

УДК 539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-4-441-467

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЧАСТИЧНО НАСЫЩЕННЫХ ПОРОУПРУГИХ СРЕДАХ (ОБЗОР)*

© 2022 г.

Игумнов Л.А., Петров А.Н.

*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 13.07.2022

Предлагается обзор литературных источников в области моделирования волновых процессов в частично насыщенных пористых средах. Обзор состоит из трех частей. В первой части приведена классификация пористых сред по степени насыщения смачивающим наполнителем. Дан обзор основополагающих работ современной теории пористых континуумов, в результате которых возникли теория Био и теория смесей. Указаны преимущества, недостатки, а также условия соответствия между собой двух подходов. Вторая часть посвящена научным публикациям прикладного и академического характера, которые в большинстве своем отражают изучение особенностей волновых процессов в пороупругих средах аналитическими и полуаналитическими методами. Отдельное внимание уделено работам, посвященным моделированию медленных продольных волн как отличительной черте волновых процессов в частично насыщенных пороупругих средах. В третьей части дан обзор применения методов граничных элементов и конечных элементов для изучения напряженно-деформированного состояния насыщенных и частично насыщенных пористых сред, поведения волн в процессе их распространения в рассматриваемых средах и анализа локальных динамических эффектов. Указаны статьи экспериментального характера, подтверждающие теоретические результаты, полученные в рамках теории Био. Проведен краткий анализ современных достижений в задачах численного моделирования динамических эффектов в полубесконечных пористых средах, имеющих слоистую структуру типа морского дна. Рассмотрены опубликованные исследования по выводу фундаментальных решений для систем уравнений пороупругости и построению соответствующих интегральных уравнений во времени и пространстве интегральных преобразований Фурье и Лапласа. Приведены публикации, рассматривающие различные аспекты гранично-элементного моделирования ненасыщенных пористых сред и применение методов граничных и конечных элементов на конкретных примерах.

Ключевые слова: пороупругие среды, модель Био, теория смесей, волновые процессы, численное моделирование, метод граничных элементов, метод конечных элементов.

* Выполнено за счет гранта РНФ (проект №22-19-00138).

Введение

Пористые материалы широко распространены в природе и технике. Применение пористых материалов в технике позволяет снизить массу и материалоемкость конструкции при увеличении их прочности и надежности. Анализ волновых процессов в пористых материалах и средах имеет принципиальное значение для таких областей, как акустика, геомеханика, биомеханика, нефтедобыча, геофизика, материаловедение и др. Например, в геомеханике насыщенные жидкостью или газом почвы и горные породы рассматриваются как пористые среды.

В естественных условиях, как правило, геоматериалы существуют только в частично насыщенном виде. Такая среда имеет структуру в виде твердого скелета с распределенными порами, заполненными различными вязкими жидкостями. Поровые жидкости во многом определяют физические характеристики пористой среды. Например, эффект демпфирования распространения волн в среде вызывается вязкостью поровой жидкости. Движение жидкостей относительно скелета порождает новые волны и существенно меняет волновые картины. Кроме медленной волны сжатия (первая медленная волна), появляется более медленная волна сжатия (вторая медленная волна). Такие волны возникают как результат взаимодействия скелета со смачивающей и несмачивающей жидкостями в порах. Медленные пороупругие волны могут быстро затухать, а значит, плохо проявляются, но при определенных условиях такие волны существенно изменяют всю волновую картину. Кроме пористости, для распространения волн (для скоростей волн и затухания волн) существенным является насыщенность материала. Насыщенность, кроме уже отмеченного влияния на взаимодействие между твердым телом и жидкостями, может влиять на среднюю сжимаемость пористой среды. В таких случаях концепция поверхностного натяжения и капиллярного давления представляет особый интерес, поскольку эти эффекты могут оказывать большое влияние на динамическую реакцию частично насыщенной пороупругой среды.

Уравнения динамики частично насыщенной пороупругой среды могут быть получены на основе уравнений механики сплошных сред. Аналитически уравнения разрешимы только для специальных случаев. Такие аналитические решения используются для проверки соответствующих численных результатов. Обзор источников показывает, что из численных методов для моделирования процессов в частично насыщенных пористых средах активно применяются метод конечных элементов (МКЭ) и метод конечных разностей (МКР) [1]. Универсальность и конкурентоспособность этих методов позволяет их применять для решения соответствующих задач. В трехмерных случаях эти методы требуют дискретизации объема, что значительно повышает временные затраты. Произвольность формы границы является хоть и разрешимой, но проблемой для МКР. По сравнению с МКЭ и МКР для метода граничных элементов (МГЭ) требуется только информация с границы. Это значительно упрощает построение дискретных аналогов при рассмотрении объектов сложной формы. Кроме того, МГЭ особенно подходит для задач о распространении волн в полубесконечной и бесконечной областях, так как естественно учитывает необходимые для таких задач условия излучения.

Краткий обзор работ по теории пористых сред

Первые попытки описания пористой среды можно отнести к концу XVIII века, когда масштабно возникла проблема эксплуатации дамб и плотин. R. Woltman ввел одно из базовых понятий – отношение объемов фаз [2], а экспериментальным изучением проблем диффузии начал заниматься А. Fick [3]. Законы диффузии А. Fick развивал J. Stefan [4]. В начале XX века выделяются, например, статьи К. von Terzaghi [5] и P. Fillunger [6].

По объемным соотношениям и свойствам движения жидкостей в порах можно пористые среды условно объединить в группы: сухие, малонасыщенные, средне-насыщенные, высоконасыщенные, насыщенные. В сухих средах несмачивающая жидкость непрерывна в твердом скелете и нет свободного потока смачивающей жидкости. Степень насыщения этого типа пористых сред равна нулю. В малонасыщенных средах поры заняты как смачивающими, так и несмачивающими жидкостями, но с незначительным количеством смачивающей жидкости. В средах средней насыщенности как смачивающие, так и несмачивающие жидкости могут свободно течь в порах. В высоконасыщенных средах несмачивающая жидкость не может свободно течь, но оказывает влияние на поток смачивающей жидкости. В полностью насыщенных средах в порах существует только смачивающая жидкость. Все эти группы пористых сред можно назвать частично насыщенными средами, где сухие и насыщенные среды являются двумя крайними случаями.

Для описания поведения пористых сред единого подхода нет, но можно отметить, например, теорию Био, теорию смесей [1]. Исследования некоторых моделей для ненасыщенной пористой среды можно найти в [7–9], а для многофазных несмешивающихся жидкостей – в [10–12]. Простейшим случаем моделирования является однофазная смесь. М.А. Био предложил феноменологическую модель динамической пороупругости. Работы Я.И. Френкеля [13] и М.А. Био [14–19] являются признанными классическими разработками математической теории пороупругости. Я.И. Френкель и М.А. Био ввели двухфазную модель среды.

Соответствующим моделированием введены в использование такие параметры материала, как модуль сдвига, коэффициент сжимаемости, пористость, вязкость жидкости, проницаемость, упругие и объемные модули среды, эффективные плотности пористой среды. Процедуры определения этих параметров можно найти в статьях М.А. Biot, D.G. Willis [16], С.Н. Yew, P.N. Jogi [20] и др. Например, в [20] вычисляются параметры материала для трех видов песчаника, также определяются скорости волн в образцах горных пород по экспериментально определенным параметрам Био. В [21] описаны методы определения и представлены значения модельных параметров для разных видов песчаника, гранита и мрамора.

После работ М.А. Био система уравнений пороупругости строилась с применением более строгой математической техники в [22–28]. Так, В.Н. Николаевским [24, 29] изложены основы механики пористых сред, приведены фундаментальные уравнения многофазных сред. В классической теории М.А. Био рассматривал только глобальный флюидный поток. Развитие этой теории было предложено в [30, 31], и уже в [32, 33] исследовалось явление волнового затухания от локального флюидного потока. Анизотропная модель пористой среды исследовалась, например, J.O. Parra в [34, 35]. Подробный обзор математических моделей ненасыщенных пористых сред можно найти в [36].

Современная теория смесей заложена в работах С.А. Truesdell [37–39]. В [38] им описана замкнутая система однокомпонентных материалов, а в [39] – замкнутая система смесей, состоящая из компонентов как открытых систем. Развитие теории смесей получила в [40–42]. Модели пористой среды на основе теории смесей сформулированы, например, R.M. Bowen [43–45] и исследовались в [46, 47].

Обзор различий между теорией Био и теорией смесей можно найти в [48]. Отмечается, что некоторые из базовых параметров (например, объемные доли) трудно оценить экспериментально и для этого необходимо разрабатывать дополнительные соотношения, а это часто осложняет применение моделей теории смесей. Кроме того, установлено, что для случая несжимаемых составляющих теория Био получается из теории смесей через процедуру линеаризации при пренебрежении мнимой частью плотности массы [49, 50].

Поток поровых жидкостей для частично насыщенных сред включает в себя поток смачивающей жидкости и поток несмачивающей жидкости, где оба потока задаются соответствующим градиентом давления. В случае насыщенного пороупругого материала закон Дарси используется для описания потока поровой жидкости. Для ненасыщенного пороупругого материала закон Дарси используется как для смачивающих, так и для несмачивающих жидкостей.

Исследования волновых процессов в пористых средах аналитическими и полуаналитическими методами

Исследования частично насыщенных сред с позиций теории Био имеют пусть и незначительный, но свой массив публикаций. В последние несколько лет реакция насыщенного грунта от действия нагрузки широко исследовалась аналитическими методами. Например, в [51] с помощью разложений Гельмгольца и преобразований Фурье построены явные общие решения в перемещениях и напряжениях для однородного полупространства в частотной области. В [52] проанализирована динамическая реакция модели горизонтального слоя на возмущение, вызванное ленточным фундаментом. В [53] исследовано движение трехмерного пороупругого полупространства, создаваемого горизонтальной заглубленной нагрузкой. В [54] получены точные аналитические решения от вертикальной точечной нагрузки, действующей на поверхность двухслойной среды. В [55] исследовалось распространение волн сжатия. В [56] получены точные решения во временной области для одномерной переходной характеристики ненасыщенной однослойной пористой среды для трех типов неоднородных граничных условий. В [57] представлено аналитическое решение о низкочастотном поведении дилатационных волн, распространяющихся в однородной пороупругой среде, содержащей две несмешивающиеся жидкости. Использована модель Bergman–Thigpen–Chin, в которой не учитываются эффекты капиллярного давления. В [58] исследованы звуковые волны в трехфазных почвах в рамках линейной модели Био и модели простой смеси Вильмански: моделируется пористая среда, состоящая из деформируемого каркаса и двух сжимаемых, химически не реагирующих поровых компонентов. В статье [59] разработана линейная динамическая модель насыщенной двумя несмешивающимися флюидами пористой среды, позволяющая учесть связь между фазами за счет введения функции свободной энергии среды, и рассчитаны скорости трех продольных и одной поперечной волны из уравнений движения, записанных в терминах преобразования Фурье.

В [60] получено полуаналитическое решение динамической задачи одномерной

частично насыщенной пороупругой колонны, получено аналитическое решение для одномерной трехфазной пороупругой колонны. Распространение волн исследовано на динамических откликах смещения и поровых давлений. С помощью преобразования Лапласа в [61] изучена динамическая реакция насыщенного столба грунта с бесконечной длиной и несжимаемыми зернами и жидкостью. В [62] построено решение о динамической реакции столба насыщенного грунта бесконечной длины при динамической нагрузке с использованием метода интегрального преобразования и квадратурной свертки. Численно-аналитическое исследование распространения волн в одномерном трехфазном пороупругом стержне проведено в [63]. Авторами рассмотрено влияние граничных условий и параметров модели на динамические отклики перемещения и поровых давлений, проведено моделирование эффекта второй медленной волны сжатия на динамических откликах давления воздуха в порах. В [64] получено аналитическое решение распространения волн в двухфазных средах. Доступны и другие одномерные решения, которые можно найти в обзорной статье [65]. Для моделей, отличных от двухфазных, имеется не так много одномерных решений.

Конечно-элементное моделирование задач пороупругости

Для анализа динамического отклика в поровых средах применяются численные методы. Это вызвано стремлением учесть взаимодействие между различными фазами среды и возможностью аналитических решений для простых случаев. Для ненасыщенных сред предложен ряд различных конечно-элементных формулировок [66–68]. В статье [69] создана конечно-элементная модель анализа волновых полей в ненасыщенном морском дне. МКЭ может успешно применяться для решения задач распространения волн в пороупругих средах, особенно в ограниченных областях. Однако интерес к распространению волн чаще всего относится к случаям полубесконечных или бесконечных сред. В таких задачах требуется выполнение условий излучения Зоммерфельда. В МКЭ для этого используются две идеи. Одна из них – применение бесконечных элементов [70], а другая – применение неотражающих искусственных границ [71].

