

УДК 539.3:534-16

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-480-492

ТРЕХМЕРНАЯ ГРАДИЕНТНАЯ МОДЕЛЬ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ГЕОСРЕДЫ*

© 2022 г.

Павлов И.С.^{1,2}, Муравьева А.В.²

¹*Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального исследовательского центра «Институт прикладной физики РАН», Нижний Новгород, Российская Федерация*

²*Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

ispavlov@mail.ru

Поступила в редакцию 27.07.2022

Предложена структурная модель геосреды (грунта) в виде простой кубической решетки из сферических частиц (блоков), обладающих тремя трансляционными и тремя ротационными степенями свободы. Силовые и моментные взаимодействия между частицами моделируются упругими пружинами пяти типов. Методом структурного моделирования построена длинноволновая континуальная математическая модель грунта. Найдена аналитическая взаимосвязь между его макроконстантами и параметрами микроструктуры. Показано, что полученная модель отличается от модели редуцированной среды Коссера, часто используемой для описания сыпучих сред. В низкочастотном приближении ее можно свести к уравнениям моментной (градиентной) теории упругости, которые аналогичны уравнениям континуума Коссера со стесненным вращением частиц. Эти уравнения содержат как слагаемые со смешанными производными по времени и координате, учитывающие инерционность поворота частиц среды и приводящие к дисперсии волн, так и слагаемые, пропорциональные производным четвертого порядка по координатам, описывающие вклад в потенциальную энергию напряжений, обусловленных изгибом среды.

В рамках градиентной модели найдены выражения для классических и моментных напряжений в рассматриваемой геосреде. Заданы граничные условия, состоящие в отсутствии нормальных и касательных напряжений на верхней площадке полубесконечной среды. Выявлено условие на параметры микроструктуры, при котором моментными напряжениями можно пренебречь.

Предложенную градиентную модель с заданными граничными условиями можно применить для исследования процессов в полубесконечной геосреде распространения и взаимодействия упругих волн, генерируемых высокоскоростным движением железнодорожных составов, а также для выявления и изучения потенциально опасных эффектов, вызванных таким движением.

Ключевые слова: полубесконечная геосреда, структурное моделирование, градиентная модель, классические и моментные напряжения, граничные условия.

* Выполнено при поддержке грантом РФФ № 20-19-00613.

Введение

В настоящее время в России, Китае, Японии и странах Западной Европы интенсивно развивается высокоскоростной железнодорожный транспорт. Скорость движения поездов приблизилась к скорости распространения волн в железнодорожном пути и контактной подвеске, а в некоторых случаях и превысила ее. Например, скорость поездов, функционирующих в настоящее время во Франции и Японии, колеблется от 200 до 275 км/ч. Рекордные скорости поездов, достигнутые во Франции, Японии и Китае, уже превосходят 500 км/ч, в то время как поверхностные волны (волны Рэлея) в грунте, окружающем железнодорожный путь, распространяются со скоростями 400–600 км/ч в жестком грунте и со скоростями 150–400 км/ч в мягком (торфяном или песчаном) и водонасыщенном грунтах, а скорость изгибных волн в контактном проводе составляет 200–400 км/ч [1].

Таким образом, скорость источников возмущений стала сравнима со скоростью распространения волн. В некоторых частях Европы, где железнодорожные пути проложены по мягким (торфяным) грунтам, излучаемые поездом поверхностные волны видны невооруженным глазом. Измерения, проведенные железнодорожными компаниями в Германии, Швейцарии, Англии и Франции, подтверждают нарастание вибраций железнодорожного пути при скоростях движения поезда, близких к скорости поверхностных волн. Кроме того, движение высокоскоростных поездов вызывает вибрацию грунта, что является серьезной проблемой для окружающей среды, так как вибрация передается через грунт в близрасположенные дома и может оказывать заметное негативное воздействие на конструкции зданий и здоровье жителей [2, 3].

Для решения проблем, связанных с вибрацией железнодорожного полотна и грунта, на «мягких» участках пути были введены ограничения скорости движения или грунт был искусственно сделан жестче. Таким образом, инженеры-железнодорожники тем или иным способом пытаются снизить скорость поезда по сравнению со скоростью поверхностных волн в пути. Однако желание двигаться быстрее остается. В этой ситуации важно изучить все потенциально опасные эффекты, связанные с высокой скоростью поезда. Одним из таких эффектов является неустойчивость колебаний поезда, которая может возникнуть вследствие генерации поездом упругих волн в рельсовом пути.

Для теоретического исследования влияния особенностей распространения упругих волн в грунте необходимы математические модели, учитывающие структуру грунта. Привычные модели классической механики сплошных сред здесь не применимы, так как они исходят из представления, что среда есть континуум материальных точек, в то время как в последние десятилетия была обоснована гипотеза блокового строения геологической и геофизической сред – геосреды – и каноничности ее дискретных свойств [4, 5]. Каждый блок способен совершать не только трансляционные перемещения, но и поворачиваться вокруг своего центра масс, что приводит к возникновению в среде «микровращений» и, соответственно, ротационных волн [5, 6]. Кроме того, если в среде существенными являются градиенты напряжения, то наблюдается значительное расхождение между теорией и экспериментом [7]. В частности, это касается задач о распространении волн и при вынужденных высокочастотных колебаниях, поскольку при высокочастотных колебаниях и достаточно малых длинах волн неизбежно сказывается влияние микроструктуры материала. Таким образом, возникает задача разработки математических моделей сред с микроструктурой (в данном случае – грунтов), учитывающих дискретность

среды, состоящей из неточечных частиц – блоков, обладающих определенными размерами и способных совершать как трансляционные, так и ротационные перемещения.

