

УДК 539.3

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛЫ В РАСТЯНУТЫХ ЭЛАСТИЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Ю.П. Гуляев

Саратов

Как известно, все сосуды, нервы, сухожилия в человеческом организме находятся в натянутом состоянии. От величины сосудистого тонуса зависит нормальная работа сосудов и кровеносной системы организма в целом. Поэтому во время операций, связанных с трансплантацией, необходимо заранее учитывать силу предварительного натяжения стенок сосуда. Эта сила заранее не известна и подлежит определению в каждом отдельном случае. В данной работе предлагается относительно простая методика, позволяющая достаточно точно оценить силу предварительного натяжения произвольной эластичной структуры.

1. Постановка задачи

Для определения силы предварительного натяжения необходимо жестко закрепить в двух точках концы исследуемого участка эластичной структуры (рис. 1). Поперечную силу прикладывают дважды к середине участка и дважды измеряют величину перемещения точки приложения силы и саму силу [1].

На рис.1 введены следующие обозначения: $2x$ – длина закрепленного участка нити; d_1, d_2 – перемещения средней точки участка соответственно при первом и втором нагружении поперечными силами F_1 и F_2 ; T_1, T_2 – дополнительные растягивающие силы в нити; S – искомая сила предварительного натяжения нити.

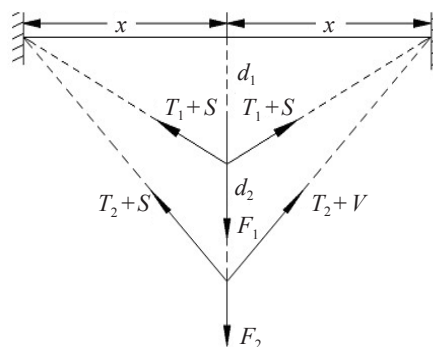


Рис. 1

2. Случай нелинейно-упругого поведения материала нити.

Эксперимент

Для описания нелинейно-упругого поведения нити при больших деформациях был проведен эксперимент по построению диаграммы растяжения. В качестве материала использовалась резиновая нить с квадратным поперечным сечением размером $1,5 \times 1,5$ мм. Диаграмма растяжения материала была получена на испытательной машине TIRA Test 28005. В эксперименте использовались нити с разной линейной базой: $L = 70$ мм и $L = 40$ мм. На рис. 2 приведена одна из таких диаграмм для базы $L = 70$ мм.

Была изготовлена специальная оснастка, реализующая данную схему нагруже-

ния нити (см. рис. 1). Здесь $x=42$ мм. Для закрепления концов резины использовались специальные зажимы. Один конец жестко фиксировался, а на другой конец нити вешался груз весом в 50 г (0,49 Н) и 100 г (0,98 Н). После этого второй конец тоже жестко фиксировался. Затем с помощью испытательной машины дважды прикладывали силу по оттягиванию резины в точке, равноудаленной от обоих концов, и получали необходимые перемещения d_1, d_2 средней точки и величину оттягивающей силы F_1, F_2 .

Получим уравнения, из которых можно определять силу предварительного натяжения нити, используя данные вышеописанного эксперимента.

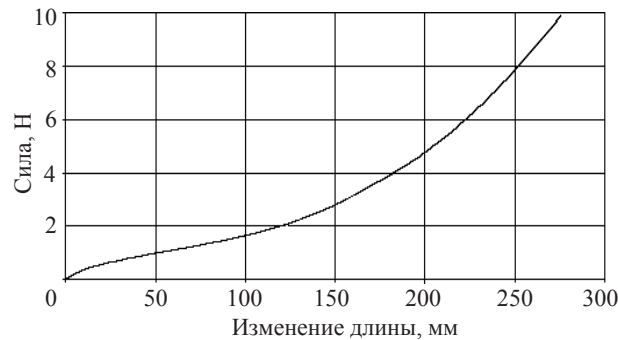


Рис. 2

На диаграмме (см. рис. 2) представлена экспериментальная зависимость $P/F = \sigma = 1/F f(\epsilon)$ – нелинейный закон Гука при больших деформациях. Здесь σ – напряжение в растягиваемой нити, F – площадь поперечного сечения нити, P – сила натяжения нити. На основании этой зависимости и условия равновесия узлов (средней точки нити) можно написать следующие равенства:

$$T_{1,2} + S = f(\epsilon_0 + \epsilon_{1,2}),$$

где $f(\epsilon_0) = S$ – сила предварительного натяжения, $T_{1,2}$ – дополнительные силы натяжения нити соответственно при первом и втором нагружениях; $\epsilon_{1,2}$ – дополнительные деформации нити, вызываемые первым и вторым нагружениями, откуда