Динамические задачи для пористых сред решались в [72, 73]. В [72] представлено решение линейной двумерной динамической задачи распространения сейсмических волн в среде, насыщенной жидкостью, где за основу была взята линеаризованная модель с тремя параметрами, описывающими среду. В [74] приведены решения системы динамических уравнений при действии сосредоточенной силы, используемых для моделирования скоростей смещений пористого каркаса и жидкого заполнителя, а также порового давления и напряжений при разных значениях скоростей распространения продольных и поперечных волн в изотропной однородной среде. Исследования распространения волн в двумерной постановке в бесконечном цилиндре из материала Био отражены в [75]. В [76] изучался процесс отражения ударных волн умеренной амплитуды от твердой границы в среде, насыщенной жидкостью и газом. На основе применения математической модели определены значения амплитуд и скоростей отражения волн. В [77] оценивалось влияние капиллярных эффектов на динамику поведения трехфазного песка: экспериментально исследованы факторы, влияющие на модуль сдвига. Было установлено, что капиллярные эффекты оказывают влияние на степень насыщения песка. В [78] исследовалось распространение гармонических и нестационарных волн в многослойных сухих, насыщенных

и ненасыщенных изотропных пороупругих средах. В [79] проведено исследование влияния водонасыщенности на горизонтальное и вертикальное перемещение на границе между пористым грунтом и горной породой от воздействия набегающей волны сжатия. В [80] сравнивались измеренные и рассчитанные значения скоростей продольных и поперечных волн в частично насыщенном песке. В [81] рассмотрена задача дренирования грунта, дан анализ воздействия ступенчатой нагрузки на столб песка. В [82] исследована дисперсия и затухание волн в частично водонасыщенных песчаниках на основе улучшенной модели Био, в которой вводится насыщенность. В [83] моделировалось распространение волны в частично насыщенной пористой среде, где особенностью является наличие второй медленной волны из-за капиллярных сил. Численная модель, способная моделировать многофазную структуру грунтов при ударном нагружении, представлена в [84]. С использованием трехфазной модели проведено численное моделирование для исследования распространения взрывной волны в четырех случаях грунтов с различными степенями водонасыщенности от 37,5 до 100%. На основании экспериментальных и более подробных численных результатов можно заключить, что водонасыщенность оказывает значительное влияние на распространение волны, вызванной взрывом. Методы определения эффективных характеристик пористых материалов (низкопористых металлических пен) представлены в [85]. Подход опирается на аналитические решения модельных задач и конечно-элементное моделирование пористых материалов. Статья [86] посвящена анализу изучения новых математических моделей пористых трехфазных полугораниченных неоднородных по глубине оснований. Действие поверхностного осциллятора представляется в виде ряда Фурье, и задача решается с установившимся режимом колебаний. Предложен численный алгоритм для изучения зависимости распространения поверхностных волн от механических и геометрических характеристик задачи. В [87] рассматривается контактная задача для мягкой биологической ткани в рамках пороупругой водонасыщенной среды, описываемой моделью Био. В рамках осесимметричной деформации исследуются два типа граничных условий под гладким плоским штампом для порового давления и их влияния на зависимость между глубиной его внедрения и контактной силой. Задачи решаются численно с помощью метода конечных элементов. В статье [88] рассматривается нестационарная осесимметричная задача о распространении возмущений в пористой полуплоскости под действием поверхностной нагрузки. Используется модель Био. Для решения применяются преобразования Ханкеля по радиусу цилиндрической системы координат и Лапласа по времени. Оригиналы находятся аналитически с использованием свойств преобразований. Приведены примеры расчета регулярных частей решения. В статье [89] рассматривается краевая задача динамической теории пороупругости для составного тела. В [90] рассматриваются трехмерные постановки краевых динамических задач пористого полупространства. Решения строятся в рамках полной сжимаемой модели Био и дается оценка решениям по дренированным и недренированным моделям материала. В статье [91] представлен метод исследования волновых полей в неоднородном пористоупругом слое из трансверсально-изотропного материала. Характеристики слоя считаются переменными по толщине. К основным уравнениям, записанным в терминах «перемещения–давление», применяется интегральное преобразование Фурье. Решение преобразованной задачи строится при помощи метода пристрелки. Обращение преобразования Фурье осуществлено численно с использованием теории вычетов. В [92] рассматривается коэффициентная

обратная задача о нахождении пороупругих характеристик неоднородного полого цилиндра. Прямая задача пороупругости для цилиндра решается с помощью метода пристрелки. В качестве дополнительной информации при решении обратной задачи выступает измеренное смещение или поровое давление на внешней границе цилиндра. Для обратной задачи на основе метода линеаризации получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Пороупругие характеристики восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение. На втором этапе поправки к восстанавливаемым характеристикам определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. В статьях [93, 94] рассмотрено поведение плоских линейных монохроматических волн в насыщенных пористых средах. В публикациях [95–99] рассматривались закономерности взаимодействия фаз в среде и изменения продольных и поперечных волн в процессе их распространения. В статьях [100–103] дано математическое описание нестационарных процессов, протекающих в изотропных пористых средах. В [104, 105] установлена связь между волновыми полями в среде, определены и исследованы коэффициенты отражения на свободной границе пористого полупространства.

Некоторые аспекты распространения упругих волн во флюидонасыщенных и анизотропных пористых телах освещены в публикациях [106–115]. С применением различных схем при решении нестационарных задач пороупругости можно познакомиться в [116–134].

Метод граничных элементов в задачах пороупругости

МГЭ [135] – универсальный численно-аналитический метод. Сравнение методов граничных и конечных элементов приведено в [136]. МГЭ неявно удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда [137], что делает МГЭ пригодным для задач неограниченными областями [138].

Для исследования задачи о распространении волны методом граничных элементов требуются соответствующие граничные интегральные уравнения и фундаментальные решения. В статьях [139, 140] представлены двух- и трехмерные фундаментальные решения для задач статического и квазистатического деформирования ненасыщенных грунтов как в области преобразования Лапласа, так и во временной области. Фундаментальные решения задач из [139, 140], но с учетом температурных эффектов, представлены в статьях [141–143]. Решения от действия сосредоточенной силы (функция Грина) были получены в [139] как в частотной, так и во временной областях с использованием метода Купрадзе. В [144] дано описание распространения и затухания волн Рэлея, возникающих от источника нагружения, вдоль свободной поверхности ненасыщенного слоя грунта. В [145] исследована задача Лэмба для полупространства и получена динамическая реакция ненасыщенных грунтов с использованием метода интегрального преобразования. В [146] с помощью методов интегрального преобразования построена функция Грина в преобразованной области для произвольной внутренней гармонической нагрузки, залегающей в ненасыщенном грунте. Публикации по выводу фундаментальных решений для систем уравнений пороупругости имеют известную историю и разнообразие. Следует отметить исследования таких авторов, как R. Burridge, C.A. Vargas [147], A.N. Norris [148], G.D. Manolis, D.E. Beskos [149], A. Cheng и др. [150], M. Schanz, H. Antes [151], M. Schanz [152–154], M. Schanz, S. Diebels [155], M. Schanz, D. Pryl [156], M. Schanz [157],

V. Gattmiri и E. Jabbari [139, 140], A.H.-D. Cheng [158] и др. Отдельно можно выделить ранние формулировки ГИУ для пороупругости J. Dominguez [159, 160]. Подробности по отмеченным публикациям можно найти в [161–165].

В [166] приведены граничные интегральные формулировки и фундаментальные решения для динамического анализа ненасыщенных грунтов. В [167] представлена формулировка граничного элемента во временной области и проанализировано динамическое поведение трехмерных частично насыщенных пористых сред. Динамические формулировки ГИУ и фундаментальные решения для двухмерных задач построены в [168, 169], для трехмерных – в [167, 170]. В статье Игумнова Л.А. и др. [171] приведены уточненные выражения для компонент фундаментальных решений с учетом неточностей, допущенных авторами в [170]. Различные аспекты гранично-элементного моделирования ненасыщенных пористых сред рассмотрены в публикациях [172, 173]. Сравнение результатов применения ГИУ и МКЭ на конкретном примере можно найти в [174, 175].

Заключение

Как показывает анализ литературных источников и направлений исследований, основным направлением усовершенствования теории Био будет, очевидно, все более полный учет реальных свойств трехфазных, а в перспективе и многофазных континуумов. Это не означает ограничения исследований только учетом анизотропии и вязкости твердой фазы. Следует отметить, что применение прямых численных методов к задачам динамической пороупругости является широко распространенным подходом, и проблемы, возникающие в таких подходах, требуют отдельного детального исследования [176].

Список литературы

1. Lewis R.W., Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. Chichester–Weinheim–New York–Brisbane–Singapore–Toronto: John Wiley & Sons, 1999. 506 p.
2. Woltman R. *Beyträge zur hydraulischen Architektur. Dritter Band*. Gottingen: Johann Christian Dietrich, 1794.
3. Fick A. *Ueber Diffusion. Annalen der Physik und Chemie*. 1855. Band 94. S. 59–86.
4. Stefan J. Über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*. Wien: Der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, 1871. LXIII Band. II Abtheilung. S. 63–124.
5. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*. Wien: Akademie der Wissenschaften, 1923. Band 132. Abteilung IIa. S. 125–138.
6. Fillunger P. Der Auftrieb in Talsperren. *Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst*. Wien. 1913. Band 19. S. 532–556, 567–570.
7. Borja R.I. On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Iss. 6. P. 1764–1786. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.045.
8. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester: John Wiley and Sons, 2004. 298 p.
9. Coussy O. Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2007. Vol. 31. Iss. 15. P. 1675–1694. DOI: 10.1002/nag.613.
10. Gray W.G., Schrefler B.A. Analysis of the solid phase stress tensor in multiphase porous

- media. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2007. Vol. 31. Iss. 4. P. 541–581. DOI: 10.1002/nag.541.
11. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: I. Linear poroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. Iss. 16. P. 1807–1833. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00068-X.
 12. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: II. Lagrangian description and variational structure. *International Journal of Engineering Science*. 2002. Vol. 40. Iss. 16. P. 1835–1854. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00069-1.
 13. Френкель Я.И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. *Изв. АН СССР. Сер. География и геофизика*. 1944. Т. 8. №4. С. 133–150.
 14. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1962. Vol. 34. No 5. Pt. 1. P. 1254–1264.
 15. Biot M.A. Mechanics of deformational and acoustic propagation in porous media. *Journal of Applied Physics*. 1962. Vol. 33. No 4. P. 1482–1498.
 16. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *Journal of Applied Mechanics*. 1957. Vol. 24. No 4. P. 594–601.
 17. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of Applied Physics*. 1955. Vol. 26. No 2. P. 182–185.
 18. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. Iss. 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
 19. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1956. Vol. 28. Iss. 2. P. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
 20. Yew C.H., Jogi P.N. The determination of Biot's parameters for sandstone. *Experimental Mechanics*. 1978. Vol. 18. Iss. 5. P. 167–177. DOI: 10.1007/BF02324137.
 21. Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In: *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. Vol. II. Analysis and Design Method*. Ed. C. Fairhurst. Pergamon Press, 1993. P. 113–171.
 22. Санчес-Паленсия Э. *Неоднородные среды и теория колебаний*. М.: Мир, 1984. 472 с.
 23. Burridge R., Keller J. Poroelasticity equations derived from microstructure. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1981. Vol. 70. Iss. 4. P. 1140–1146. DOI: 10.1121/1.386945.
 24. Николаевский В.Н. *Механика пористых и трещиноватых сред*. М.: Недра, 1984. 232 с.
 25. Berryman J.G., Thigpen L. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids. *Journal of Applied Mechanics*. 1985. Vol. 52. Iss. 2. P. 345–350. DOI: 10.1115/1.3169051.
 26. Whitaker S. Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transport in Porous Media*. 1986. Vol. 1. Iss. 2. P. 105–125. DOI: 10.1007/BF00714688.
 27. Pride S.R., Gangi A.F., Morgan F.D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1992. Vol. 6. Iss. 6. P. 3278–3290. DOI: 10.1121/1.404178.
 28. Молотков Л.А. *Исследования распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. СПб.: Наука, 2001. 347 с.
 29. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. *Механика насыщенных пористых сред*. М.: Недра, 1970. 355 с.
 30. Mavko G.M., Nur A. Wave attenuation in partially saturated rocks. *Geophysics*. 1979. Vol. 44. Iss. 2. P. 161–178. DOI: 10.1190/1.1440958.
 31. Mavko G., Nur A. Melt squirt in aethnosphere. *Journal of Geophysical Research*. 1975. Vol. 80. Iss. 11. P. 1444–1448.
 32. O'Connell R.J., Budiansky B. Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids. *Journal of Geophysical Research*. 1977. Vol. 82. P. 5719–5735. DOI: 10.1029/JB082I036P05719.
 33. Jones T. Pore fluids and frequency-dependent wave propagation in rocks. *Geophysics*. 1986. Vol. 51. Iss. 10. P. 1939–1953. DOI: 10.1190/1.1442050.