На роль таких моделей подходят обобщенные микрополярные теории типа континуума Коссера [8, 9]. Однако у них есть недостаток – в эти теории входит большое количество материальных констант, требующих экспериментального определения и связь которых со структурой среды не ясна. Такого недостатка лишено структурное моделирование, в рамках которого разработка модели начинается с выделения в массиве материала, представленного регулярной или квазирегулярной решеткой из частиц конечных размеров, некоторого минимального объема – структурной ячейки (аналог ячейки периодичности в кристаллическом материале), способной отображать основные черты макроскопического поведения этого материала [10, 11]. Именно такой подход к моделированию грунта и применяется в настоящей статье.

1. Дискретная модель грунта

Рассмотрим простую кубическую решетку из жестких сферических частиц (блоков или зерен), обладающих массой M и диаметром d (рис. 1). В исходном состоянии они сосредоточены в узлах решетки с периодом a . Каждая частица имеет шесть степеней свободы: центр масс частицы с номером $N(i, j, k)$ может смещаться вдоль осей x , y и z (трансляционные степени свободы $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$ и $w_{i,j,k}$), а сама частица может поворачиваться вокруг каждой из этих осей (ротационные степени свободы $\theta_{i,j,k}$, $\psi_{i,j,k}$ и $\phi_{i,j,k}$) (рис. 2).

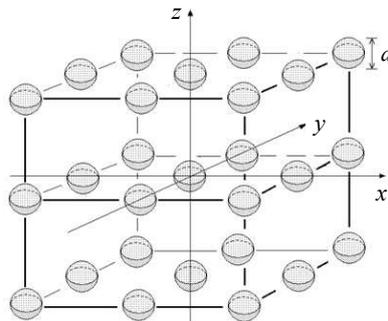


Рис. 1. Простая кубическая решетка из сферических частиц

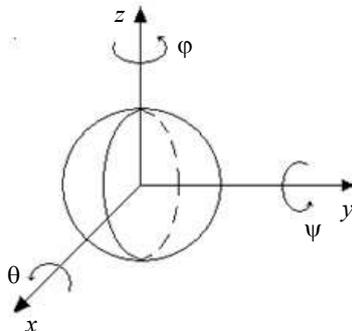


Рис. 2. Ротационные степени свободы частицы

В этом случае кинетическая энергия произвольной частицы имеет вид:

$$T = \frac{M}{2}(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \frac{J}{2}(\varphi_i^2 + \theta_i^2 + \psi_i^2), \quad (1)$$

где

$$J = \frac{2}{5}M \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \frac{1}{10}Md^2$$

– момент инерции частицы относительно каждой оси, проходящей через ее центр масс. Здесь и далее в формулах, если не оговорено другое, нижние буквенные символы означают дифференцирование по соответствующим переменным.

Пространство между частицами представляет собой безмассовую упругую среду, через которую передаются силовые и моментные воздействия. Будем считать, что частица $N(i, j, k)$ взаимодействует лишь с ближайшими соседями, удаленными от нее на расстояние a (6 частиц 1-й координационной сферы: $(i\pm 1, j, k)$, $(i, j\pm 1, k)$, $(i, j, k\pm 1)$), на расстояние $a\sqrt{2}$ (12 частиц 2-й координационной сферы: $(i, j\pm 1, k\pm 1)$, $(i\pm 1, j, k\pm 1)$, $(i\pm 1, j\pm 1, k)$) и на расстояние $a\sqrt{3}$ (8 частиц 3-й сферы: $(i\pm 1, j\pm 1, k\pm 1)$) (см. рис. 1).

Для моделирования взаимодействий между частицами введем линейные упругие пружины пяти типов: центральные с жесткостью K_0 , соединяющие центры масс соседних частиц; нецентральные с жесткостью K_1 ; диагональные K_2 , а также пружины с жесткостями K_3 и K_4 , соединяющие центральную частицу с частицами соответственно второй и третьей координационных сфер (рис. 3). Синим и зеленым цветом обозначены пружины с жесткостью K_1 , коричневым – пружины K_2 .

