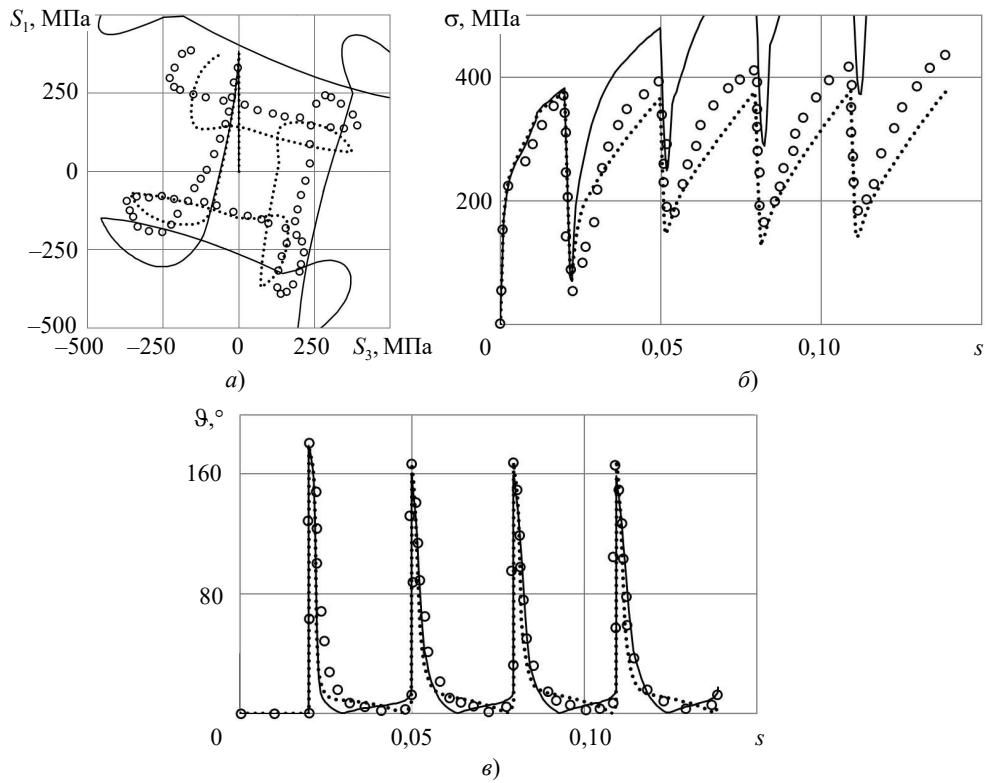


Рис. 7. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

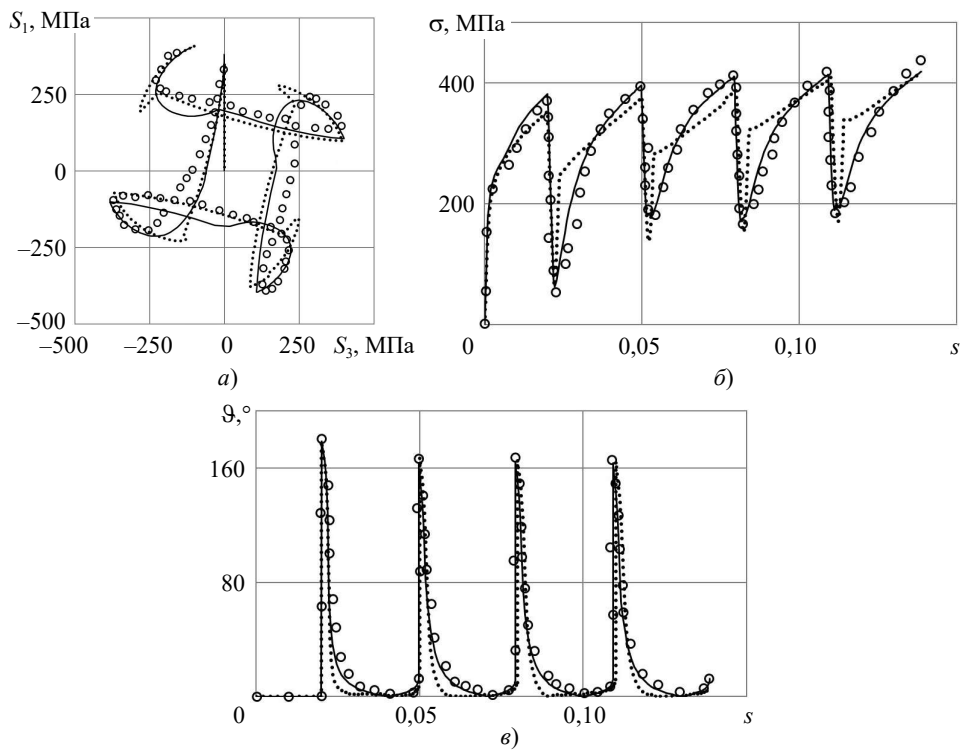


Рис. 8. Траектория напряжений (а), скалярные свойства (б), векторные свойства (в)

На рис. 6а, б, в сплошная кривая – теория течения при изотропном упрочнении, точки – модель Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, пунктирная кривая – модель Оно–Ванга.

На рис. 7а, б, в сплошная кривая – модель Армстронга–Фредерика–Кадашевича, точки – модель Шабоша.

На рис. 8а, б, в сплошная кривая – модель Бондаря, точки – модель Темиса.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теорий и эксперимента показывает:

- по ответным траекториями напряжений худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Армстронга–Фредерика–Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей изотропного упрочнения, Оно–Ванга, Армстронга–Фредерика–Кадашевича; удовлетворительные – на основе моделей Ишлинского–Прагера–Кадашевича–Новожилова, Шабоша, Темиса; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

- по векторным свойствам удовлетворительные результаты получены на основе всех вариантов теорий при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря.

5. Винтовая траектория деформаций переменной кривизны и кручения

Сравнительный анализ вариантов теорий проводится при сложном нагружении по пространственной траектории деформаций в виде винтовой линии с переменной кривизной и кручением. Экспериментальные исследования [20] проводятся на трубчатых образцах из стали 45. На рис. 9 показаны изменения кривизны χ и крутки τ вдоль траектории деформаций. Здесь кривизна меняется от 150 до 370, а крутка – от 50 до 100. Таким образом, рассматриваемую траекторию можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения. На всех рисунках экспериментальные результаты показаны светлыми кружками, а расчетные – сплошными, штрихпунктирными, штриховыми и пунктирными кривыми. Изменения компонент вектора напряжений S_1, S_2, S_3 вдоль траектории деформаций показаны соответственно на рис. 10а, 10б, 10в. Скалярные свойства – изменение модуля вектора напряжений σ вдоль траектории деформаций – приведены на рис. 11.