34. Parra J.O. Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permeability anisotropy. *Geophysics*. 2000. Vol. 65. Iss. 1. P. 202–210. DOI: 10.1190/1.1444711.
35. Parra J.O. The transversely isotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application. *Geophysics*. 1997. Vol. 62. Iss. 1. P. 309–318. DOI: 10.1190/1.1444132.
36. Sheng D. Review of fundamental principles in modelling unsaturated soil behavior. *Computers and Geotechnics*. 2011. Vol. 38. Iss. 6. P. 757–776. DOI: 10.1016/J.COMPGeo. 2011.05.002.
37. Truesdell C.A. Sulle basi della termodinamica delle miscele. *Rendiconti Lincei*. 1968. Vol. 44. P. 381–383.
38. Truesdell C.A. Sulle basi della termomeccanica. *Rendiconti Lincei*. 1957. Vol. 22. P. 33–38.
39. Truesdell C.A., Toupin R.A. The classical field theories. In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Handbuch der Physik*. Ed. S. Flügge. 1960. Vol. 1. P. 226–902. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.
40. Adkins J.E. Diffusion of fluids through aotropic highly elastic solids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 15. Iss. 3. P. 222–234.
41. Green A.E., Adkins J.E. A contribution to the theory of non-linear diffusion. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1964. Vol. 15. Iss. 3. P. 235–246.
42. Bowen R.M. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1967. Vol. 24. Iss. 5. P. 370–403.
43. Bowen R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixture. *International Journal of Engineering Science*. 1982. Vol. 20. Iss. 6. P. 697–735. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90082-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90082-9).
44. Bowen R.M. Theory of mixtures. In: *Continuum Physics*. Ed. A.C. Eringen. Vol. III. New York: Academic Press, 1976. P. 1–127.
45. Bowen R.M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*. 1980. Vol. 18. Iss. 9. P. 1129–1148. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(80\)90114-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(80)90114-7).
46. Ehlers W. On thermodynamics of elasto-plastic porous media. *Archives of Mechanics*. 1989. Vol. 41. Iss. 1. P. 73–93.
47. Müller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. 1968. Vol. 28. Iss. 1. P. 1–39. DOI: 10.1007/BF00281561.
48. Lu J.F., Hanyga A. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids. *International Journal of Solids and Structures*. 2005. Vol. 42. No 9. P. 2689–2709.
49. Bowen R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *International Journal of Engineering Science*. 1982. Vol. 20. Iss. 6. P. 697–735. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90082-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90082-9).
50. Schanz M., Diebels S. A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta Mechanica*. 2003. Vol. 161. Iss. 3-4. P. 213–235. DOI:10.1007/s00707-002-0999-5Ac.
51. Philippacopoulos A. Lamb's problem for fluid-saturated, porous media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1988. Vol. 78. No 2. P. 908–923. <https://doi.org/10.1785/BSSA0780020908>.
52. Yazdi J.T., Valliappan S., Zhao C.B. Analytical and numerical solutions for wave propagation in water-saturated porous layered half-space. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 1994. Vol. 13. Iss. 4. P. 249–257. DOI: 10.1016/0267-7261(94)90029-9.
53. Jin B., Liu H. Dynamic response of a poroelastic half space to horizontal buried loading. *International Journal of Solids and Structures*. 2001. Vol. 38. Iss. 44-45. P. 8053–8064. DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00415-7.
54. Philippacopoulos A.J. Waves in partially saturated medium due to surface loads. *Journal of Engineering Mechanics*. 1988. Vol. 114. Iss. 10. P. 1740–1759. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:10(1740).
55. Smeulders D.M.J., De La Rosette J.P.M., Van Dongen M.E.H. Waves in partially saturated porous media. *Transport in Porous Media*. 1992. Vol. 9. Iss. 1-2. P. 25–37.
56. Shan Z.D., Ling D.S., Ding H.J. Exact solutions for the one-dimensional transient response

- of unsaturated single-layer porous media. *Computers and Geotechnics*. 2013. Vol. 48. P. 127–133. DOI: 10.1016/j.compgeo.2012.08.001.
57. Lo W.-C., Sposito G., Majer E. Low-frequency dilatational wave propagation through unsaturated porous media containing two immiscible fluids. *Transport in Porous Media*. 2007. Vol. 68. Iss. 1. P. 91–105. DOI: 10.1007/s11242-006-9059-2.
58. Albers B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model. *Transport in Porous Media*. 2009. T. 80. Iss. 1. P. 173–192. DOI: 10.1007/S11242-009-9360-Y.
59. Vgenopoulou I., Beskos D.E. Dynamics of saturated rocks. IV: Column and borehole problems. *Journal of Engineering Mechanics*. 1992. Vol. 118. Iss. 9. P. 1795–1813. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:9(1795).
60. Li P., Schanz M. Wave propagation in a 1-D partially saturated poroelastic column. *Geophysical Journal International*. 2011. Vol. 184. Iss. 3. P. 1341–1353. DOI: 10.1111/J.1365-246X.2010.04913.X.
61. Boer R., Ehlers W., Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. *Archive of Applied Mechanics*. 1993. Vol. 63. Iss. 1. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF00787910.
62. Schanz M., Cheng A.H.-D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mechanica*. 2000. Vol. 145. Iss. 1–4. P. 1–18.
63. Igumnov L., Petrov A., Vorobtsov I. One-dimensional wave propagation in a three phase poroelastic column. *Key Engineering Materials*. 2016. Vol. 685. P. 276–279. DOI:10.4028/www.scientific.net/KEM.685.276.
64. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media. *Journal of Applied Physics*. 1974. Vol. 45. Iss. 5. P. 1968–1974. DOI: 10.1063/1.1663532.
65. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 030803-1–030803-15. DOI: 10.1115/1.3090831.
66. Tan T.-S., Phoon K.-K., Chong P.-C. Numerical study of finite element method based solutions for propagation of wetting fronts in unsaturated soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*. 2004. Vol. 130. Iss. 3. P. 254–263. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:3(254).
67. Sheng D., Sloan S.W., Gens A., Smith D.W. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2003. Vol. 27. Iss. 9. P. 745–765. DOI: 10.1002/NAG.295.
68. Callari C., Abati A. Finite element methods for unsaturated porous solids and their application to dam engineering problems. *Computers and Structures*. 2009. Vol. 87. Iss. 7-8. P. 485–501. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.12.012.
69. Thomas S.D. A finite element model for the analysis of wave induced stresses, displacements and pore pressures in an unsaturated seabed I: Theory. *Computers and Geotechnics*. 1989. Vol. 8. Iss. 1. P. 1–38. DOI: 10.1016/0266-352X(89)90055-4.
70. Dreyer D., Petersen D.S., von Estorff O. Effectiveness and robustness of improved infinite elements for exterior acoustics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2006. Vol. 195. Iss. 29–32. P. 3591–3607. DOI: 10.1016/J.CMA.2005.01.019.
71. Liu G.R., Quek Jerry S.S. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method. *Finite Elements in Analysis and Design*. 2003. Vol. 39. Iss. 5-6. P. 403–417. DOI: 10.1016/S0168-874X(02)00081-1.
72. Сорокин К.Э., Имомназаров Х.Х. Численное решение линейной двумерной динамической задачи для пористых сред. *Журнал Сибирского федерального университета. Сер. Математика и физика*. 2010. Т. 3. Вып. 2. С. 256–261.
73. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Моделирование динамики частично насыщенных поропругих тел на основе метода гранично-временных элементов. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. №3. С. 47–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.03.
74. Имомназаров Х.Х., Туйчиева С.Т. Сосредоточенная сила в однородной изотропной пористой среде. *Интерэкспо Гео-Сибирь*. 2015. Т. 4. №1. С. 201–204.

75. Abbas I.A., Abd-alla A.N. A two dimensional wave propagation in a poroelastic infinite circular cylinder. *Journal of Physics*. 2012. Vol. 1. No 3. P. 32–38.
76. Донцов В.Е., Накоряков В.Е. Распространение ударных волн в пористой среде, насыщенной жидкостью с пузырьками растворимого газа. *Прикладная механика и техническая физика*. 2000. Т. 41. №5. С. 91–102.
77. Meissner H., Becker A. Dynamic behaviour of partially saturated sand. *WIT Transactions on the Built Environment*. 1970. Vol. 15. P. 45–55. DOI: 10.2495/SD950061.
78. Degrande G., Roeck G., Broeck P.V., Smeulders D. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *International Journal of Solids and Structures*. 1998. Vol. 35. Iss. 34-35. P. 4753–4778. DOI: 10.1016/S0020-7683(98)00093-6.
79. Yang J., Sato T. Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a porous soil interface induced by incident P wave. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2000. Vol. 19. Iss. 8. P. 575–581. [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(00\)00067-1](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(00)00067-1).
80. Velea D., Shields F., Sabatier J. Elastic wave velocities in partially saturated Ottawa sand: Experimental results and modeling. *Soil Science Society of America Journal*. 2000. Vol. 64. Iss. 4. P. 1226–1234. DOI: 10.2136/SSSAJ2000.6441226X.
81. Schrefler B.A., Scotta R. A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190. Iss. 24-25. P. 3223–3246. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(00\)00390-x](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00390-x).
82. Jian-Xin N., Ding-Hui Y., Hui-Zhu Y. Wave dispersion and attenuation in partially saturated sandstones. *Chinese Physics Letters*. 2004. Vol. 21. Iss. 3. P. 572–575. DOI: 10.1088/0256-307X/21/3/044.
83. Carcione J.M., Cavallini F., Santos J.E. et al. Wave propagation in partially saturated porous media: simulation of a second slow wave. *Wave Motion*. 2004. Vol. 39. Iss. 3. P. 227–240. DOI: 10.1016/J.WAVEMOTI.2003.10.001.
84. Wang Z., Lu Y., Hao H. Numerical investigation of effects of water saturation on blast wave propagation in soil mass. *Journal of Engineering Mechanics*. 2004. Vol. 130. Iss. 5. P. 551–561. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:5(551).
85. Вернигора Г.Д., Еремеев В.А., Соловьев А.Н. Определение эффективных свойств композиционных материалов на основе конечно-элементного моделирования в AСЕLAN. *Вестник РГУПС*. 2011. №1(41). С. 9–12.
86. Усошина Е.А., Суворова Т.В., Соловьев А.Н. Математические модели динамических систем, включающих слоистые обводненные пористоупругие основания. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2016. №3(86). С. 10–16. DOI: 10.12737/20215.
87. Соловьев А.Н., Панфилов И.А. Конечно-элементное моделирование индентирования пороупругого водонасыщенного материала. *XXXI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральному и эволюционному задачам (КРОМШ-2020): Сб. матер. междунар. конф., посвященной памяти Николая Дмитриевича Копачевского*. Пос. Батилиман, Республика Крым, 19–27 сент. 2020 г. С. 260–263.
88. Данг К.З., Тарлаковский Д.В. Действие на границу упруго-пористого полупространства с касательной диафрагмой нестационарной нормальной осесимметричной нагрузки. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2014. Т. 20. №1. С. 148–158.
89. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Тарлаковский Д.В., Локтева Н.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Т. 75. Ч. 2. С. 130–136. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-130-136>.
90. Игумнов Л.А., Оконечников А.С., Тарлаковский Д.В., Белов А.А. Гранично-элементный анализ волн на упругом, пористо-вязкоупругом полупространствах. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 2. С. 145–151. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2013-75-2-145-151>.
91. Ватульян А.О., Гусаков Д.В. Исследование волновых процессов в неоднородном пористоупругом слое. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Сер.: Естественные науки*. 2017. №2(194). С. 4–11.
92. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородных пороупругих характеристик полого цилиндра. *Проблемы прочности и пластичности*. 2016. Т. 78. №1. С. 22–29. <https://doi.org/10.32326/1814-9146-2016-78-1-22-29>.