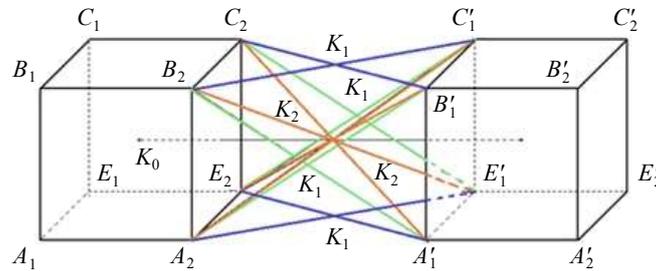


Рис. 3. Схема силовых взаимодействий между ближайшими соседями по решетке (частицами первой координационной сферы)

Для удобства дальнейших вычислений предположим, что в каждую сферическую частицу диаметром d вписан куб со стороной $b = d / \sqrt{3}$. Точки соединения с частицами пружин вида K_1 и K_2 лежат в вершинах куба (на рис. 3: $A_2B'_1, B_2A'_1, E_2C'_1, C_2E'_1$ – пружины с жесткостью K_1 ; $A_2C'_1, E_2B'_1, B_2E'_1, C_2A'_1$ – пружины вида K_2), а пружины с жесткостями K_3 и K_4 прикреплены к серединам ближайших друг к другу ребер кубов, геометрические центры которых в исходном состоянии расположены на расстояниях $a\sqrt{2}$ и $a\sqrt{3}$.

Пружины с жесткостями K_0, K_1, K_2 и K_3 описывают взаимодействия частиц внутри одного слоя. Так, центральные K_0 и нецентральные пружины K_1 характеризуют взаимодействия при растяжении-сжатии материала. Через пружины K_1 передаются также моменты при поворотах частиц. Пружины с жесткостью K_1 и K_2 характеризуют силовые и моментные взаимодействия частиц при сдвиговых деформациях в материале.

Предполагается, что смещения частиц малы по сравнению с размерами элементарной ячейки рассматриваемой решетки. Взаимодействие частиц при отклонениях от положения равновесия определяется относительными удлинениями пружин. Потенциальная энергия, обусловленная взаимодействием частицы N с 26 ближайшими соседями по решетке, описывается формулой

$$U_N = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^6 \frac{K_0}{2} D_{0n}^2 + \sum_{n=1}^{48} \frac{K_1}{2} D_{1n}^2 + \sum_{n=1}^{24} \frac{K_2}{2} D_{2n}^2 + \sum_{n=1}^{12} \frac{K_3}{2} D_{3n}^2 + \sum_{n=1}^8 \frac{K_4}{2} D_{4n}^2 \right), \quad (2)$$

где D_{ln} ($l = 0, 1, 2, 3, 4$) – удлинения пронумерованных в произвольном порядке пружин пяти типов, соединяющих частицу с ее соседями. Эти удлинения определяются изменениями расстояний между точками соединения соответствующих пружин (см. рис. 3). Далее от полученной дискретной модели перейдем в континуальное приближение. Для этого выразим удлинения пружин через смещения и углы поворотов частиц и разложим последние в выражении для потенциальной энергии в ряд Тейлора до квадратичных членов включительно.

2. Длинноволновая континуальная модель геосреды

В случае длинноволновых возмущений, когда характерная длина волны деформаций $\lambda \gg a$, плотность функции Лагранжа L рассматриваемой среды из сферических частиц с точностью до квадратичных слагаемых примет вид:

$$\begin{aligned} L = & \frac{\rho}{2} (u_t^2 + v_t^2 + w_t^2) + \frac{J}{2a^3} (\varphi_t^2 + \theta_t^2 + \psi_t^2) - \\ & - \frac{\rho}{2} [c_1^2 (u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + c_2^2 (v_x^2 + v_z^2 + u_y^2 + u_z^2 + w_x^2 + w_y^2) + \\ & + s^2 (v_y w_z + v_z w_y + u_x w_z + u_z w_x + u_x v_y + u_y v_x) + \beta_1^2 (\varphi^2 + \theta^2 + \psi^2) + \\ & + \beta_2^2 (v_x \varphi - w_x \psi + w_y \theta - u_y \varphi + u_z \psi - v_z \theta) + \\ & + b^2 c_3^2 (\varphi_z^2 + \theta_x^2 + \psi_y^2) + b^2 c_4^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 + \psi_x^2 + \psi_z^2)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены следующие обозначения: ρ – плотность среды; c_i ($i = \overline{1, 4}$) – скорости распространения соответственно продольной c_1 , поперечной c_2 и ротационных волн различной поляризации c_3, c_4 ; s – коэффициент связи между продольными и сдвиговыми деформациями; β_1 и β_2 – параметры связи микроповоротов с поперечной и продольной волнами.

С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского из выражения плотности функции Лагранжа (3) получена система дифференциальных уравнений, описывающая распространение акустических (со скоростями c_1 и c_2) и ротационных (со скоростями c_3 и c_4) волн в кубической решетке из сферических частиц:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - c_2^2 (u_{yy} + u_{zz}) - s^2 (v_{xy} + w_{xz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\varphi_y - \psi_z) &= 0, \\ v_{tt} - c_1^2 v_{yy} - c_2^2 (v_{xx} + v_{zz}) - s^2 (u_{xy} + w_{yz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\theta_z - \varphi_x) &= 0, \\ w_{tt} - c_1^2 w_{zz} - c_2^2 (w_{xx} + w_{yy}) - s^2 (u_{xz} + v_{yz}) + \frac{\beta_2^2}{2} (\psi_x - \theta_y) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2 \left(\frac{1}{10} \theta_{tt} - \frac{1}{3} c_3^2 \theta_{xx} - \frac{1}{3} c_4^2 (\theta_{yy} + \theta_{zz}) \right) + \frac{\beta_2^2}{2} (w_y - v_z) + \beta_1^2 \theta &= 0, \\
d^2 \left(\frac{1}{10} \psi_{tt} - \frac{1}{3} c_3^2 \psi_{yy} - \frac{1}{3} c_4^2 (\psi_{xx} + \psi_{zz}) \right) + \frac{\beta_2^2}{2} (u_z - w_x) + \beta_1^2 \psi &= 0, \\
d^2 \left(\frac{1}{10} \varphi_{tt} - \frac{1}{3} c_3^2 \varphi_{zz} - \frac{1}{3} c_4^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) \right) + \frac{\beta_2^2}{2} (v_x - u_y) + \beta_1^2 \varphi &= 0. \quad (4)
\end{aligned}$$