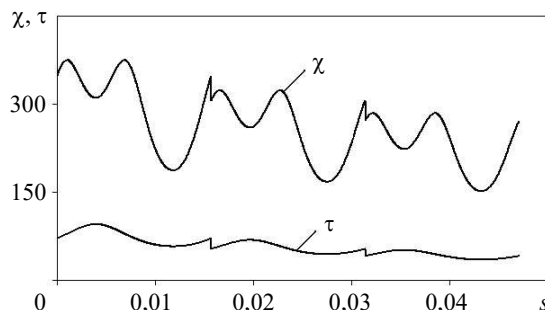


Рис. 9. Изменение кривизны и крутки вдоль траектории деформации

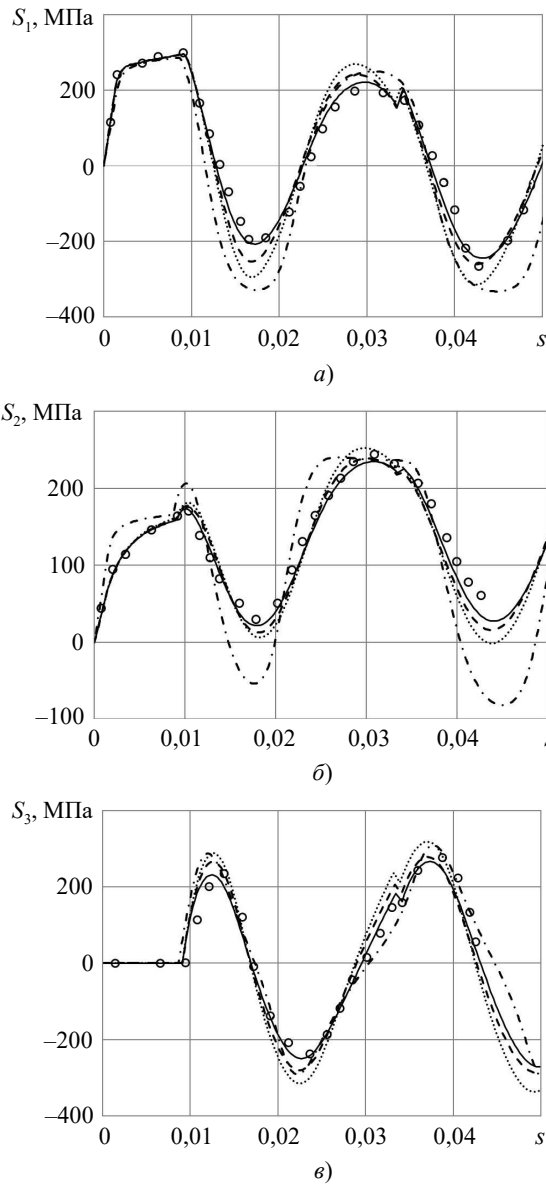


Рис. 10. Изменение компонент S_1 (а), S_2 (б), S_3 (в) вектора напряжений вдоль траектории деформаций

На рис. 10а, б, в и рис. 11 сплошная кривая – модель Бондаря, пунктирная кривая – модель Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова, штриховая кривая – модель Шабоша, штрихпунктирная кривая – модель Темиса.

Сравнительный анализ результатов расчетов по различным вариантам теорий и эксперимента [20] показывает:

- по компонентам вектора напряжений худшие результаты получены на основе моделей Темиса и Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова; удовлетворительный – на основе модели Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря;

– по скалярным свойствам худшие результаты получены на основе моделей Темиса и Ишлинского – Прагера – Кадашевича – Новожилова; удовлетворительный – на основе модели Шабоша; лучшее соответствие эксперименту достигается на основе модели Бондаря.

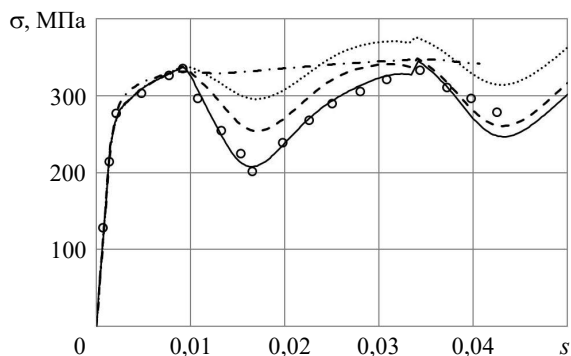


Рис. 11. Скалярные свойства

Заключение

Проведены сравнительные исследования различных вариантов теории пластического течения при комбинированном упрочнении, наиболее используемых в практических расчетах. Рассмотрены два основных класса плоских траекторий деформаций – многозвенная ломаная и криволинейная траектория переменной кривизны. Криволинейная траектория является траекторией деформаций большой и средней кривизны. Рассмотрена пространственная траектория деформаций в виде винтовой линии переменной кривизны и кручения (кривизна меняется от 150 до 370, а крутка – от 50 до 100), которую можно отнести к траектории большой кривизны и среднего кручения.