93. Якубов С.Х. Исследование импульсных возмущений в насыщенных пористых средах. *Сибирский физико-технический журнал*. 1992. №5. С. 151–154.
94. Якубов С.Х. Исследование импульсных возмущений в насыщенных пористых средах. *Актуальные вопросы теплофизики и физической гидрогазодинамики: Тез. докл. 4 Всесоюз. конф. молодых исслед.* Новосибирск, 29-30 марта 1991 г. С. 82–83.
95. Галиев Ш.У. *Динамика взаимодействия элементов конструкций с волной давления в жидкости*. Киев: Наукова думка, 1977. 172 с.
96. Салиев А.А. Взаимодействие нестационарных волн со сферическими границами раздела в упруго-пористой среде, насыщенной жидкостью: *Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук*. 01.02.04. Ташкент, 1989. 126 с.
97. Салиев А.А. Движение абсолютно твердого шара в упруго-пористой среде под действием нестационарных волн. *Механика неоднородных структур: Тез. докл. Всесоюз. конф.* Львов, 6–8 сент. 1987 г. Т. I. 1987. С. 245.
98. Трофимчук А.Н. Асимптотические решения нестационарных контактных задач для насыщенных жидкостью пористоупругих сред. *Смешанные задачи механики деформируемого тела: Тез. докл. IV Всесоюз. конф.* Одесса, 26–29 сент. 1989 г. Ч. 2. 1989. С. 111.
99. Трофимчук А.Н. Численное моделирование динамического поведения пористоупругой насыщенной жидкостью среды. *Доповіди НАН України*. 1998. №11. С. 44–48.
100. Келбалиев Г.И. Математическое описание нестационарных процессов, протекающих в изотропных пористых средах, квазиконтинуальными моделями. *Теоретические основы химической технологии*. 1985. Т. 19. №2. С. 199–206.
101. Масликова Т.И., Поленов В.С. Нестационарные упругие волны в пористых материалах. *Известия Инженерно-технологической академии Чувашской Республики*. 1999. С. 125–130.
102. Масликова Т.И., Поленов В.С. О нестационарных упругих волнах в пористых материалах. *Изв. РАН. МТТ*. 2001. №6. С. 103–107.
103. Масликова Т.И., Поленов В.С. О распространении нестационарных упругих волн в однородных пористых средах. *Изв. РАН. МТТ*. 2005. №1. С. 104–108.
104. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. The features of the massive foundation dynamics on the surface of the fluid-saturated porous medium. *Waves Saturated Porous Media: Abstracts of the Conference*. Poznan, 28–31 Aug. 1990. P. 17.
105. Carter J.P., Booker J.R. Analysis of pumping a compressible pore fluid from a saturated elastic half space. *Computers and Geotechnics*. 1987. Vol. 4. Iss. 1. P. 21–42. DOI: 10.1016/0266-352X(87)90023-1.
106. Rudnicki J.W. Linear poroelasticity. In: Lemaitre J. *Handbook of Materials Behavior Models. Section 11.6*. Academic Press, 2001. P. 1118–1125.
107. Geertsma J., Smit D.C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids. *Geophysics*. 1961. Vol. XXVI. No 2. P. 169–181. <https://doi.org/10.1190/1.1438855>.
108. Sharma M.D. Wave propagation in a general anisotropic poroelastic medium: Biot's theories and homogenization theory. *Journal of Earth System Science*. 2007. Vol. 116. Iss. 4. P. 357–367. DOI: 10.1007/S12040-007-0033-3.
109. Богачев И.В., Дударев В.В., Ляпин А.А. Воздействие сосредоточенного усилия на анизотропную пороупругую плоскость. *Инженерный вестник Дона*. 2013. Т. 26. №3. С. 1–5.
110. Ковтун Ал.А. Об уравнениях модели Био и их модификациях. *Вопросы геофизики*. 2011. Вып. 44. С. 3–26.
111. Ковтун Ал.А. Поверхностные волны на границе упруго-пористой среды и жидкости. *Вопросы геофизики*. 2013. Вып. 46. С. 14–25.
112. Auriault J., Borne L., Chambon R. Dynamic of porous saturated media, checking of generalized law Darcy. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1985. Vol. 77. Iss. 5. P. 1641–1650. DOI: 10.1121/1.391962.
113. Абдуллаев С.А., Соатов А.С. Распространение упругих волн, вызванных движущейся нагрузкой, в изотропном пористом полупространстве, насыщенном жидкостью. *Изв. АН УзССР. Сер.: Техн. науки*. 1986. №6. С. 64–67.
114. Артиков Т.У. *Волны в слоистых пористых средах*. Ташкент: Фан, 1987. 268 с.
115. Гарипов Т.Т., Заславский М.Ю., Пергамент А.Х. Математическое моделирование

процессов фильтрации и пороупругости. *Математическое моделирование*. 2005. Т. 17. №9. С. 113–128.

116. Acharya D.P., Mondal A. Reflection of longitudinal displacement plane waves from the flat boundary of a solid elastic half-space containing a distribution of void pores. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2008. Vol. 13. No 3. P. 609–625.

117. Armero F., Simo J.C. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992. Vol. 35. Iss. 4. P. 737–766. <https://doi.org/10.1002/nme.1620350408>.

118. Birendra J., Ruben J. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotechnica*. 2007. Vol. 2. Iss. 3. P. 139–153. DOI: 10.1007/s11440-007-0033-0.

119. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W., Wienands R. A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system. *Numerical Linear Algebra with Applications*. 2004. Vol. 11. Iss. 2-3. P. 93–113. <https://doi.org/10.1002/nla.372>.

120. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W. On a decoupled algorithm for poroelasticity and its resolution by multigrid. *ECCOMAS CFD 2006: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics*. Delft, 05–09 Sept. 2006. P. 1–6.

121. Gaspar F.J., Grigoriev A., Vabishchevich P. Explicit-implicit splitting schemes for some systems of evolutionary equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*. 2014. Vol. 11. No 2. P. 346–357.

122. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Vabishchevich P.N. A finite difference analysis of Biot's consolidation model. *Applied Numerical Mathematics*. 2003. Vol. 44. Iss 4. P. 487–506. DOI: 10.1016/S0168-9274(02)00190-3.

123. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W., Vabishchevich P. An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2007. Vol. 196. Iss. 8. P. 1447–1457. DOI: 10.1016/j.cma.2006.03.020.

124. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Vabishchevich P.N. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot's consolidation problem. *Applied Numerical Mathematics*. 2006. Vol. 56. Iss. 6. P. 888–898. DOI: 10.1016/j.apnum.2005.07.002.

125. Kim J., Tchelepi H., Juanes R. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *SPE Journal*. 2011. Vol. 12. P. 249–262. DOI: 10.2118/119084-MS.

126. Mikelić A., Wheeler M.F. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Computational Geosciences*. 2013. Vol. 17. No 3. P. 455–461. DOI: 10.1007/s10596-012-9318-y.

127. Osorio J.G., Chen H.-Y., Teufel L., Schaffer S. A two-domain, 3D, fully coupled fluid-flow/geomechanical simulation model for reservoirs with stress-sensitive mechanical and fluid-flow properties. *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*. Trondheim, Norway, July 1998. Paper No SPE-47397-MS. DOI: 10.2118/47397-MS.

128. Osorio J.G., Chen H.-Y., Teufel L. Numerical simulation of the impact of flow-induced/geomechanical response on the productivity of stress-sensitive reservoirs. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Houston, Texas, Feb. 1999. Paper No SPE-51929-MS 1999. DOI: 10.2118/51929-MS.

129. Osorio J.G., Chen H.-Y. Numerical simulation of coupled fluid-flow/ geomechanical behavior of tight gas reservoirs with stress sensitive permeability. *SPE Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition*. Rio de Janeiro, Brazil, Aug. 1997. Paper No SPE-39055-MS. DOI: 10.2118/39055-MS.

130. Wang J.-H., Lu F.J.-F., Zhou X.-L. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a porous medium. *European Journal of Mechanics*. 2009. Vol. 28. Iss. 3. P. 582–590. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.09.005.

131. Колесов А.Е. Численное моделирование проблем пороупругости. *Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук*: 05.13.18. Якутск, 2014. 124 с.

132. Костерин А.В., Павлова М.Ф., Шемуранова Е.В. Численное исследование фильтрационной консолидации. *Математическое моделирование*. 2001. Т. 13. №9. С. 63–70.

133. Мусаев В.К. Метод конечных элементов в задаче об отражении плоских продольных волн напряжений в виде дельта-функции от свободной поверхности. *Вестник Российского*

университета дружбы народов. Серия Проблемы комплексной безопасности. 2008. №1. С. 43–51.

134. Павлова М.Ф., Рунг Е.В. Исследование неявной разностной схемы для задачи насыщенно-ненасыщенной фильтрационной консолидации. *Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* 2012. Т. 154. Кн. 4. С. 33–48.

135. Sun Y. Indirect boundary integral equation method for the Cauchy problem of the Laplace equation. *Journal of Scientific Computing.* 2017. Vol. 71. Iss. 2. P. 469–498. DOI: 10.1007/s10915-016-0308-4.

136. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями.* М.: Физматлит, 2008. 352 с.

137. Matthias Messner: Fast Boundary element methods in acoustics. Eds. G. Brenn, G. Holzapfel, W. von der Linden, M. Schanz, O. Steinbach. *Monographic Series TU Graz. Computation in Engineering and Science.* Vol. 13. Edition 1. Graz: Verlag der Technischen Universität Graz, 2012. 131 p.

138. Gaul L., Schanz M. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* 1999. Vol. 179. Iss. 1. P. 111–123.

139. Gatmiri B., Jabbari E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part I: Two-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures.* 2005. Vol. 42. No 23. P. 5971–5990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.039.

140. Gatmiri B., Jabbari E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part II: Three-dimensional solution. *International Journal of Solids and Structures.* 2005. Vol. 42. Iss. 23. P. 5991–6002. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2005.03.039.

141. Jabbari E., Gatmiri B. Thermo-poro-elastostatic Green's functions for unsaturated soils. *Computer Modeling in Engineering & Sciences.* 2008. Vol. 504. No 1. P. 1–13.

142. Gatmiri B., Maghoul P., Duhamel D. Two-dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of multiphase porous media in frequency and time domains. *International Journal of Solids and Structures.* 2010. Vol. 47. Iss. 5. P. 595–610. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.10.022.

143. Maghoul P., Gatmiri B., Duhamel D. Three-dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.* 2010. Vol. 34. Iss. 3. P. 297–329. DOI: 10.1002/NAG.820.

144. Lo W.-C. Propagation and attenuation of Rayleigh waves in a semi-infinite unsaturated poroelastic medium. *Advances in Water Resources.* 2008. Vol. 31. Iss. 10. P. 1399–1410. DOI: 10.1016/j.advwatres.2008.07.00.

145. Xu M. Investigation on dynamic response of unsaturated soils and foundation. *Ph. D. Thesis.* Guangzhou, China. 2010 (In Chinese).

146. Zhang M., Wang X., Yang G., Xie L. Solution of dynamic Green's function for unsaturated soil under internal excitation. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering.* 2014. Vol. 64. P. 63–84. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2014.05.001.

147. Burridge R., Vargas C.A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophysical Journal International.* 1979. Vol. 58. Iss. 1. P. 61–90. DOI: 10.1111/J.1365-246X.1979.TB01010.X.

148. Norris A.N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid. *Journal of the Acoustical Society of America.* 1985. Vol. 77. Iss. 6. P. 2012–2023. DOI: 10.1121/1.391773.

149. Manolis G.D., Beskos D.E. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mechanica.* 1989. Vol. 76. P. 89–104. DOI: 10.1007/BF01175798.

150. Cheng A., Badmus T., Beskos D. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. *Journal of Engineering Mechanics ASCE.* 1991. Vol. 117. Iss. 5. P. 1136–1157. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:5(1136).

151. Schanz M., Antes H. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Computational Mechanics.* 1997. Vol. 20. Iss. 5. P. 452–459. DOI: 10.1007/s004660050265.

152. Schanz M. A boundary element formulation in time domain for viscoelastic solids.

Communications in Numerical Methods in Engineering. 1999. Vol. 15. Iss. 11. P. 799–809. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199911\)15:11<799::AID-CN294>3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199911)15:11<799::AID-CN294>3.0.CO;2-F).

153. Schanz M. Application of 3D time-domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2001. Vol. 25. Iss. 4-5. P. 363–376. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00022-4.

154. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: a boundary element approach. *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Vol. 2. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

155. Schanz M., Diebels S. A comparative study of Biots theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta Mechanica*. 2003. Vol. 161. Iss. 3-4. P. 213–235. DOI: 10.1007/s00707-002-0999-5Ac.

156. Schanz M., Pryl D. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua. *International Journal of Solids and Structures*. 2004. Vol. 41. Iss. 15. P. 4047–4073. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2004.02.059.

157. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions and numerical methods. *Applied Mechanics Reviews*. 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 1–15. DOI: 10.1115/1.3090831.

158. Cheng A.H.-D. Poroelasticity. Part of: *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Vol. 27. Springer, 2016. 903 p.