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{f(\epsilon_0 + \epsilon_1) - S}{f(\epsilon_0 + \epsilon_2) - S}, \quad (1)$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{1/2d_1\sqrt{d_1^2 + x^2}F_1 - S}{1/2d_2\sqrt{d_2^2 + x^2}F_2 - S}. \quad (2)$$

Приравнивая правые части равенств (1) и (2), приходим к решению следующей системы нелинейных уравнений относительно ϵ_0 и S :

$$\begin{cases} \frac{f(\epsilon_0 + \epsilon_1) - S}{f(\epsilon_0 + \epsilon_2) - S} = \frac{1/2d_1\sqrt{d_1^2 + x^2}F_1 - S}{1/2d_2\sqrt{d_2^2 + x^2}F_2 - S}, \\ f(\epsilon_0) = S. \end{cases} \quad (3)$$

Система уравнений (3) легко сводится к одному разрешающему уравнению относительно предварительной деформации ϵ_0 :

$$FF(\epsilon_0) = f(\epsilon_0) \left(\frac{1}{2d_2} \sqrt{d_2^2 + x^2} F_2 - \frac{1}{2d_1} \sqrt{d_1^2 + x^2} F_1 + f(\epsilon_0 + \epsilon_1) - f(\epsilon_0 + \epsilon_2) \right) - \left(\frac{1}{2d_2} \sqrt{d_2^2 + x^2} F_2 f(\epsilon_0 + \epsilon_1) - \frac{1}{2d_1} \sqrt{d_1^2 + x^2} F_1 f(\epsilon_0 + \epsilon_2) \right) = 0, \quad (4)$$

где $\epsilon_1 = (\sqrt{d_1^2 + x^2} - x)/L$, $\epsilon_2 = (\sqrt{d_2^2 + x^2} - x)/L$.

Из этого уравнения находим предварительную деформацию нити ϵ_0 и силу предварительного натяжения нити $S = f(\epsilon_0)$. Уравнение (4) было решено численно для следующих четырех случаев:

- а) $L = 70$ мм, $S_3 = 0,49$ Н $\Rightarrow \epsilon_0 = 0,225$;
- б) $L = 70$ мм, $S_3 = 0,98$ Н $\Rightarrow \epsilon_0 = 0,686$;
- в) $L = 40$ мм, $S_3 = 0,49$ Н $\Rightarrow \epsilon_0 = 0,541$;
- г) $L = 40$ мм, $S_3 = 0,98$ Н $\Rightarrow \epsilon_0 = 1,487$.

На рис. 3 показано графическое решение нелинейного уравнения относительно ϵ_0 для случая а).

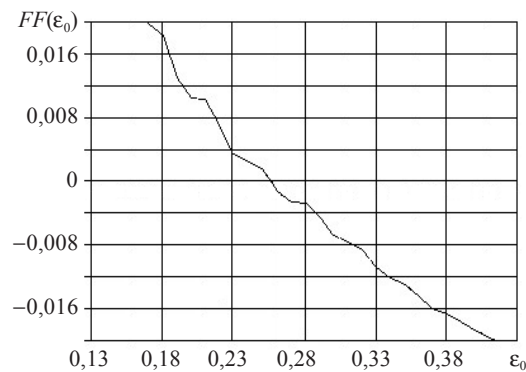


Рис. 3

3. Аппроксимация экспериментальных данных с помощью ряда Фурье

Чтобы численно решить уравнение (4), диаграмму $f(\epsilon)$ аппроксимируем рядом Фурье. Для этого разобьем отрезок $[0, T]$, на котором задана функция $f(\epsilon)$, точками с шагом 5 мм ($T = 245$ мм для $L = 70$ мм, $T = 195$ мм для $L = 40$ мм). Таким образом, получим кусочно-линейную аппроксимацию диаграммы в точках с координатами (y_i, f_i) , $i = \overline{0, k}$, ($k = 49$ для $L = 70$ мм, $k = 39$ для $L = 40$ мм). Все линейные перемещения нити относим к базе L (далее черточки над величинами опускаем), то есть