Удовлетворительное соответствие эксперименту по всем траекториям деформаций достигается при расчетах на основе моделей Шабоша и Бондаря – отличие результатов расчетов и экспериментов не превышает 30% при лучшем соответствии эксперименту модели Бондаря. Следует отметить, что модель пластичности Бондаря замыкается тремя параметрами анизотропного упрочнения (модель Шабоша замыкается шестью параметрами) и одной функцией изотропного упрочнения, которые достаточно просто определяются из стандартного эксперимента на одноосное растяжение и растяжение после предварительного сжатия (излом траектории на 180°). Если есть только кривая одноосного растяжения, то диаграмма растяжения после предварительного сжатия строится на основе принципа Мазинга. Модель пластичности Бондаря имеет обобщение на неизотермическое нагружение, многие особенности циклического непропорционального и пропорционального нагружений и описывает процессы накопления повреждений (ресурс).

Список литературы

1. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ, 1990. 310 с.
2. Васин Р.А. Определяющие соотношения теории пластичности. В кн. *Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела*. Т. 21. М.: ВИНТИ, 1990. С. 3–75.
3. Зубчанинов В.Г. *Математическая теория пластичности*. Тверь: ТГТУ, 2002. 300 с.

4. Зубчанинов В.Г., Охлопков Н.Л., Гаранников В.В. *Экспериментальная пластичность. Кн. 1. Процессы сложного деформирования*. Тверь: ТГТУ, 2003. 170 с.
5. Бондарь В.С., Даншин В.В., Семенов П.В. Прикладной вариант теории упругопластических процессов. *Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки*. 2011. Вып. 3. С. 46–56.
6. Ишлинский А.Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. *Укр. матем. журн.* 1954. Т. 6. Вып. 3. С. 314–324.
7. Prager W. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. *Proceeding of the Institution of the Mechanical Engineers*. 1955. Vol. 169. Iss. 1. P. 41–57. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1955_169_015_02.
8. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая эффект Баушингера. *Докл. АН СССР*. 1957. Т. 117. Вып. 4. С. 586–588.
9. Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. *Микронапряжения в конструкционных материалах*. Л.: Машиностроение, 1990. 224 с.
10. Frederick C.O., Armstrong P.J. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*. 2007. Vol. 24. No 1. P. 1–26. DOI: 10.3184/096034007X207589.
11. Волков И.А., Коротких Ю.Г. *Уравнения состояния вязкоупругопластических сред с повреждениями*. М.: Физматлит, 2008. 424 с.
12. Митенков Ф.М., Волков И.А., Игумнов Л.А. и др. *Прикладная теория пластичности*. М.: Физматлит, 2015. 284 с.
13. Бессон Ж., Каето Ж., Шабош Ж.-Л. и др. *Нелинейная механика материалов*. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. 397 с.
14. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*. 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1642–1692. DOI: 10.1016/j.ijplas.2008.03.009.
15. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the Theory*. New York: Begell House Publishers, 2013. 194 p.
16. Демьянушко И.В., Темис Ю.М. К построению теории пластического течения с анизотропным упрочнением для материалов, находящихся под воздействием физических полей. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1975. №5. С. 111–119.
17. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions. *International Journal of Plasticity*. 1991. Vol. 7. Iss. 8. P. 879–891. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(91\)90023-R](https://doi.org/10.1016/0749-6419(91)90023-R).
18. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery. Part 1: Formulations and basic features for ratcheting behavior. *International Journal of Plasticity*. 1993. Vol. 9. Iss. 3. P. 375–390. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90042-O](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90042-O).
19. Темис Ю.М., Худякова А.Д. Модель неизотермического упругопластического деформирования конструкционных материалов при сложном нагружении. *Математическое моделирование и численные методы*. 2017. Вып. 15. С. 20–37. <https://doi.org/10.18698/2309-3684-2017-3-2035>.
20. Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В. и др. *Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций*. М., 1986. 66 с. Деп. в ВИНТИ 16.10.86, №7298-В86.
21. Худякова А.Д. Моделирование процессов циклического упругопластического неизотермического деформирования конструкционных сплавов: *Дис. ... канд. физ.-мат. наук*: 01.02.04. Москва, 2020. 184 с.