Система (4) аналогична уравнениям динамики континуума Коссера, состоящего из центрально-симметричных частиц с тремя трансляционными и тремя ротационными степенями свободы [12]. Отличия наблюдаются лишь в коэффициентах. Коэффициенты уравнений системы (4), то есть макропараметры среды, выражаются через силовые постоянные K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 , период решетки a и размер частицы $b = d/\sqrt{3}$:

$$\begin{aligned}
c_1^2 &= \frac{1}{a\rho} \left(K_0 + \frac{8(a-b)^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{4(a-b)^2}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 + \frac{K_3}{\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3} \right), \\
c_2^2 &= \frac{1}{a\rho} \left(\frac{4b^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{4b^2}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 + \frac{K_3}{2\sqrt{2}} + \frac{2K_4}{3} \right), \\
s^2 &= \frac{1}{a\rho} \left(\frac{K_3}{\sqrt{2}} + \frac{4K_4}{3} \right), \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^2 &= \frac{8b^2}{a\rho} \left(\frac{K_1}{(a-b)^2 + b^2} + \frac{K_2}{(a-b)^2 + 2b^2} \right), \quad \beta_2^2 = \frac{8b^2}{a\rho} \frac{K_2}{(a-b)^2 + 2b^2}, \\
c_3^2 &= \frac{2b^2}{a\rho} \frac{K_1}{(a-b)^2 + b^2}, \quad c_4^2 = \frac{1}{a\rho} \left(\frac{K_1(a^2 + (a-b)^2)}{(a-b)^2 + b^2} + \frac{K_2 a^2}{(a-b)^2 + 2b^2} \right).
\end{aligned}$$

Здесь $\rho = M/a^3$ – плотность рассматриваемой среды. Из (5) следует

$$\beta_1^2 + s^2 = 2c_2^2, \quad \beta_2^2 + 4c_3^2 = \beta_1^2. \quad (6)$$

Таким образом, в исследуемой анизотропной среде имеются лишь 5 независимых макроконстант, причем при переходе к изотропной среде (в этом случае $c_1^2 = c_2^2 + s^2$) останется лишь 4 константы. Такая среда становится изотропной при выполнении следующего соотношения:

$$K_0 = \frac{4b^2 - 8(a-b)^2}{(a-b)^2 + b^2} K_1 + \frac{4a(2b-a)}{(a-b)^2 + 2b^2} K_2 - \frac{K_3}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{3} K_4. \quad (7)$$

Введение в модель пружин пяти типов продиктовано следующими обстоятельствами. Наличие центральных пружин с жесткостью K_0 обеспечивает превосходство скорости продольных волн над скоростями остальных волн, что является типичным для твердого тела. Если $K_1 = 0$, то $\beta_1 = \beta_2$ и $c_3 = 0$, в то время как в континууме Коссера этот коэффициент является ненулевым. При отсутствии пружин с жесткостью K_2 в данной модели $\beta_2 = 0$, в результате чего исчезает связь между трансляционными и ротационными степенями свободы частиц в линейном приближении, присутствующая в континууме Коссера. Пружины K_3 и K_4 кажутся, на первый взгляд, дублирующими друг друга, но, как следует из формул (5), пружины этих двух типов в количественном отношении по-разному влияют на параметры c_1, c_2 и s . Кроме того,

соотношение (7) показывает их различное качественное влияние на выполнение условия изотропии среды, поскольку K_3 и K_4 входят в (7) с противоположными знаками.

3. Градиентная модель грунта

Теоретические оценки [13, 14] и экспериментальные данные [15] показывают, что ротационные волны в твердых телах лежат в области высоких частот (больше 10^9 – 10^{11} Гц). Однако вибрации в грунте при прохождении высокоскоростных железнодорожных составов происходят на существенно меньших частотах – 10–70 Гц [1]. В таком частотном диапазоне ротационные волны не распространяются. В этом случае микроповороты частиц среды не являются независимыми и определяются полем смещений:

$$\begin{aligned}\theta(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2}(v_z - w_y) = -\frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} \text{rot}_x \mathbf{U}, \\ \psi(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2}(w_x - u_z) = -\frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} \text{rot}_y \mathbf{U}, \\ \varphi(x, y, z, t) &\approx \frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2}(u_y - v_x) = -\frac{\beta_2^2}{2\beta_1^2} \text{rot}_z \mathbf{U}.\end{aligned}\quad (8)$$