159. Dominguez J. An integral formulation for dynamic poroelasticity. *Journal of Applied Mechanics ASME*. 1991. Vol. 58. Iss. 2. P. 588–591. DOI: 10.1115/1.2897229.

160. Dominguez J. Boundary element approach for dynamic poroelasticity problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1992. Vol. 35. Iss. 2. P. 307–324. DOI: 10.1002/NME.1620350206.

161. Gatzmiri B., Kamalian M. On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in time domain. *International Journal of Geomechanics*. 2002. Vol. 2. Iss. 4. P. 381–398. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2002)2:4(381).

162. Gatzmiri B., Nguyen K.V. Time 2D fundamental solution for saturated porous media with incompressible fluid. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2005. Vol. 21. Iss. 3. P. 119–132. DOI: 10.1002/CNM.732.

163. Seyrafiyan S., Gatzmiri B., Nourzad A. Green functions for a continuously non-homogenous saturated media. *Computational Modeling in Engineering Science*. 2006. Vol. 15. No 2. P. 115–125. DOI: 10.3970/CMES.2006.015.115.

164. Gatzmiri B., Eslami H. Scattering of harmonic waves by a circular cavity in a porous medium: complex functions theory approach. *International Journal of Geomechanics*. 2007. Vol. 7. Iss. 5. P. 371–381. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2007)7:5(371).

165. Pan E., Maier E. A symmetric boundary integral approach to transient poroelastic analysis. *Computational Mechanics*. 1997. Vol. 19. Iss. 3. P. 169–178.

166. Maghoul P., Gatzmiri B., Duhamel D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2011. Vol. 31. Iss. 11. P. 1480–1495. DOI: 10.1016/j.soildyn.2011.05.016.

167. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. DOI: 10.1016/J.ENGANABOUND.2013.08.002.

168. Maghoul P., Gatzmiri B., Duhamel D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2011. Vol. 31. Iss. 11. P. 1480–1495. DOI: 10.1016/j.soildyn.2011.05.016.

169. Sun L., Wei X., Chen B. A meshless singular boundary method for elastic wave propagation in 2D partially saturated poroelastic media. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020. Vol. 113. P. 82–98. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.12.019.

170. Ashayeri I., Kamalian M., Kazem M. et al. Analytical 3D transient elastodynamic fundamental solution of unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2011. Vol. 35. Iss. 17. P. 1801–1829. <https://doi.org/10.1002/nag.978>.

171. Igumnov L.A., Petrov A.N., Belov A.A. et al. Numerically-analytically studying fundamental solutions of 3-D dynamics of partially saturated poroelastic bodies. *Materials Physics and Mechanics*. 2019. Vol. 42. P. 596–601. DOI: 10.18720/MPM.4252019_12.

172. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Моделирование динамики частично насыщенных поро-

упругих тел на основе метода гранично-временных элементов. *Вестник ПНИПУ. Механика*. 2016. №3. С. 47–61. DOI: 10.15593/perm.mech/2016.3.03.

173. Игумнов Л.А., Григорьев М.В. Расчет отклика цилиндрической полости в пороупругом полупространстве на динамическое воздействие методом граничных элементов. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Матер. XXVII Международ. симпозиума им. А.Г. Горшкова*. Москва, 17–21 мая 2021 г. С. 112–114.

174. Theodorakopoulos D.D., Beskos D.E. Application of Biot's poroelasticity to some soil dynamics problems in civil engineering. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2006. Vol. 26. Iss. 6-7. P. 666–679. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2006.01.016.

175. Albers B., Savidis S.A., Tasan H.E., Estorff O.V., Gehlken M. BEM and FEM results of displacements in a poroelastic column. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*. 2012. Vol. 22. No 4. P. 883–896. DOI: 10.2478/v10006-012-0065-y.

176. Вовк Л.П., Лисянец А.В. Проблемы аналитического подхода к задачам деформирования многофазных сред и грунтов. *Вести Автомобильно-дорожного института*. 2017. №4(23). С. 18–35.

References

1. Lewis R.W., Schrefler B.A. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. Chichester. Weinheim. New York. Brisbane. Singapore. Toronto. John Wiley & Sons. 1999. 506 p.

2. Woltman R. *Beyträge zur hydraulischen Architektur. Dritter Band*. Göttingen. Johann Christian Dietrich. 1794.

3. Fick A. *Ueber Diffusion*. *Annalen der Physik und Chemie*. 1855. Band 94. S. 59–86.

4. Stefan J. Über das Gleichgewicht und die Bewegung, insbesondere die Diffusion von Gasgemengen. *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*. Wien. Der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. 1871. LXIII Band. II Abtheilung. S. 63–124.

5. Terzaghi K. Die Berechnung der Durchlässigkeitsziffer des Tones aus dem Verlauf der hydrodynamischen Spannungserscheinungen. *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse*. Wien. Akademie der Wissenschaften. 1923. Band 132. Abteilung IIa. S. 125–138.

6. Fillunger P. Der Auftrieb in Talsperren. *Österreichische Wochenschrift für den öffentlichen Baudienst*. Wien. 1913. Band 19. S. 532–556, 567–570.

7. Borja R.I. On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua. *Int. J. Solids Struct.* 2006. Vol. 43. Iss. 6. P. 1764–1786. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.04.045.

8. Coussy O. *Poromechanics*. Chichester. John Wiley and Sons. 2004. 298 p.

9. Coussy O. Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept. *Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech.* 2007. Vol. 31. Iss. 15. P. 1675–1694. DOI: 10.1002/nag.613.

10. Gray W.G., Schrefler B.A. Analysis of the solid phase stress tensor in multiphase porous media. *Int. J. Numer. Anal. Methods in Geomech.* 2007. Vol. 31. Iss. 4. P. 541–581. DOI: 10.1002/nag.541.

11. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: I. Linear poroelasticity. *Int. J. Eng. Sci.* 2002. Vol. 40. Iss. 16. P. 1807–1833. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00068-X.

12. Wei C., Muraleetharan K.K. A continuum theory of porous media saturated by multiple immiscible fluids: II. Lagrangian description and variational structure. *Int. J. Eng. Sci.* 2002. Vol. 40. Iss. 16. P. 1835–1854. DOI: 10.1016/S0020-7225(02)00069-1.

13. Frenkel Ya. I. K teorii seismicheskikh i seismoelektricheskikh yavleniy vo vlazhnoy pochve [To the theory of seismic and seismoelectrical phenomena in a moist soil]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Geografiya i Geofizika [News of the Academy of Sciences of USSR. Geographical and Geophysical Series]*. 1944. Vol. 8. No 4. P. 133–150 (In Russian).

14. Biot M.A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. *J. Acoust. Soc. Am.* 1962. Vol. 34. No 5. Pt 1. P. 1254–1264.

15. Biot M.A. Mechanics of deformational and acoustic propagation in porous media. *J. Appl. Phys.* 1962. Vol. 33. No 4. P. 1482–1498.

16. Biot M.A., Willis D.G. The elastic coefficients of the theory of consolidation. *J. Appl. Mech.* 1957. Vol. 24. No 4. P. 594–601.
17. Biot M.A. Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *J. Appl. Phys.* 1955. Vol. 26. No 2. P. 182–185.
18. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. Iss. 2. P. 168–178. DOI: 10.1121/1.1908239.
19. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. II. Higher-frequency range. *J. Acoust. Soc. Am.* 1956. Vol. 28. Iss. 2. P. 179–191. DOI: 10.1121/1.1908241.
20. Yew C.H., Jogi P.N. The determination of Biot's parameters for sandstone. *Exp. Mech.* 1978. Vol. 18. Iss. 5. P. 167–177. DOI: 10.1007/BF02324137.
21. Detournay E., Cheng A.H.-D. Fundamentals of poroelasticity. In: *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects. Vol. II. Analysis and Design Method.* Ed. C. Fairhurst. Pergamon Press. 1993. P. 113–171.
22. Sanchez-Palencia E. *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory.* New York. Springer-Verlag. 1980. 400 p.
23. Burridge R., Keller J. Poroelasticity equations derived from microstructure. *J. Acoust. Soc. Am.* 1981. Vol. 70. Iss. 4. P. 1140–1146. DOI: 10.1121/1.386945.
24. Nikolaevskii V.N. *Mekhanika poristykh i treshchinovatykh sred [Mechanics of Porous and Fractured Media]*. Moscow. Nedra Publ. 1984. 232 p. (In Russian).
25. Berryman J.G., Thigpen L. Linear dynamic poroelasticity with microstructure for partially saturated solids. *J. Appl. Mech.* 1985. Vol. 52. Iss. 2. P. 345–350. DOI: 10.1115/1.3169051.
26. Whitaker S. Flow in porous media. II. The governing equations for immiscible, two-phase flow. *Transp. Porous Media.* 1986. Vol. 1. Iss. 2. P. 105–125. DOI: 10.1007/BF00714688.
27. Pride S.R., Gangi A.F., Morgan F.D. Deriving the equations of motion for porous isotropic media. *J. Acoust. Soc. Am.* 1992. Vol. 6. Iss. 6. P. 3278–3290. DOI: 10.1121/1.404178.
28. Molotkov L.A. *Issledovaniya rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Biot i sloistykh sred [Studies of Wave Propagation in Porous and Fractured Media Based on Effective Biot Models and Layered Media]*. Saint Petersburg. Nauka. 2001. 347 p. (In Russian).
29. Nikolaevskii V.N., Basniev K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. *Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred [Mechanics of Saturated Porous Media]*. Moscow. Nedra Publ. 1970. 355 p. (In Russian).
30. Mavko G.M., Nur A. Wave attenuation in partially saturated rocks. *Geophysics.* 1979. Vol. 44. Iss. 2. P. 161–178. DOI: 10.1190/1.1440958.
31. Mavko G., Nur A. Melt squirt in aesthenosphere. *J. Geophys. Res.* 1975. Vol. 80. Iss. 11. P. 1444–1448.
32. O'Connell R.J., Budiansky B. Viscoelastic properties of fluid-saturated cracked solids. *J. Geophys. Res.* 1977. Vol. 82. P. 5719–5735. DOI: 10.1029/JB082I036P05719.
33. Jones T. Pore fluids and frequency-dependent wave propagation in rocks. *Geophysics.* 1986. Vol. 51. Iss. 10. P. 1939–1953. DOI: 10.1190/1.1442050.
34. Parra J.O. Poroelastic model to relate seismic wave attenuation and dispersion to permeability anisotropy. *Geophysics.* 2000. Vol. 65. Iss. 1. P. 202–210. DOI: 10.1190/1.1444711.
35. Parra J.O. The transversely isotropic poroelastic wave equation including the Biot and the squirt mechanisms: Theory and application. *Geophysics.* 1997. Vol. 62. Iss. 1. P. 309–318. DOI: 10.1190/1.1444132.
36. Sheng D. Review of fundamental principles in modelling unsaturated soil behavior. *Comput. Geotech.* 2011. Vol. 38. Iss. 6. P. 757–776. DOI: 10.1016/J.COMPGE0.2011.05.002.
37. Truesdell C.A. Sulle basi della termodinamica delle miscele. *Rendiconti Lincei.* 1968. Vol. 44. P. 381–383.
38. Truesdell C.A. Sulle basi della termomeccanica. *Rendiconti Lincei.* 1957. Vol. 22. P. 33–38.
39. Truesdell C.A., Toupin R.A. The classical field theories. In: *Principles of Classical Mechanics and Field Theory, Handbuch der Physik.* Ed. S. Flügge. 1960. Vol. 1. P. 226–902. DOI: 10.1007/978-3-642-45943-6_2.