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{L}, \quad \bar{T} = \frac{T}{L}.$$

После этого раскладываем кусочно-линейную функцию в ряд Фурье с периодом T :

$$F(t) = \frac{a_0}{T} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) \right),$$

где коэффициенты ряда считаются по формулам:

$$a_n = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{\pi n} \left(f_{i+1} \sin \left(2\pi n \frac{y_{i+1}}{T} \right) - f_i \sin \left(2\pi n \frac{y_i}{T} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \frac{f_{i+1} - f_i}{y_{i+1} - y_i} \left(\cos \left(2\pi n \frac{y_{i+1}}{T} \right) - \cos \left(2\pi n \frac{y_i}{T} \right) \right) \right], \\ a_0 = \sum_{i=1}^k \left[\left(f_i + \frac{1}{2} (f_{i+1} - f_i) \right) (y_{i+1} - y_i) \right], \\ b_n = \sum_{i=1}^k \left[\frac{1}{\pi n} \left(f_{i+1} \cos \left(2\pi n \frac{y_{i+1}}{T} \right) - f_i \cos \left(2\pi n \frac{y_i}{T} \right) \right) + \right. \\ \left. + \frac{T}{2\pi^2 n^2} \frac{f_{i+1} - f_i}{y_{i+1} - y_i} \left(\sin \left(2\pi n \frac{y_{i+1}}{T} \right) - \sin \left(2\pi n \frac{y_i}{T} \right) \right) \right].$$

На рис. 4 представлены результаты аппроксимации диаграммы отрезком ряда Фурье, в котором удержано $N=1000$ членов. Сплошной линией показана экспериментальная кривая, а прерывистой – кривая, полученная в результате аппроксимации. Визуально эти кривые неразличимы. Для удобства прерывистая кривая изображена на другом участке периода, иначе эти кривые просто сольются.

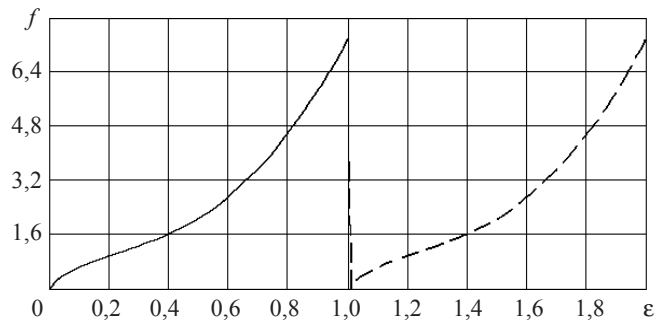


Рис. 4

4. Аппроксимация экспериментальной диаграммы с помощью функции $y = e^x$

Более удобно и просто аппроксимировать диаграмму материала с помощью функции $f(x) = c_1 e^x - c_2 x - c_3$. Коэффициенты c_1, c_2, c_3 подбираются методом наименьших квадратов [2].

Для рассматриваемого случая возьмем следующие значения $x_i, y_i, i = \overline{1,4}$, где x_i – значения деформации, а y_i – соответствующее значение прикладываемой силы:

1) для $L = 70$ мм $x_i = (0; 0,414; 2; 3,5)$, $y_i = (0; 0,72; 2,51; 7,47)$;

2) для $L = 40$ мм $x_i = (0; 0,25; 3,125; 4,875)$, $y_i = (0; 0,34; 2,51; 7,96)$.

Базисные функции $f_j, j = \overline{1,3}$, имеют вид:

$$f_1 = e^x, \quad f_2 = -x, \quad f_3 = -1.$$

Тогда, согласно методу наименьших квадратов, коэффициенты c_1, c_2, c_3 будут иметь следующие значения:

- 1) для $L = 70$ мм $c_1 = 0,147, c_2 = -0,737, c_3 = 5,283 \cdot 10^{-4}$;
- 2) для $L = 40$ мм $c_1 = 0,042, c_2 = -0,479, c_3 = -0,057$.