Соотношения (8), связывающие повороты частиц среды с деформациями, являются характерным признаком модели псевдоконтинуума Коссера (континуума со стесненным вращением частиц), в котором повороты всех микроэлементов совпадают с поворотом представительного объема как твердого целого, а также совпадают тензоры микро- и макродеформаций [12]. В такой модели микроповороты частиц среды Ψ не являются независимыми и определяются полем трансляционных смещений: $\Psi = \text{rot } \mathbf{U}/2$. Заметим также, что соотношения (8) получены из трех последних уравнений системы (4) в предположении малости слагаемых, пропорциональных d^2 . Подстановка соотношений (8) в выражение плотности функции Лагранжа (3) приводит к следующему:

$$\begin{aligned}L = &\frac{\rho}{2}(u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \frac{J}{8a^3} \frac{\beta_2^4}{\beta_1^4} ((v_{xt} - u_{yt})^2 + (u_{zt} - w_{xt})^2 + (w_{yt} - v_{zt})^2) - \\ &- \frac{\rho}{2} [c_1^2 (u_x^2 + v_y^2 + w_z^2) + c_2^2 (v_x^2 + v_z^2 + u_y^2 + u_z^2 + w_x^2 + w_y^2) + \\ &+ s^2 (v_y w_z + v_z w_y + u_x w_z + u_z w_x + u_x v_y + u_y v_x) - \\ &- \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} ((v_x - u_y)^2 + (w_y - v_z)^2 + (u_z - w_x)^2) + \\ &+ \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_3^2 ((v_{xz} - u_{yz})^2 + (w_{yx} - v_{xz})^2 + (u_{yz} - w_{xy})^2) + \\ &+ \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_4^2 ((v_{xx} - u_{xy})^2 + (v_{xy} - u_{yy})^2 + (w_{yy} - v_{yz})^2 + \\ &+ (w_{yz} - v_{zz})^2 + (u_{xz} - w_{xx})^2 + (u_{zz} - w_{xz})^2].\end{aligned}\quad (9)$$

Заметим, что выражение (9) от функции Лагранжа для псевдоконтинуума Коссе-ра отличается лишь коэффициентами, в частности, псевдоконтинууму соответствует случай $c_3 = c_4$.

Как и в разделе 2, для вывода из выражения (9) системы дифференциальных уравнений воспользуемся вариационным принципом Гамильтона – Остроградского. В результате получим уравнение движения среды в форме Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial u_{i,j}} - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{i,j}} - \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial L}{\partial u_{i,jk}} = 0, \quad (10)$$

где $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$, точка сверху обозначает производную по времени, а запятая в индексах обозначает производную по соответствующей координате.

Подстановка выражения (9) в уравнение (10) приводит к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{yy} + u_{zz}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (v_{xy} + w_{xz}) = \\ & = \frac{\beta_2^4}{2\beta_1^4} \left\{ \frac{d^2}{20} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial y} (u_x - v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z - w_x) \right) - b^2 c_4^2 \Delta \left(\frac{\partial}{\partial y} (u_x - v_x) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z - w_x) \right) + \right. \\ & \quad \left. + b^2 (c_4^2 - c_3^2) \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (2u_{yz} - v_{xz} - w_{xy}) \right\}, \\ & v_{tt} - c_1^2 v_{yy} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (v_{xx} + v_{zz}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{xy} + w_{yz}) = \\ & = \frac{\beta_2^4}{2\beta_1^4} \left\{ \frac{d^2}{20} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (v_x - u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z - w_y) \right) - b^2 c_4^2 \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x} (v_x - u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (v_z - w_y) \right) + \right. \\ & \quad \left. + b^2 (c_4^2 - c_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} (2v_{xz} - u_{yz} - w_{xy}) \right\}, \quad (11) \\ & w_{tt} - c_1^2 w_{zz} - \left(c_2^2 - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (w_{xx} + w_{yy}) - \left(s^2 + \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} \right) (u_{xz} + v_{yz}) = \\ & = \frac{\beta_2^4}{2\beta_1^4} \left\{ \frac{d^2}{20} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (w_x - u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (w_y - v_z) \right) - b^2 c_4^2 \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x} (w_x - u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (w_y - v_z) \right) + \right. \\ & \quad \left. + b^2 (c_4^2 - c_3^2) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (2w_{xy} - v_{xz} - u_{yz}) \right\}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

– оператор Лапласа.

Уравнения (11) показывают, что в этом низкочастотном приближении возмущения, вызванные микровращениями, не распространяются, однако микроповороты оказывают влияние на распространение продольных и сдвиговых волн: квадрат ско-

рости поперечной волны c_2^2 уменьшается на величину $\beta_2^4/4\beta_1^2$, а параметр связи между продольными и поперечными деформациями s^2 увеличивается на эту же величину. Такие уравнения принято называть уравнениями моментной (градиентной) теории упругости, поскольку они содержат слагаемые высокого порядка (в данном случае четвертого) [16]. Слагаемые, содержащие смешанные производные по времени и координате, учитывают инерционность поворота частиц среды и приводят к дисперсии волн, а слагаемые, пропорциональные производным четвертого порядка по координатам, описывают вклад в потенциальную энергию напряжений, обусловленных изгибом среды.