40. Adkins J.E. Diffusion of fluids through aelotropic highly elastic solids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964. Vol. 15. Iss. 3. P. 222–234.
41. Green A.E., Adkins J.E. A contribution to the theory of non-linear diffusion. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1964. Vol. 15. Iss. 3. P. 235–246.
42. Bowen R.M. Toward a thermodynamics and mechanics of mixtures. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1967. Vol. 24. Iss. 5. P. 370–403.
43. Bowen R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixture. *Int. J. Eng. Sci.* 1982. Vol. 20. Iss. 6. P. 697–735. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90082-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90082-9).
44. Bowen R.M. Theory of mixtures. In: *Continuum Physics*. Ed. A.C. Eringen. Vol. III. New York. Academic Press. 1976. P. 1–127.
45. Bowen R.M. Incompressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* 1980. Vol. 18. Iss. 9. P. 1129–1148. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(80\)90114-7](https://doi.org/10.1016/0020-7225(80)90114-7).
46. Ehlers W. On thermodynamics of elasto-plastic porous media. *Arch. Mech.* 1989. Vol. 41. Iss. 1. P. 73–93.
47. Müller I. A thermodynamic theory of mixtures of fluids. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1968. Vol. 28. Iss. 1. P. 1–39. DOI: 10.1007/BF00281561.
48. Lu J.F., Hanyga A. Linear dynamic model for porous media saturated by two immiscible fluids. *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. No 9. P. 2689–2709.
49. Bowen R.M. Compressible porous media models by use of the theory of mixtures. *Int. J. Eng. Sci.* 1982. Vol. 20. Iss. 6. P. 697–735. [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90082-9](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90082-9).
50. Schanz M., Diebels S. A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta Mech.* 2003. Vol. 161. Iss. 3-4. P. 213–235. DOI: 10.1007/s00707-002-0999-5Ac.
51. Philippacopoulos A. Lamb's problem for fluid-saturated, porous media. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1988. Vol. 78. No 2. P. 908–923. <https://doi.org/10.1785/BSSA0780020908>.
52. Yazdi J.T., Valliappan S., Zhao C.B. Analytical and numerical solutions for wave propagation in water-saturated porous layered half-space. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 1994. Vol. 13. Iss. 4. P. 249–257. DOI: 10.1016/0267-7261(94)90029-9.
53. Jin B., Liu H. Dynamic response of a poroelastic half space to horizontal buried loading. *Int. J. Solids Struct.* 2001. Vol. 38. Iss. 44-45. P. 8053–8064. DOI: 10.1016/S0020-7683(00)00415-7.
54. Philippacopoulos A.J. Waves in partially saturated medium due to surface loads. *J. Eng. Mech.* 1988. Vol. 114. Iss. 10. P. 1740–1759. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1988)114:10(1740).
55. Smeulders D.M.J., De La Rosette J.P.M., Van Dongen M.E.H. Waves in partially saturated porous media. *Transp. Porous Media*. 1992. Vol. 9. Iss. 1-2. P. 25–37.
56. Shan Z.D., Ling D.S., Ding H.J. Exact solutions for the one-dimensional transient response of unsaturated single-layer porous media. *Comput. Geotech.* 2013. Vol. 48. P. 127–133. DOI: 10.1016/j.compgeo.2012.08.001.
57. Lo W.-C., Sposito G., Majer E. Low-frequency dilatational wave propagation through unsaturated porous media containing two immiscible fluids. *Transp. Porous Media*. 2007. Vol. 68. Iss. 1. P. 91–105. DOI: 10.1007/s11242-006-9059-2.
58. Albers B. Analysis of the propagation of sound waves in partially saturated soils by means of a macroscopic linear poroelastic model. *Transp. Porous Media*. 2009. T. 80. Iss. 1. P. 173–192. DOI: 10.1007/S11242-009-9360-Y.
59. Vgenopoulou I., Beskos D.E. Dynamics of saturated rocks. IV: Column and borehole problems. *J. Eng. Mech.* 1992. Vol. 118. Iss. 9. P. 1795–1813. DOI:10.1061/(ASCE)0733-9399(1992)118:9(1795).
60. Li P., Schanz M. Wave propagation in a 1-D partially saturated poroelastic column. *Geophys. J. Int.* 2011. Vol. 184. Iss. 3. P. 1341–1353. DOI: 10.1111/J.1365-246X.2010.04913.X.
61. Boer R., Ehlers W., Liu Z. One-dimensional transient wave propagation in fluid-saturated incompressible porous media. *Arch. Appl. Mech.* 1993. Vol. 63. Iss. 1. P. 59–72. DOI: 10.1007/BF00787910.
62. Schanz M., Cheng A.H.-D. Transient wave propagation in a one-dimensional poroelastic column. *Acta Mech.* 2000. Vol. 145. Iss. 1–4. P. 1–18.
63. Igumnov L., Petrov A., Vorobtsov I. One-dimensional wave propagation in a three phase

poroelastic column. *Key Engineering Materials*. 2016. Vol. 685. P. 276–279. DOI:10.4028/www.scientific.net/KEM.685.276.

64. Garg S.K., Nayfeh A.H., Good A.J. Compressional waves in fluid-saturated elastic porous media. *J. Appl. Phys.* 1974. Vol. 45. Iss. 5. P. 1968–1974. DOI: 10.1063/1.1663532.

65. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions, and numerical methods. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 030803-1–030803-15. DOI: 10.1115/1.3090831.

66. Tan T.-S., Phoon K.-K., Chong P.-C. Numerical study of finite element method based solutions for propagation of wetting fronts in unsaturated soil. *J. Geotech. Geoenviron.* 2004. Vol. 130. Iss. 3. P. 254–263. DOI: 10.1061/(ASCE)1090-0241(2004)130:3(254).

67. Sheng D., Sloan S.W., Gens A., Smith D.W. Finite element formulation and algorithms for unsaturated soils. Part I: Theory. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2003. Vol. 27. Iss. 9. P. 745–765. DOI: 10.1002/NAG.295.

68. Callari C., Abati A. Finite element methods for unsaturated porous solids and their application to dam engineering problems. *Comput. Struct.* 2009. Vol. 87. Iss. 7-8. P. 485–501. DOI: 10.1016/j.compstruc.2008.12.012.

69. Thomas S.D. A finite element model for the analysis of wave induced stresses, displacements and pore pressures in an unsaturated seabed I: Theory. *Comput. Geotech.* 1989. Vol. 8. Iss. 1. P. 1–38. DOI: 10.1016/0266-352X(89)90055-4.

70. Dreyer D., Petersen D.S., von Estorff O. Effectiveness and robustness of improved infinite elements for exterior acoustics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2006. Vol. 195. Iss. 29–32. P. 3591–3607. DOI: 10.1016/J.CMA.2005.01.019.

71. Liu G.R., Quek Jerry S.S. A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method. *Finite Elem. Anal. Des.* 2003. Vol. 39. Iss. 5-6. P. 403–417. DOI: 10.1016/S0168-874X(02)00081-1.

72. Sorokin K.E., Imomnazarov Kh.Kh. Chislennoe reshenie lineynoy dvumernoy dinamicheskoy zadachi dlya poristyykh sred [Numerical Solving of the liner two-dimensional dynamic problem in liquid-filled porous media]. *Zhurnal Sibirskogo federalnogo universiteta. Seriya: Matematika i fizika [Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics]*. 2010. Vol. 3. Iss. 2. P. 256–261 (In Russian).

73. Igumnov L.A., Petrov A.N. Modelirovanie dinamiki chastichno nasyshchennykh porouprugikh tel na osnove metoda granichno-vremennykh elementov [Dynamics of partially saturated poroelastic solids by boundary-element method]. *Vestnik PNIPU. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2016. No 3. P. 47–61 (In Russian).

74. Imomnazarov Kh.Kh., Tychieva S.T. Sosredotochennaya sila v odnorodnoy izotropnoy poristoy srede [Concentrated force in a homogeneous isotropic porous medium]. *Interespo Geo-Sibir*. 2015. Vol. 4. No 1. P. 201–204 (In Russian).

75. Abbas I.A., Abd-alla A.N. A two dimensional wave propagation in a poroelastic infinite circular cylinder. *J. Phys.* 2012. Vol. 1. No 3. P. 32–38.

76. Dontsov V.E., Nakoryakov V.E. Rasprostranenie udarnyykh voln v poristoy srede, nasyshchennoy zhidkostyu s puzyrkami rastvorimogo gaza [Propagation of shock waves in a porous medium saturated with a liquid with soluble gas bubbles]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2000. Vol. 41. No 5. P. 91–102 (In Russian).

77. Meissner H., Becker A. Dynamic behaviour of partially saturated sand. *WIT Transactions on the Built Environment*. 1970. Vol. 15. P. 45–55. DOI: 10.2495/SD950061.

78. Degrande G., Roeck G., Broeck P.V., Smeulders D. Wave propagation in layered dry, saturated and unsaturated poroelastic media. *Int. J. Solids Struct.* 1998. Vol. 35. Iss. 34-35. P. 4753–4778. DOI: 10.1016/S0020-7683(98)00093-6.

79. Yang J., Sato T. Influence of water saturation on horizontal and vertical motion at a porous soil interface induced by incident P wave. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2000. Vol. 19. Iss. 8. P. 575–581. [https://doi.org/10.1016/S0267-7261\(00\)00067-1](https://doi.org/10.1016/S0267-7261(00)00067-1).

80. Velea D., Shields F., Sabatier J. Elastic wave velocities in partially saturated Ottawa sand: Experimental results and modeling. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 2000. Vol. 64. Iss. 4. P. 1226–1234. DOI: 10.2136/SSSAJ2000.6441226X.

81. Schrefler B.A., Scotta R. A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in

deformable porous media. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 2001. Vol. 190. Iss. 24-25. P. 3223–3246. [https://doi.org/10.1016/s0045-7825\(00\)00390-x](https://doi.org/10.1016/s0045-7825(00)00390-x).

82. Jian-Xin N., Ding-Hui Y., Hui-Zhu Y. Wave dispersion and attenuation in partially saturated sandstones. *Chinese Phys. Lett.* 2004. Vol. 21. Iss. 3. P. 572–575. DOI: 10.1088/0256-307X/21/3/044.

83. Carcione J.M., Cavallini F., Santos J.E. et al. Wave propagation in partially saturated porous media: simulation of a second slow wave. *Wave Motion.* 2004. Vol. 39. Iss. 3. P. 227–240. DOI: 10.1016/J.WAVEMOTI.2003.10.001.

84. Wang Z., Lu Y., Hao H. Numerical investigation of effects of water saturation on blast wave propagation in soil mass. *J. Eng. Mech.* 2004. Vol. 130. Iss. 5. P. 551–561. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2004)130:5(551).

85. Vernigora G.D., Yeremeyev V.A., Soloviev A.N. Opredelenie effektivnykh svoystv kompozitsionnykh materialov na osnove konechno-elementnogo modelirovaniya v ACELAN [Estimation of effective properties of the composite materials on the basis of finite-element method modelling with ACELAN]. *Vestnik Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta putey soobshcheniya.* 2011. No 1(41). P. 9–12 (In Russian).

86. Usoshina E.A., Suvorova T.V., Solovyev A.N. Matematicheskie modeli dinamicheskikh sistem, vkluchayushchikh sloistye obvodnennye poristoupругie osnovaniya [Mathematical models of dynamic systems that include layered watered poroelastic foundations]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta [Vestnik of Don State Technical University].* 2016. No 3(86). P. 10–16 (In Russian).

87. Soloviev A.N., Panfilov I.A. Konechno-elementnoe modelirovanie indentirovaniya porouprugogo vodonasyshchennogo materiala [Finite element modeling of indenting of a poroelastic water-saturated material]. *XXXI Krymskaya osennyaya matematicheskaya shkola-simpozium po spektralnym i evolyutsionnym zadacham (KROMSh-2020): Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii, posvyashchennoy pamyati Nikolaya Dmitrievicha Kopachevskogo [XXXI Crimean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolutionary Problems (KROMSH-2020): Collection of Materials of the International Conference Dedicated to the Memory of Nikolai Dmitrievich Kopachevsky].* Batiliman, Republic of Crimea. 19–27 Sept. 2020. P. 260–263 (In Russian).

88. Dang Q.G., Tarlakovsky D.V. Deystvie na granitsu uprugoporistogo poluprostranstva s kasatelnoy diafragmoy nestatsionarnoy normalnoy osesimmerichnoy nagruzki [Influence on the border of porous elastic half-space by tangent diaphragm of normal nonstationary axial symmetric loading]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy.* 2014. Vol. 20. No 1. P. 148–158 (In Russian).

89. Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu., Tarlakovsky D.V., Lokteva N.A. Chislennoe modelirovanie dinamiki sostavnogo porouprugogo tela [Numerically modeling the dynamics of a compound poroelastic body]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity].* 2013. Vol. 75. Pt. 2. P. 130–136 (In Russian).

90. Igumnov L.A., Okonechnikov A.S., Tarlakovsky D.V., Belov A.A. Granichno-elementnyy analiz voln na uprugom, poristom vyazkouprugom poluprostranstvakh [Boundary-element analysis of waves over elastic, poro- and viscoelastic half-spaces]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity].* 2013. Vol. 75. Pt. 2. P. 145–151 (In Russian).

91. Vatulyan A.O., Gusakov D.V. Issledovanie volnovykh protsessov v neodnorodnom poristouprugom sloe [Investigation of wave processes in an inhomogeneous poroelastic layer]. *Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki [Izvestiya Vuzov. Severo-Kavkazskii region. Natural science].* 2017. No 2(194). P. 4–11 (In Russian).

92. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob osobennostyakh identifikatsii neodnorodnykh porouprugikh kharakteristik pologo tsilindra [About the features of identification inhomogeneous-poroelastic characteristics for hollow cylinder]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity].* 2016. Vol. 78. No 1. P. 22–29 (In Russian).