References

1. Ilyushin A.A. *Mekhanika sploshnoy sredy [Continuum Mechanics]*. Moscow. Publishing house of Moscow State University. 1990. 310 p. (In Russian).
2. Vasin R.A. *Opredelyayushchie sootnosheniya teorii plastichnosti [Defining relations of the theory of plasticity]*. V kn. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela*

[*Results of Science and Technology. Deformable Solid Mechanics Series*]. Vol. 21. Moscow. VINITI Publ. 1990. P. 3–75 (In Russian).

3. Zubchaninov V.G. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti* [Mathematical Theory of Plasticity]. Tver. Tverskoy gosudarstvennyy tekhnicheskyy universitet Publ. 2002. 300 p. (In Russian).

4. Zubchaninov V.G., Okhlopov N.L., Garannikov V.V. *Eksperimentalnaya plastichnost. Kniga 1. Protsessy slozhnogo deformirovaniya* [Experimental Plasticity. Book 1. Processes of Complex Deformation]. Tver. Tverskoy gosudarstvennyy tekhnicheskyy universitet Publ. 2003. 170 p. (In Russian).

5. Bondar V.S., Danshin V.V., Semenov P.V. *Prikladnoy variant teorii uprugoplasticheskikh protsessov* [Applied version of the theory of elastoplastic processes]. *Izvestiya Tulskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki* [Izvestiya Tula State University]. 2011. Iss. 3. P. 46–56 (In Russian).

6. Ishlinskii A. Yu. *Obshchaya teoriya plastichnosti s lineynym uprochneniem* [General theory of plasticity with linear hardening]. *Ukrainskiy matematicheskyy zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal]. 1954. Vol. 6. Iss. 3. P. 314–324 (In Russian).

7. Prager W. The theory of plasticity: A survey of recent achievements. *Proceeding of the Institution of the Mechanical Engineers*. 1955. Vol. 169. Iss. 1. P. 41–57. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1955_169_015_02.

8. Kadashevich Yu. I., Novozhilov V.V. *Teoriya plastichnosti, uchityvayushchaya effekt Bausshingera* [The theory of plasticity with the Bauschinger effect taken into account]. *Doklady AN SSSR* [Doklady Physics]. 1957. Vol. 117. Iss. 4. P. 586–588 (In Russian).

9. Kadashevich Yu.I., Novozhilov V.V. *Mikronapryazheniya v konstruktsionnykh materialakh* [Microstresses in Structural Materials]. Leningrad. Mashinostroenie Publ. 1990. 224 p. (In Russian).

10. Frederick C.O., Armstrong P.J. A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect. *Materials at High Temperatures*. 2007. Vol. 24. No 1. P. 1–26. DOI: 10.3184/096034007X207589.

11. Volkov I.A., Korotkikh Yu.G. *Uravneniya sostoyaniya vyzkouprugoplasticheskikh sred s povrezhdeniyami* [Equations of State of Viscoelastic Plastic Media with Damage]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 424 p. (In Russian).

12. Mitenkov F.M., Volkov I.A., Igumnov L.A. et al. *Prikladnaya teoriya plastichnosti* [Applied Theory of Plasticity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2015. 284 p. (In Russian).

13. Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.-L. et al. *Non-Linear Mechanics of Materials*. Dordrecht, Netherlands. Springer. 2010. 433 p.

14. Chaboche J.-L. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *Int. J. Plast.* 2008. Vol. 24. Iss. 10. P. 1642–1692. DOI: 10.1016/J.IJPLAS.2008.03.009.

15. Bondar V.S. *Inelasticity. Variants of the Theory*. New York. Begell House Publishers. 2013. 194 p.

16. Demyanushko I.V., Temis Yu.M. *K postroeniyu teorii plasticheskogo techeniya s anizotropnym uprochneniem dlya materialov, nakhodyashchikhsya pod vozdeystviem fizicheskikh poley* [On the construction of a theory of plastic flow with anisotropic hardening for materials under the influence of physical fields]. *Izvestiya AN SSSR. MTT* [Doklady Physics]. 1975. No 5. P. 111–119 (In Russian).