4. Граничные условия

Уравнение (10) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_{i,j}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial^2 \sigma_{ijk}}{\partial x_j \partial x_k}.$$

Здесь $\sigma_{ij} = -\partial L / \partial u_{i,j}$ – несимметричный тензор «макронапряжений», а $\sigma_{ijk} = -\partial L / \partial u_{i,jk}$ – тензор «микронапряжений», симметричный по двум индексам [17]. Антисимметричная часть тензора σ_{ijk} представляет собой тензор моментных напряжений. Напряжения σ_{ii} называют нормальными, σ_{iii} – нормальными моментными, в то время как остальные компоненты этих тензоров – касательными [18].

При решении задач о распространении упругих волн в полубесконечной среде требуется задать граничные условия. Обычно в таких случаях задают отсутствие напряжений на плоскости $z = 0$ (см., например, [19]):

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_{zx} &= -\frac{\partial L}{\partial w_x} = \rho \left(c_2^2 w_x + \frac{s^2}{2} u_z - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} (w_x - u_z) \right), \\ \sigma_{zy} &= -\frac{\partial L}{\partial w_y} = \rho \left(c_2^2 w_y + \frac{s^2}{2} v_z - \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^2} (w_y - v_z) \right), \\ \sigma_{zz} &= -\frac{\partial L}{\partial w_z} = \rho \left(c_1^2 w_z + \frac{s^2}{2} (u_x + v_y) \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для сыпучих сред часто используют модели, в которых моментные напряжения отсутствуют. В частности, это касается модели редуцированной среды Коссера [20], плотность функции Лагранжа которой отличается от выражения (3) тем, что в ней $\beta_1 = \beta_3$ и отсутствуют производные по координатам от углов поворота. В предложенной здесь модели компоненты тензора «микронапряжений» имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xxx} &= -\frac{\partial L}{\partial u_{xx}} = 0, \quad \sigma_{xxy} = -\frac{\partial L}{\partial u_{xy}} = \sigma_{yyx} = \rho \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_4^2 (u_{xy} - v_{xx}), \\ \sigma_{xyy} &= -\frac{\partial L}{\partial u_{yy}} = \rho \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_4^2 (u_{yy} - v_{xy}), \\ \sigma_{xxz} &= -\frac{\partial L}{\partial^2 u_{xz}} = \sigma_{zxx} = \rho \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_4^2 (u_{xz} - w_{xx}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xzz} &= -\frac{\partial L}{\partial^2 u_{zz}} = \rho \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_4^2 (u_{zz} - w_{xz}), \\ \sigma_{xyz} &= -\frac{\partial L}{\partial^2 u_{yz}} = \sigma_{xzy} = \rho \frac{\beta_2^4}{4\beta_1^4} b^2 c_3^2 (2u_{yz} - v_{xz} - w_{xy}).\end{aligned}\quad (14)$$

Выражения (14) содержат первые 9 из 27 компонент тензора σ_{ijk} . Остальные определяются аналогично. С помощью выражений (5) можно установить зависимость коэффициентов компонент тензора моментных напряжений от параметров микроструктуры:

$$\frac{\beta_2^4}{\beta_1^4} = \frac{r_1^4}{(r_2^2 K_1 / K_2 + r_1^2)^2}, \quad (15)$$

где $r_1^2 = (a-b)^2 + b^2$, $r_2^2 = (a-b)^2 + 2b^2$. Из выражения (15) следует, что $\beta_2^4 / \beta_1^4 \rightarrow 0$ при $K_2 / K_1 \rightarrow 0$. В этом случае моментными напряжениями в среде можно пренебречь.

Заключение

Методом структурного моделирования построена трехмерная математическая модель грунта с простой кубической решеткой из сферических частиц, обладающих тремя трансляционными и тремя ротационными степенями свободы. Найдена аналитическая взаимосвязь между макроконстантами такого материала и параметрами его микроструктуры. В низкочастотном приближении, когда ротационные волны являются нераспространяющимися, а микроповороты частиц среды не являются независимыми и определяются полем смещений, получена градиентная модель геосреды.

В рамках этой модели найдены выражения для классических и моментных напряжений в рассматриваемой геосреде. Граничные условия задаются в виде нулевых нормальных и касательных напряжений на верхней площадке полубесконечной среды. Показано, что моментными напряжениями можно пренебречь при малости моментных взаимодействий K_2 по сравнению с нецентральными взаимодействиями K_1 .

Проведенные исследования могут быть полезными для решения задач о распространении упругих волн в полубесконечной геосреде при движении по ее поверхности высокоскоростных объектов.