93. Yakubov S.X. Issledovanie impulsnykh vozmushcheniy v nasyshchennykh poristykh sredakh [Investigation of impulse disturbances in saturated porous media]. *Sibirskiy fiziko-tekhnicheskii zhurnal.* 1992. No 5. P. 151–154 (In Russian).

94. Yakubov S.X. Issledovanie impulsnykh vozmushcheniy v nasyshchennykh poristykh

- sredakh [Investigation of impulse disturbances in saturated porous media]. *Aktualnye voprosy teplofiziki i fizicheskoy gidrogazodinamiki: Tezisy dokladov 4 Vsesoyuznoy konferentsii molodykh issledovateley* [Topical Issues of Thermohysics and Physical Fluid Dynamics. Abstracts of the 4th All-Union Conference of Young Researchers]. Novosibirsk. 29-30 Mar. 1991. P. 82–83. (In Russian).
95. Galiev Sh.U. *Dinamika vzaimodeystvie elementov konstruktivnykh s volnoy davleniya v zhidkosti* [Dynamics of the Interaction of Structural Elements with a Pressure Wave in a Fluid]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1977. 172 p. (In Russian).
96. Saliev A.A. Vzaimodeystvie nestatsionarnykh voln so sfericheskimi granitsami razdela v uprugoporistoy srede, nasyshchennoy zhidkostyu [Interaction of non-stationary waves with spherical interfaces in an elastic-porous medium saturated with liquid]. *Avtoreferat dissertatsii kandidata fiziko-matematicheskikh nauk* [Abstract of the Dissertation of the Cand. Sci. (Phys.&Math.)]. 01.02.04. Tashkent, 1989. 126 p. (In Russian).
97. Saliev A.A. Dvizhenie absolutno tverdogo shara v uprugoporistoy srede pod deystviem nestatsionarnykh voln [Motion of an absolutely rigid ball in an elastic-porous medium under the action of non-stationary waves]. *Mekhanika neodnorodnykh struktur: Tezisy dokladov Vsesoyuznoy konferentsii* [Mechanics of Heterogeneous Structures: Abstracts of the All-Union Conference]. Lvov. 6–8 Sept. 1987. Vol. I. P. 245 (In Russian).
98. Trofimchuk A.N. Asimptoticheskie resheniya nestatsionarnykh kontaktnykh zadach dlya nasyshchennykh zhidkostyu poristoprugikh sred [Asymptotic solutions of non-stationary contact problems for fluid-saturated porous-elastic media]. *Smeshannye zadachi mekhaniki deformiruemogo tela: Tezisy dokladov IV Vsesoyuznoy konferentsii* [Mixed Problems of Deformable Body Mechanics: Abstracts of the IV All-Union Conference]. Odessa. 26–29 Sept. 1989. Pt. 2. P. 111 (In Russian).
99. Trofimchuk A.N. Chislennoe modelirovanie dinamicheskogo povedeniya poristoprugoy nasyshchennoy zhidkostyu srede [Numerical simulation of the dynamic behavior of a porous elastic fluid saturated medium]. *Doklady NAN Ukrainy* [Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine]. 1998. No 11. P. 44–48 (In Russian).
100. Kelbaliev G.I. Matematicheskoe opisanie nestatsionarnykh protsessov, protekayushchikh v izotropnykh poristyykh sredakh, kvazikontinualnymi modelyami [Mathematical description of non-stationary processes occurring in isotropic porous media by quasi-continuum models]. *Teoreticheskie osnovy khimicheskoy tekhnologii* [Theoretical Foundations of Chemical Engineering]. 1985. Vol. 19. No 2. P. 199–206 (In Russian).
101. Maslikova T.I., Polenov V.S. Nestatsionarnyye uprugie volny v poristyykh materialakh [Non-stationary elastic waves in porous materials]. *Izvestiya inzhenerno-tekhnologicheskoy akademii Chuvashskoy Respubliki*. 1999. P. 125–130 (In Russian).
102. Maslikova T.I., Polenov V.S. O nestatsionarnykh uprugikh volnakh v poristyykh materialakh [On non-stationary elastic waves in porous materials]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2001. No 6. P. 103–107 (In Russian).
103. Maslikova T.I., Polenov V.S. O rasprostraneni nestatsionarnykh uprugikh voln v odnorodnykh poristyykh sredakh [On the propagation of non-stationary elastic waves in homogeneous porous media]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids]. 2005. No 1. P. 104–108 (In Russian).
104. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. The features of the massive foundation dynamics on the surface of the fluid-saturated porous medium. *Waves Saturated Porous Media: Abstracts of the Conference*. Poznan. 28–31 Aug. 1990. P. 17.
105. Carter J.P., Booker J.R. Analysis of pumping a compressible pore fluid from a saturated elastic half space. *Comput. Geotech.* 1987. Vol. 4. Iss. 1. P. 21–42. DOI: 10.1016/0266-352X(87)90023-1.
106. Rudnicki J.W. Linear poroelasticity. In: *Lemaitre J. Handbook of Materials Behavior Models*. Section 11.6. Academic Press. 2001. P. 1118–1125.
107. Geertsma J., Smit D.C. Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solids. *Geophysics*. 1961. Vol. XXVI. No 2. P. 169–181. <https://doi.org/10.1190/1.1438855>.
108. Sharma M.D. Wave propagation in a general anisotropic poroelastic medium: Biot's theories and homogenization theory. *J. Earth Syst. Sci.* 2007. Vol. 116. Iss. 4. P. 357–367. DOI: 10.1007/S12040-007-0033-3.

109. Bogachev I.V., Dudarev V.V., Lyapin A.A. Vozdeystvie sosredotochennogo usiliya na anizotropnyuyu poroupruguyu ploskost [The impact of point source on an anisotropic poroelastic plane]. *Inzhenernyy vestnik Dona [Engineering Journal of Don]*. 2013. Vol. 26. No 3. P. 1–5 (In Russian).
110. Kovtun A.I. Ob uravneniyakh modeli Biot i ikh modifikatsiyakh [On poroelastic Biot's equations and their modifications]. *Voprosy geofiziki [Problems of Geophysics]*. 2011. Iss. 44. P. 3–26 (In Russian).
111. Kovtun A.I. Poverkhnostnye volny na granitse uprugo-poristoy sredy i zhidkosti [The surface waves at the interface of the poroelastic medium and liquid]. *Voprosy geofiziki [Problems of Geophysics]*. 2013. Iss. 46. P. 14–25 (In Russian).
112. Auriault J., Borne L., Chambon R. Dynamic of porous saturated media, checking of generalized law Darcy. *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. Vol. 77. Iss. 5. P. 1641–1650. DOI: 10.1121/1.391962.
113. Abdullaev S.A., Soatov A.S. Rasprostranenie uprugikh voln, vyzvannykh dvizhushcheysoy nagruzkoy, v izotropnom poristom poluprostranstve, nasyshchennom zhidkostyu [Propagation of elastic waves caused by a moving load in an isotropic porous half-space saturated with liquid]. *Izvestiya Akademii nauk UzSSR. Seriya: Tekhnicheskie nauki.* 1986. No 6. P. 64–67 (In Russian).
114. Artikov T.U. *Volny v sloistykh poristykh sredakh [Waves in Layered Porous Media]*. Tashkent. Fan Publ. 1987. 268 p. (In Russian).
115. Garipov T.T., Zaslavskiy M.Yu., Pergament A.Kh. Matematicheskoe modelirovanie protsessov filtratsii i porouprugosti [Mathematical modeling of filtration and poroelasticity processes]. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]*. 2005. Vol. 17. No 9. P. 113–128 (In Russian).
116. Acharya D.P., Mondal A. Reflection of longitudinal displacement plane waves from the flat boundary of a solid elastic half-space containing a distribution of a void pores. *Int. J. Appl. Mech. Eng.* 2008. Vol. 13. No 3. P. 609–625.
117. Armero F., Simo J.C. A new unconditionally stable fractional step method for non-linear coupled thermomechanical problems. *Int. J. Numer. Methods in Eng.* 1992. Vol. 35. Iss. 4. P. 737–766. <https://doi.org/10.1002/nme.1620350408>.
118. Birendra J., Ruben J. A locally conservative finite element framework for the simulation of coupled flow and reservoir geomechanics. *Acta Geotech.* 2007. Vol. 2. Iss. 3. P. 139–153. DOI: 10.1007/s11440-007-0033-0.
119. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W., Wienands R. A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system. *Numerical Linear Algebra with Applications.* 2004. Vol. 11. Iss. 2-3. P. 93–113. <https://doi.org/10.1002/nla.372>.
120. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W. On a decoupled algorithm for poroelasticity and its resolution by multigrid. *ECCOMAS CFD 2006: Proceedings of the European Conference on Computational Fluid Dynamics.* Delft. 05–09 Sept. 2006. P. 1–6.
121. Gaspar F.J., Grigoriev A., Vabishchevich P. Explicit-implicit splitting schemes for some systems of evolutionary equations. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling.* 2014. Vol. 11. No 2. P. 346–357.
122. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Vabishchevich P.N. A finite difference analysis of Biot's consolidation model. *Appl. Numer. Math.* 2003. Vol. 44. Iss 4. P. 487–506. DOI: 10.1016/S0168-9274(02)00190-3.
123. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Oosterlee C.W., Vabishchevich P., An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.* 2007. Vol. 196. Iss. 8. P. 1447–1457. DOI: 10.1016/j.cma.2006.03.020.
124. Gaspar F.J., Lisbona F.J., Vabishchevich P.N. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot's consolidation problem. *Appl. Numer. Math.* 2006. Vol. 56. Iss. 6. P. 888–898. DOI: 10.1016/j.apnum.2005.07.002.
125. Kim J., Tchelepi H., Juanes R. Stability, accuracy, and efficiency of sequential methods for coupled flow and geomechanics. *SPE Journal.* 2011. Vol. 12. P. 249–262. DOI: 10.2118/119084-MS.
126. Mikelić A., Wheeler M.F. Convergence of iterative coupling for coupled flow and geomechanics. *Comput. Geosci.* 2013. Vol. 17. No 3. P. 455–461. DOI: 10.1007/s10596-012-9318-y.

127. Osorio J.G., Chen H.-Y., Teufel L., Schaffer S. A two-domain, 3D, fully coupled fluid-flow/geomechanical simulation model for reservoirs with stress-sensitive mechanical and fluid-flow properties. *SPE/ISRM Rock Mechanics in Petroleum Engineering*. Trondheim, Norway. July 1998. Paper No SPE-47397-MS. DOI: 10.2118/47397-MS.
128. Osorio J.G., Chen H.-Y., Teufel L. Numerical simulation of the impact of flow-induced/geomechanical response on the productivity of stress-sensitive reservoirs. *SPE Reservoir Simulation Symposium*. Houston, Texas. February 1999. Paper No SPE-51929-MS 1999. DOI: 10.2118/51929-MS.
129. Osorio J.G., Chen H.-Y. Numerical simulation of coupled fluid-flow/ geomechanical behavior of tight gas reservoirs with stress sensitive permeability. *SPE Fifth Latin American and Caribbean Petroleum Engineering Conference and Exhibition*. Rio de Janeiro, Brazil. August 1997. Paper No SPE-39055-MS. DOI: 10.2118/39055-MS.
130. Wang J.-H., Lu F.J.-F., Zhou X.-L. Complex variable function method for the scattering of plane waves by an arbitrary hole in a porous medium. *Eur. J. Mech.* 2009. Vol. 28. Iss. 3. P. 582–590. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2008.09.005.
131. Kolesov A.E. Chislennoe modelirovanie problem porouprugosti [Numerical simulation of poroelasticity problems]. *Avtoferat dis. ... kand. fiz.-mat. nauk*: 05.13.18 [Abstract of Cand. Sci. (Phys.&Math.). Dissertation: 05.13.18]. Yakutsk. 2014. 124 p. (In Russian).
132. Kosterin A.V., Pavlova M.F., Shemuranova E.V. Chislennoe issledovanie filtratsionnoy konsolidatsii [Numerical investigation of filtration consolidation]. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Models and Computer Simulations]*. 2001. Vol. 13. No 9. P. 63–70 (In Russian).
133. Musaev V.K. Metod konechnykh elementov v zadache ob otrazhenii ploskikh prodolnykh voln napryazheniy v vide delta-funksii ot svobodnoy poverkhnosti [Finite element method in the problem of reflection of plane longitudinal stress waves in the form of a delta function from a free surface]. *Vestnik Rossiyskogo universiteta druzhby narodov. Seriya Problemy kompleksnoy bezopasnosti [Bulletin of Russian Peoples' Friendship University. Series Problems of Complex Safety]*. 2008. No 1. P. 43–51 (In Russian).
134. Pavlova M.F., Rung E.V. Issledovanie neyavnoy raznostnoy skhemy dlya zadachi nasyshchenno-nenasyshchennoy filtratsionnoy konsolidatsii [Investigation of the implicit difference scheme for the problem of saturated-unsaturated filtration consolidation]. *Uchenye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki*. 2012. Vol. 154. Book 4. P. 33–48 (In Russian).
135. Sun Y. Indirect boundary integral equation method for the Cauchy problem of the Laplace equation. *J. Sci. Comput.* 2017. Vol. 71. Iss. 2. P. 469–498. DOI: 10.1007/s10915-016-0308-4.
136. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integralnykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami [Boundary Integral Equations & Boundary Element Methods in Treating the Problems of 3D Elastodynamics with Coupled Fields]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2008. 352 p. (In Russian).
137. Matthias Messner: Fast Boundary Element Methods in Acoustics. Eds. G. Brenn, G. Holzapfel, W. von der Linden, M. Schanz, O. Steinbach. *Monographic Series TU Graz. Computation in Engineering and Science*. Vol. 13. Edition 1. Graz. Verlag der Technischen Universität Graz. 2012. 131 p.
138. Gaul L., Schanz M. A comparative study of three boundary element approaches to calculate the transient response of viscoelastic solids with unbounded domains. *Comput. Methods in Appl. Mech. Eng.* 1999. Vol. 179. Iss. 1. P. 111–123.
139. Gatmiri B., Jabbari E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part I: Two-dimensional solution. *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. No 23. P. 5971–5990. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2005.03.039.
140. Gatmiri B., Jabbari E. Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part II: Three-dimensional solution. *Int. J. Solids Struct.* 2005. Vol. 42. Iss. 23. P. 5991–6002. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2005.03.039.
141. Jabbari E., Gatmiri B. Thermo-poro-elastostatic Green's functions for unsaturated soils. *Comput. Model. Eng. Scis.* 2008. Vol. 504. No 1. P. 1–13.
142. Gatmiri B., Maghoul P., Duhamel D. Two-dimensional transient thermo-hydro-mechanical