На графике (рис. 5) показаны полученная функция $f(x)$ (пунктирная линия), выбранные точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1,4}$, (квадратики) и экспериментальная кривая (сплошная линия) для $L = 70$ мм.

Как видно из графика, показательная функция достаточно точно аппроксимирует значительную часть экспериментальной диаграммы материала нити.

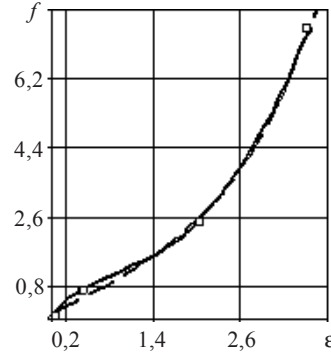


Рис. 5

5. Аппроксимация диаграммы с помощью функции $y = \sqrt{x}$

Начальный участок экспериментальной кривой приблизим функцией $f(x) = c_1 \sqrt{x}$. Коэффициент c_1 также будем находить с помощью метода наименьших квадратов. Возьмем следующие значения $x_i, y_i, i = \overline{1,3}$, где x_i – значения деформации, а y_i – соответствующее значение прикладываемой силы:

- 1) для $L = 70$ мм $x_i = (0; 0,128; 0,714), y_i = (0; 0,34; 0,91)$;
- 2) для $L = 40$ мм $x_i = (0; 0,25; 1,375), y_i = (0; 0,34; 0,91)$.

Базисная функция f_1 имеет вид: $f_1 = \sqrt{x}$. Тогда, согласно методу наименьших квадратов, коэффициенты c_1 будут иметь вид:

- 1) для $L = 70$ мм $c_1 = 1,138$;
- 2) для $L = 40$ мм $c_1 = 0,761$.

На графике (рис. 6) показаны полученная функция $f(x)$ (пунктирная линия), выбранные точки (x_i, y_i) , $i = \overline{1,3}$, (квадратики) и экспериментальная кривая (сплошная линия) для базы $L = 70$ мм.

Аппроксимация начального участка диаграммы степенной функцией оказывается вполне удовлетворительной.

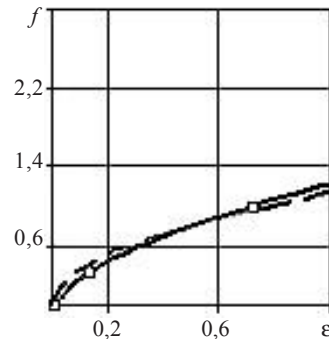


Рис. 6

6. Вывод разрешающего уравнения для линейно-упругого случая

В частном случае, когда материал нити ведет себя линейно-упруго, функция $f(\epsilon)$ представляется в виде:

$$f(\epsilon) = EF\epsilon, \quad (5)$$

где E – модуль Юнга материала нити. Система уравнений (3) в этом случае значительно упрощается:

$$\begin{cases} \epsilon_1 = \frac{1/2d_1\sqrt{d_1^2 + x^2}F_1 - S}{EF\epsilon_0}, \\ \epsilon_2 = \frac{1/2d_2\sqrt{d_2^2 + x^2}F_2 - S}{EF\epsilon_0}, \\ EF\epsilon_0 = S. \end{cases} \quad (6)$$

Подставляя в левую часть равенства (5) выражения ϵ_1 и ϵ_2 на основании формул (4), получим простое уравнение для определения силы предварительного натяжения нити S :

$$\frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} - x}{\sqrt{d_2^2 + x^2} - x} = \frac{1/2d_1\sqrt{d_1^2 + x^2}F_1 - S}{1/2d_2\sqrt{d_2^2 + x^2}F_2 - S}. \quad (7)$$

Решая его, находим S :

$$S = \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2} + \sqrt{d_2^2 + x^2}}{2(d_2^2 - d_1^2)} \left(\frac{d_2^2}{d_1} \frac{\sqrt{d_1^2 + x^2}}{x + \sqrt{d_2^2 + x^2}} F_1 - \frac{d_1^2}{d_2} \frac{\sqrt{d_2^2 + x^2}}{x + \sqrt{d_1^2 + x^2}} F_2 \right). \quad (8)$$

7. Численные результаты

На основании вышеприведенных аппроксимаций диаграммы материала нити были рассчитаны значения силы предварительного натяжения. Результаты расчета приведены в табл. 1.