17. Ohno N., Wang J.D. Transformation of a nonlinear kinematics hardening rule to a multi-surface form under isothermal and nonisothermal conditions. *Int. J. Plast.* 1991. Vol. 7. Iss. 8. P. 879–891. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(91\)90023-R](https://doi.org/10.1016/0749-6419(91)90023-R).

18. Ohno N., Wang J.-D. Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery. Part 1: Formulations and basic features for ratcheting behavior. *Int. J. Plast.* 1993. Vol. 9. Iss. 3. P. 375–390. [https://doi.org/10.1016/0749-6419\(93\)90042-O](https://doi.org/10.1016/0749-6419(93)90042-O).

19. Temis Yu.M., Khudiakova A.D. *Model neizotermicheskogo uprugoplasticheskogo deformirovaniya konstruktsionnykh materialov pri slozhnom nagruzhении* [Model of non-isothermal elastoplastic deformation of structural materials under complex loading]. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody* [Mathematical Modeling and Computational Methods]. 2017. Iss. 15. P. 20–37 (In Russian).

20. Vavakin A.S., Vasin R.A., Viktorov V.V. et al. *Eksperimentalnoe issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya stali pri slozhnom nagruzhении po krivolinyem prostranstvennym*

traektoriyam deformatsiy [Experimental Study of Elastoplastic Deformation of Steel under Complex Loading along Curvilinear Spatial Strain Trajectories]. Moscow. 1986. 66 p. Deposited in VINITI 1986/10/16, №7298-V86 (In Russian).

21. Khudyakova A.D. Modelirovanie protsessov tsiklicheskogo uprugoplasticheskogo neizotermicheskogo deformirovaniya konstruktsionnykh splavov [Modeling of processes of cyclic elastoplastic nonisothermal deformation of structural alloys]. *Dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Cand. Sci. (Engineering). Dissertation]: 01.02.04. Moscow. 2020. 184 p. (In Russian).

COMPARATIVE ANALYSIS OF PLASTICITY THEORIES UNDER COMPLEX LOADING

Bondar V.S., Abashev D.R., Fomin D.Yu.

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

tm@mospolytech.ru

Received by the Editor 2022/03/11

Variants of theories of plastic flow under combined hardening, widely used in practical calculations of structures, are considered. A comparative analysis of the variants of theories under complex loading along plane and spatial deformation trajectories is carried out, covering a wide range of trajectories from multi-link polylines to curved trajectories of variable curvature and torsion. Trajectories from medium to large curvature and torsion are considered. The analysis of the research results is carried out in the vector space of A.A. Ilyushin. The plane trajectories of deformations in the form of a square and a curved trajectory of variable curvature in the form of an astroid are considered, as well as the spatial trajectory of deformations of variable curvature and torsion in the form of a helix. The results of calculations are compared with the results of experimental studies on stress response trajectories, scalar and vector properties. Variants of the theories are considered: the isotropic hardening model; the Ishlinski–Prager–Kadashevich–Novozhilov model (linear kinematic hardening + isotropic hardening); a model similar to the Ono–Wang model; the Armstrong–Frederick–Kadashevich model; the Shabosh model with three Armstrong–Frederick–Kadashevich evolutionary equations; the Temis model based on the invariant theory of plasticity; the Cooper model with a three-membered structure the evolutionary equation for kinematic hardening. The material parameters (functions), the closing versions of the theories of plasticity are given. Satisfactory compliance with the experiment for all deformation trajectories is achieved by calculations based on the Shabosh and the Bondar models – the difference between the results of calculations and experiments does not exceed 30% with the best correspondence to the experiment of the Bondar model. It should be noted that the Bondar plasticity model is closed by three parameters of anisotropic hardening and one function of isotropic hardening, and the Shabosh model is closed by six parameters and one function.

Keywords: variants of plastic flow theories, combined hardening, complex loading, plane and spatial deformation trajectories, stress trajectories, scalar and vector properties.