fundamental solutions of multiphase porous media in frequency and time domains. *Int. J. Solids Struct.* 2010. Vol. 47. Iss. 5. P. 595–610. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2009.10.022.

143. Maghoul P., Gatmiri B., Duhamel D. Three-dimensional transient thermo-hydro-mechanical fundamental solutions of unsaturated soils. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2010. Vol. 34. Iss. 3. P. 297–329. DOI: 10.1002/NAG.820.

144. Lo W.-C. Propagation and attenuation of Rayleigh waves in a semi-infinite unsaturated poroelastic medium. *Adv. Water Resour.* 2008. Vol. 31. Iss. 10. P. 1399–1410. DOI: 10.1016/j.advwatres.2008.07.00.

145. Xu M. Investigation on dynamic response of unsaturated soils and foundation. *Ph. D. Thesis*. Guangzhou, China. 2010 (In Chinese).

146. Zhang M., Wang X., Yang G., Xie L. Solution of dynamic Green's function for unsaturated soil under internal excitation. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2014. Vol. 64. P. 63–84. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2014.05.001.

147. Burrige R., Vargas C.A. The fundamental solution in dynamic poroelasticity. *Geophys. J. Int.* 1979. Vol. 58. Iss. 1. P. 61–90. DOI: 10.1111/J.1365-246X.1979.TB01010.X.

148. Norris A.N. Radiation from a point source and scattering theory in a fluid-saturated porous solid. *J. Acoust. Soc. Am.* 1985. Vol. 77. Iss. 6. P. 2012–2023. DOI: 10.1121/1.391773.

149. Manolis G.D., Beskos D.E. Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mech.* 1989. Vol. 76. P. 89–104. DOI: 10.1007/BF01175798.

150. Cheng A., Badmus T., Beskos D. Integral equation for dynamic poroelasticity in frequency domain with BEM solution. *J. Eng. Mech. ASCE*. 1991. Vol. 117. Iss. 5. P. 1136–1157. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1991)117:5(1136).

151. Schanz M., Antes H. A new visco- and elastodynamic time domain boundary element formulation. *Comput. Mech.* 1997. Vol. 20. Iss. 5. P. 452–459. DOI: 10.1007/s004660050265.

152. Schanz M. A boundary element formulation in time domain for viscoelastic solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 1999. Vol. 15. Iss. 11. P. 799–809. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1099-0887\(199911\)15:11<799::AID-CNM294>3.0.CO;2-F](https://doi.org/10.1002/(SICI)1099-0887(199911)15:11<799::AID-CNM294>3.0.CO;2-F).

153. Schanz M. Application of 3D time-domain boundary element formulation to wave propagation in poroelastic solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2001. Vol. 25. Iss. 4-5. P. 363–376. DOI: 10.1016/S0955-7997(01)00022-4.

154. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua: a boundary element approach. *Lecture Notes in Applied Mechanics*. Vol. 2. Berlin. Springer. 2001. 170 p.

155. Schanz M., Diebels S. A comparative study of Biot's theory and the linear theory of porous media for wave propagation problems. *Acta Mech.* 2003. Vol. 161. Iss. 3-4. P. 213–235. DOI: 10.1007/s00707-002-0999-5Ac.

156. Schanz M., Pryl D. Dynamic fundamental solutions for compressible and incompressible modeled poroelastic continua. *Int. J. Solids Struct.* 2004. Vol. 41. Iss. 15. P. 4047–4073. DOI: 10.1016/J.IJSOLSTR.2004.02.059.

157. Schanz M. Poroelastodynamics: Linear models, analytical solutions and numerical methods. *Appl. Mech. Rev.* 2009. Vol. 62. Iss. 3. P. 1–15. DOI: 10.1115/1.3090831.

158. Cheng A.H.-D. Poroelasticity. Part of: *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Vol. 27. Springer. 2016. 903 p.

159. Dominguez J. An integral formulation for dynamic poroelasticity. *J. Appl. Mech.* 1991. Vol. 58. Iss. 2. P. 588–591. DOI: 10.1115/1.2897229.

160. Dominguez J. Boundary element approach for dynamic poroelasticity problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1992. Vol. 35. Iss. 2. P. 307–324. DOI: 10.1002/NME.1620350206.

161. Gatmiri B., Kamalian M. On the fundamental solution of dynamic poroelastic boundary integral equations in time domain. *Int. J. Geomech.* 2002. Vol. 2. Iss. 4. P. 381–398. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2002)2:4(381).

162. Gatmiri B., Nguyen K.V. Time 2D fundamental solution for saturated porous media with incompressible fluid. *Communications in Numerical Methods in Engineering*. 2005. Vol. 21. Iss. 3. P. 119–132. DOI: 10.1002/CNM.732.

163. Seyrafian S., Gatmiri B., Nourzad A. Green functions for a continuously non-homogenous saturated media. *Computational Modeling in Engineering Science*. 2006. Vol. 15. No 2. P. 115–125. DOI: 10.3970/CMES.2006.015.115.

164. Gatmiri B., Eslami H. Scattering of harmonic waves by a circular cavity in a porous medium: complex functions theory approach. *Int. J. Geomech.* 2007. Vol. 7. Iss. 5. P. 371–381. DOI: 10.1061/(ASCE)1532-3641(2007)7:5(371).
165. Pan E., Maier E. A symmetric boundary integral approach to transient poroelastic analysis. *Comput. Mech.* 1997. Vol. 19. Iss. 3. P. 169–178.
166. Maghoul P., Gatmiri B., Duhamel D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2011. Vol. 31. Iss. 11. P. 1480–1495. DOI: 10.1016/j.soildyn.2011.05.016.
167. Li P., Schanz M. Time domain boundary element formulation for partially saturated poroelasticity. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2013. Vol. 37. Iss. 11. P. 1483–1498. DOI: 10.1016/J.ENGANABOUND.2013.08.002.
168. Maghoul P., Gatmiri B., Duhamel D. Boundary integral formulation and two-dimensional fundamental solutions for dynamic behavior analysis of unsaturated soils. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2011. Vol. 31. Iss. 11. P. 1480–1495. DOI: 10.1016/j.soildyn.2011.05.016.
169. Sun L., Wei X., Chen B. A meshless singular boundary method for elastic wave propagation in 2D partially saturated poroelastic media. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2020. Vol. 113. P. 82–98. DOI: 10.1016/j.enganabound.2019.12.019.
170. Ashayeri I., Kamalian M., Kazem M. et al. Analytical 3D transient elastodynamic fundamental solution of unsaturated soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2011. Vol. 35. Iss. 17. P. 1801–1829. <https://doi.org/10.1002/nag.978>.
171. Igumnov L.A., Petrov A.N., Belov A.A. et al. Numerically-analytically studying fundamental solutions of 3-D dynamics of partially saturated poroelastic bodies. *Materi. Phys. Mech.* 2019. Vol. 42. P. 596–601. DOI: 10.18720/MPM.4252019_12.
172. Igumnov L.A., Petrov A.N. Modelirovanie dinamiki chastichno nasyshchennykh porouprugikh tel na osnove metoda granichno-vremennykh elementov [Dynamics of partially saturated poroelastic solids by boundary-element method]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2016. No 3. P. 47–61 (In Russian).
173. Igumnov L.A., Grigoryev M.V. Raschet otklika tsilindricheskoy polosti v porouprugom poluprostranstve na dinamicheskoe vozdeystvie metodom granichnykh elementov [Calculation of the response of a cylindrical cavity in a porous-elastic half-space to dynamic action by the boundary element method]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred: Mezhdunarodnogo simpoziuma im. A.G. Gorshkova [Dynamic and Technological Problems of Mechanics of Structures and Continuous Media: Materials of the XXVII International Symposium named after A.G. Gorshkov]*. Moscow. 17–21 May. 2021. P. 112–114 (In Russian).
174. Theodorakopoulos D.D., Beskos D.E. Application of Biot's poroelasticity to some soil dynamics problems in civil engineering. *Soil Dyn. Earthq. Eng.* 2006. Vol. 26. Iss. 6-7. P. 666–679. DOI: 10.1016/J.SOILDYN.2006.01.016.
175. Albers B., Savidis S.A., Tasan H.E., Estorff O.V., Gehlken M. BEM and FEM results of displacements in a poroelastic column. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 2012. Vol. 22. No 4. P. 883–896. DOI: 10.2478/v10006-012-0065-y.
176. Vovk L.P., Lisianets A.V. Problemy analiticheskogo podkhoda k zadacham deformirovaniya mnogofaznykh sred i gruntov [Problems of the analytical approach to tasks of multiphase media and soil deformation]. *Vesti avtomobilno-dorozhnogo instituta [Bulletin of the Automobile and Highway Institute]*. 2017. No 4(23). P. 18–35 (In Russian).

**NUMERICAL SIMULATION OF WAVE PROCESSES
IN PARTIALLY SATURATED POROELASTIC MEDIA (REVIEW)***

Igumnov L.A., Petrov A.N.

*Research Institute for Mechanics, National Research Lobachevsky State University
of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation*

igumnov@mech.unn.ru

Received by the Editor 2022/07/13

The review of a number of scientific works in the field of modeling wave processes in partially saturated porous media is proposed. Review consists of three parts. In the first part of overview, classification of porous media according to the degree of saturation with a wetting filler is stated. The fundamental works of the modern theory of porous continuums, which resulted in the Biot's theory and the mixture theory, are considered. The advantages, disadvantages, as well as the conditions for the correspondence between the two approaches are indicated. The second part is devoted to scientific publications of an applied and academic nature, which are mostly devoted to the study of the features of wave processes in poroelastic media by analytical and semi-analytical methods. Special attention is paid to the works devoted to the modeling of slow longitudinal waves as a distinctive feature of wave processes in partially saturated poroelastic media. The third part gives an overview of the application of boundary element and finite element methods to study the stress-strain state of saturated and partially saturated porous media, the behavior of waves during their propagation in the media under consideration, and the analysis of local dynamic effects. The two methods are compared.

Experimental works confirming theoretical results obtained within the Biot's theory are indicated. A brief analysis of modern achievements in the problems of numerical simulation of dynamic effects in semi-infinite porous media with a layered structure such as the seabed is carried out. Works on the derivation of fundamental solutions for systems of poroelasticity equations and the construction of the corresponding integral equations in time and space of the Fourier and Laplace integral transformations are considered. Works are given that consider various aspects of boundary element modeling of unsaturated porous media and the application of boundary and finite element methods on specific examples.

Keywords: poroelastic media, Biot's theory, mixture theory, wave processes, numerical simulation, boundary element method, finite element method.

*The research was supported by Russian Science Foundation (project No 22-19-00138).