Таблица 1

Функция	L , мм	$S_{\text{экср}}$, Н	d_1 , мм	d_2 , мм	ϵ_0 , мм	F_1 , Н	F_2 , Н	$f(\epsilon_0)=S_{\text{теор}}$, Н	Δ , %
Ряд Фурье	70	0,49	19,08	34,56	0,225	0,5	1	0,492	0,40
		0,98	10,58	20,04	0,689			0,967	1,32
	40	0,49	19,08	34,56	0,541	0,5	1	0,511	4,28
		0,98	10,58	20,04	1,218			0,977	0,30
$f(x)=c_1e^x - c_2x - c_3$	70	0,49	19,08	34,56	0,225	0,5	1	0,35	28,50
		0,98	10,58	20,04	0,689			0,798	8,50
	40	0,49	19,08	34,56	0,541	0,5	1	0,389	20,60
		0,98	10,58	20,04	1,218			0,784	20,00
$f(x)=c_1\sqrt{x}$	70	0,49	19,08	34,56	0,225	0,5	1	0,54	10,20
		0,98	10,58	20,04	0,689			0,943	3,70
	40	0,49	19,08	34,56	0,541	0,5	1	0,56	4,30
		0,98	10,58	20,04	1,218			0,84	4,30

Данные для линейно-упругого случая представлены в табл. 2

Таблица 2

$S_{\text{экср}}$, Н	d_1 , мм	d_2 , мм	F_1 , Н	F_2 , Н	$S_{\text{теор}}$, Н	Δ , %
0,49	19,08	34,56	0,5	1	0,513	2,3
0,98	10,58	20,04			0,967	1,3

Все вычисления проводились с помощью программного комплекса MATHCAD.

Заключение

Как видно из полученных результатов (см. табл. 1), самой хорошей аппроксимацией оказалась аппроксимация рядом Фурье. Для этого случая мы имеем минимальную погрешность по сравнению с остальными случаями. Из табл. 2 следует, что формула (8) для линейного случая хорошо работает и для нелинейного поведения материала. Связано это с тем, что на каждом отрезке нелинейная диаграмма хорошо аппроксимируется линейной функцией. Действительно, раскладывая нелинейную функцию $f(\epsilon)$ в окрестности точки ϵ_0 предварительного нагружения в степенной

ряд, будем иметь

$$f(\varepsilon_0 + \varepsilon_i) = f(\varepsilon_0) + \frac{df(\varepsilon_0)}{d\varepsilon} \varepsilon_i + O(\varepsilon_i^2), \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Подставляя правую часть формулы (9) в левую часть первого уравнения системы (3), с точностью до малых величин второго порядка получим:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{1/2d_1\sqrt{d_1^2 + x^2}F_1 - S}{1/2d_2\sqrt{d_2^2 + x^2}F_2 - S},$$

что в точности совпадает с уравнением (7).

Ценность формулы (8) состоит в том, что для определения силы предварительного натяжения эластичной структуры не нужно знать в явном виде диаграмму растяжения материала. Предложенный способ определения силы предварительного натяжения эластичной структуры может быть положен в основу конструкции простого прибора для соответствующих нужд медицинской практики.

Литература

1. Гуляев, Ю.П. Математические модели биомеханики в медицине / Ю.П. Гуляев, Л.Ю. Коссович. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. – 48 с.
2. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – М.: МЦНМО, 2001. – 706 с.

[5.09.2006]

DETERMINING THE LONGITUDINAL FORCE IN ELASTIC STRUCTURES LOADED IN TENSION

Yu.P. Gulyaev

Equations for determining the prestress value in elastic structures loaded in tension, both for linear elastic and non-linear responses, are constructed. The values of prestress calculated using the above equations are in good agreement with the experimental results for rubber cords.