Список литературы

1. Thompson D. *Railway Noise and Vibration: Mechanisms, Modeling and Means*. Oxford, UK: Elsevier Science, 536 p.
2. Kouroussis G., Connolly D.P., Verlinden O. Railway-induced ground vibrations – a review of vehicle effects. *International Journal of Rail Transportation*. 2014. Vol. 2. Iss. 2. P. 69–110. DOI: 0.1080/23248378.2014.897791.
3. Титова Т.С., Шашурин А.Е., Бужинский К.В., Светлов В.В. Образование и распространение вибрации при движении высокоскоростных поездов. *Бюллетень результатов научных исследований*. 2017. №3. С. 89–95.
4. Викулин А.В., Иванчин А.Г. О современной концепции блочно-иерархического строения геосреды и некоторых ее следствиях в области наук о Земле. *Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых*. 2013. №3. С. 67–84.
5. Михайлов Д.Н., Николаевский В.Н. Тектонические волны ротационного типа с излучением сейсмических сигналов. *Физика Земли*. 2000. №11. С. 3–10.
6. Erofeev V.I., Leontyeva A.V., Pavlov I.S. Propagation of rotational waves in a block geo-

medium. *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19. Iss. 8. P. 6413–6422. <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18344>.

7. Горбачев В.И., Емельянов А.Н. Осреднение уравнений моментной теории упругости неоднородного тела. *Изв. РАН. МТТ*. 2014. №1. С. 95–107.

8. Maugin G.A., Metrikine A.V. *Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats*. Springer, 2010. 337 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-5695-8.

9. Grekova E., Porubov A., Dell'Isola F. Reduced linear constrained elastic and viscoelastic homogeneous Cosserat media as acoustic metamaterials. *Symmetry*. 2020. Vol. 12. No 4. P. 521–543. DOI: 10.3390/sym12040521.

10. Павлов И.С., Потапов А.И. Структурные модели в механике нанокристаллических сред. *Доклады Академии наук*. 2008. Т. 421. №3. С. 348–352.

11. Ерофеев В.И., Павлов И.С. *Структурное моделирование метаматериалов*. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2019. 196 с.

12. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories. I: Foundation and Solids*. New York: Springer, 1999. 325 p.

13. Потапов А.И., Павлов И.С., Лисина С.А. Идентификация нанокристаллических сред методами акустической спектроскопии. *Акустический журнал*. 2010. Т. 56. №4. С. 558–567.

14. Pavlov I.S., Vasiliev A.A., Porubov A.V. Dispersion properties of the phononic crystal consisting of ellipse-shaped particles. *Journal of Sound and Vibration*. 2016. Vol. 384. P. 163–176. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.08.012.

15. Гросс Е.Ф. *Исследования по оптике и спектроскопии кристаллов и жидкостей: Избранные труды*. Л.: Наука, 1976. 447 с.

16. Ванин Г.А. Градиентная теория упругости. *Изв. РАН. МТТ*. 1999. №1. С. 46–53.

17. Потапов А.И., Лисина С.А. Континуальные модели в микро- и наномеханике. Ч. 2. В кн. *Введение в микро- и наномеханику: Математические модели и методы*. Нижний Новгород: НГТУ, 2010. 303 с.

18. Еремеев В.А., Зубов Л.М. *Основы механики вязкоупругой микрополярной жидкости*. Ростов-на-Дону: ЮНЦ РАН, 2009. 128 с.

19. Кулеш М.А., Матвеев В.П., Шардаков И.Н. О распространении упругих поверхностных волн в среде Коссера. *Акустический журнал*. 2006. Т. 52. №2. С. 227–235.

20. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S. Vibrational modes in granular materials. *Physical Review Letters*. 1984. Vol. 52. P. 831–834. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.831>.

References

1. Thompson D. *Railway Noise and Vibration: Mechanisms, Modeling and Means*. Oxford, UK. Elsevier Science. 536 p.

2. Kouroussis G., Connolly D.P., Verlinden O. Railway-induced ground vibrations – a review of vehicle effects. *Int. J Rail Transp*. 2014. Vol. 2. Iss. 2. P. 69–110. DOI: 10.1080/23248378.2014.897791.

3. Titova T.S., Shashurny A.Y., Buzhynskiy K.V., Svetlov V.V. Obrazovanie i rasprostranenie vibratsii pri dvizhenii vysokoskorostnykh poezdov [Vibrations formation and transmission during high-speed trains' operation]. *Byulleten rezultatov nauchnykh issledovaniy*. 2017. No 3. P. 89–95 (In Russian).

4. Vikulin A.V., Ivanchin A.G. Modern concept of block hierarchy in the structure of geomedium and its implications in geosciences. *J. Min. Sci*. 2013. Vol. 49. No 3. P. 395–408. DOI: 10.1134/S1062739149030076.

5. Mikhailov D.N., Nikolaevskiy V.N. Tectonic waves of the rotational type generating seismic signals. *Izvestiya Physics of the Solid Earth*. 2000. Vol. 36. P. 895–902.

6. Erofeev V.I., Leontyeva A.V., Pavlov I.S. Propagation of rotational waves in a block geomedium. *Journal of Vibroengineering*. 2017. Vol. 19. Iss. 8. P. 6413–6422. <https://doi.org/10.21595/jve.2017.18344>.

7. Gorbachev V.I., Emel'yanov A.N. Homogenization of the equations of the Cosserat theory of elasticity of inhomogeneous bodies. *Mechanics of Solids*. 2014. Vol. 49. P. 73–82. <https://doi.org/10.3103/S0025654414010099>

8. Maugin G.A., Metrikine A.V. *Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats*. Springer. 2010. 337 p. DOI: 10.1007/978-1-4419-5695-8.
9. Grekova E., Porubov A., Dell'Isola F. Reduced linear constrained elastic and viscoelastic homogeneous Cosserat media as acoustic metamaterials. *Symmetry*. 2020. Vol. 12. No 4. P. 521–543. DOI: 10.3390/sym12040521.
10. Pavlov I.S., Potapov A.I. Structural models in mechanics of nanocrystalline media. *Doklady Physics*. 2008. Vol. 53. No 7. P. 408–412. DOI: 10.1134/S1028335808070161.
11. Erofeev V.I., Pavlov I.S. *Structural Modeling of Metamaterials*. 2021. Vol. 144. Springer Nature Switzerland AG. 193 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-60330-4>.
12. Eringen A.C. *Microcontinuum Field Theories. 1: Foundation and Solids*. New York. Springer. 1999. 325 p.
13. Potapov A.I., Pavlov I.S., Lisina S.A. Identification of nanocrystalline media by acoustic spectroscopy methods. *Acoustical Physics*. 2010. Vol. 56. No 4. P. 588–596. DOI: 10.1134/S1063771010040251.
14. Pavlov I.S., Vasiliev A.A., Porubov A.V. Dispersion properties of the phononic crystal consisting of ellipse-shaped particles. *J. Sound Vib.* 2016. Vol. 384. P. 163–176. DOI: 10.1016/j.jsv.2016.08.012.
15. Gross E.F. *Issledovaniya po optike i spektroskopii kristallov i zhidkostey: Izbrannye trudy [Research in Optics and Spectroscopy of Crystals and Liquids: Selected Works]*. Leningrad. Nauka Publ. 1976. 447 p. (In Russian).
16. Vanin G.A. Gradient theory of elasticity. *Mechanics of Solids*. 1999. No 1. P. 38–44.
17. Potapov A.I., Lisina S.A. Kontinualnye modeli v mikro- i nanomekhanike [Continuum models in micro- and nanomechanics]. Ch. 2. V kn.: *Vvedeniye v mikro- i nanomekhaniku: matematicheskiye modeli i metody [In: Introduction to Micro- and Nanomechanics: Mathematical Models and Methods]*. Nizhny Novgorod. Nizhny Novgorod Technical State University. 2010. 303 p. (In Russian).
18. Eremyeyev V.A., Zubov L.M. *Osnovy mekhaniki vyazkouprugoy mikropolyarnoy zhidkosti [Principles of Viscoelastic Micropolar Liquid Mechanics]*. Rostov on Don. South Scientific Center of RASci. 2009. 128 p. (In Russian).
19. Kulesh M.A., Matveenko V.P., Shardakov I.N. Propagation of surface elastic waves in the Cosserat medium. *Acoustical Physics*. 2006. Vol. 52. No 2. P. 186–193. <https://doi.org/10.1134/s1063771006020114>.
20. Schwartz L.M., Johnson D.L., Feng S. Vibrational modes in granular materials. *Phys. Rev. Lett.* 1984. Vol. 52. P. 831–834. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.831>.

A 3D HIGHER-ORDER GRADIENT MODEL FOR A HALF-SPACE GEOMEDIUM*

Pavlov I.S.^{1,2}, Muravieva A.V.²

¹*Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences – Branch of Federal Research Center “Institute of Applied Physics of the RAS”,
Nizhny Novgorod, Russian Federation*

²*National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

ispavlov@mail.ru

Received by the Editor 2022/07/27

In this paper, a structural model of a geomedium (a soil) is proposed in the form of a simple cubic lattice of spherical particles (blocks) possessing three translational and three rotational degrees of freedom. The force and couple interactions between the particles are modeled by elastic springs of

*The reported study was funded by Russian Science Foundation, project No 20-19-00613.

five types. A long-wavelength continuum mathematical model of the soil has been elaborated by the method of structural modeling. An analytical relationship between its macroconstants and microstructure parameters has been found. It is shown that the obtained model differs from the model of the reduced Cosserat medium, which is often employed to describe granular media. In the low-frequency approximation, it can be reduced to the equations of the higher-order gradient theory of elasticity, which are similar to the Cosserat continuum equations with constrained rotation of particles. These equations contain both terms with mixed derivatives with respect to time and coordinate that take into account the inertia of particles rotation in the medium and lead to the wave dispersion, and terms proportional to the spatial derivatives of the fourth order, which describe the contribution of stresses caused by bending of the medium to the potential energy.

In the framework of the higher-order gradient model, expressions for the classical and couple stresses in the considered geomedium are found. Boundary conditions are set that consist in the absence of normal and shear stresses on the upper platform of a half-space medium. A condition for the microstructure parameters has been revealed, under which the couple stresses can be neglected.

The proposed here higher-order gradient model with given boundary conditions can be used to investigate the propagation and interaction of elastic waves in a semi-infinite geomedium, which are generated by the high-speed movement of trains, as well as to identify and study potentially dangerous effects caused by such movement.

Keywords: half-space geomedium, structural modeling, higher-order gradient model, classical and couple stresses, boundary conditions.